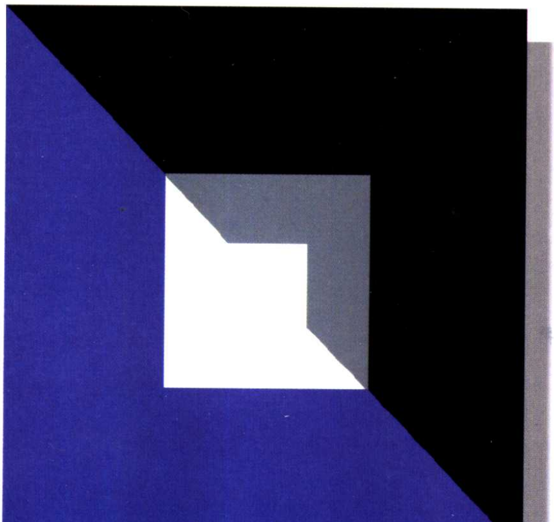
高等代数

习题解

（修订版）

下册

杨子胥　编



山东科学技术出版社

www.lkj.com.cn

高等代数习题解

（修订版）

下　册

杨子胥　编

山东科学技术出版社

高等代数习题解(修订版)

下册

杨子胥　编

出版者:山东科学技术出版社

地址:济南市玉函路16号

邮编:250002　电话:(0531)2065109

网址:www.lkj.com.cn

电子邮件:sdkj@jn-public.sd.cninfo.net

发行者:山东科学技术出版社

地址:济南市玉函路16号

邮编:250002　电话:(0531)2020432

印刷者:济南新华印刷厂

地址:济南市历山路146号

邮编:250014　电话:(0531)2962965

开本: 787mm×1092mm 1/32

印张: 16.125

字数: 343千

版次: 2003年3月第2版第7次印刷

印数: 71001-76000

ISBN 7-5331-2924-5　　O·94

定价: 22.00元

图书在版编目（CIP）数据

高等代数习题解．下册/杨子胥编．—修订版．—济南:山东科学技术出版社,2001.9(2003.3重印)

ISBN 7-5331-2924-5

Ⅰ.高… Ⅱ.杨… Ⅲ.高等代数—高等学校—解题 Ⅳ.015-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 050228 号

内 容 提 要

本书从二次型、集合与映射、线性空间、线性变换、λ矩阵、欧式空间等方面，精选了494道典型性较强的习题，做了全面详细的解答，并注意了一题多解。每节习题之前都对本节主要定义、定理和重要结论作了简要的概述。内容丰富，重点突出，解答明确，尤其便于自学。可供高等院校师生、中学教师和广大数学爱好者以及有志报考研究生的人员学习参考。

修订版前言

自《高等代数习题解》出版以来，我不断收到来自全国各地的热情洋溢的信，其中也有提出意见和建议的信件，对此，我表示最真挚的感谢！

本习题解长期缺书，很多读者特别是一些考研究生的同学，纷纷给出版社和我本人写信查询此书，故现决定修订再版。这次修订版对原版做了较大的改动，主要有：

1. 去掉了有关置换、实根近似计算以及群、环、域基本概念（原版第十三章）等方面的全部题目；

2. 去掉了一些重复的题、个别错题以及一些证明冗长且无甚价值的题；另外，纠正了一些错误，并对大部分题目在符号、用语等方面都做了不同程度的修订；

3. 增补了一大部分题目，特别是行列式、线性方程组、矩阵以及矩阵的相似和对角化等方面的题目。因此，在原版基础上调整和新增加了以下诸节：向量组的极大无关组与秩、矩阵的秩初步、齐次线性方程组及其基础解系、矩阵的秩、简单矩阵方程、矩阵的特征根与特征向量、相似矩阵与矩阵的对角化以及实对称矩阵的正交相似等等；

4. 为了眉目清楚便于查找题目，每节分为两大部分：提要（主要给出本节所用到的基本定义和定理）；题解。

本书仍分上下两册，各包含六章，共 1112 题。其中上册 618 题，下册 494 题。

本书可作为知识青年自学、中学教师进修、大专院校师生

学习和教学参考之用。特别，可作为有志考研究生的同学学习和参考。事实上，不少人反映，他们考硕士研究生甚至博士研究生的高等代数、线性代数或矩阵论的课，都是只参考了本习题解。我相信，只要读者认真阅读和钻研，他们会从本习题解中获得他们所需要的有益的东西。

书中错误和疏漏之处恳请读者批评指正。

杨子胥

2001年6月

目　　录

第七章　二次型 …………………………………………………… (1)

§7·1　二次型及其矩阵、合同矩阵 ……………………………… (1)

§7·2　二次型的标准形、实与复二次型 ………………………… (19)

§7·3　正定二次型与正定矩阵 …………………………………… (46)

第八章　集合与映射 ……………………………………………… (75)

§8·1　集合 ………………………………………………………… (75)

§8·2　映射 ………………………………………………………… (86)

§8·3　代数运算 …………………………………………………… (93)

第九章　线性空间 ………………………………………………… (106)

§9·1　线性空间定义、基底和维数 ……………………………… (106)

§9·2　子空间、子空间的和与直和 ……………………………… (145)

第十章　线性变换 ………………………………………………… (184)

§10·1　线性变换的运算及其矩阵 ……………………………… (184)

§10·2　线性变换的特征值与特征向量 ………………………… (217)

§10·3　矩阵的特征根(特征值)与特征向量 …………………… (239)

§10·4　相似矩阵与矩阵的对角化 ……………………………… (258)

§10·5　不变子空间 ……………………………………………… (283)

第十一章　λ-矩阵 ………………………………………………… (318)

§11·1　λ-矩阵的不变因子和初等因子 ………………………… (318)

§11·2　最小多项式 ……………………………………………… (342)

§11·3　矩阵的相似与特征矩阵 …………………………… (348)
§11·4　若当(Jordan)标准形和有理标准形 ……………… (354)
第十二章　欧式空间 …………………………………………… (390)
§12·1　内积性质和欧式空间的基本概念 ………………… (390)
§12·2　正交变换和正交矩阵 ……………………………… (421)
§12·3　对称变换和实对称矩阵 …………………………… (451)
§12·4　反对称变换、共轭变换和非负对称变换 ………… (458)
§12·5　实对称矩阵的正交相似、实对称矩阵与正交
和正定矩阵 ……………………………………………… (469)
§12·6　实反对称矩阵 ……………………………………… (499)

第七章　二次型

本章没有列入与实二次型(实对称矩阵)结果平行的厄米特二次型(H－阵)的习题,但个别习题利用了 H－型的结果．

§7·1　二次型及其矩阵

提　　要

1° 每个二次型 $f(x_1,\cdots,x_n)$都可惟一的表示成

$$f(x_1,\cdots,x_n)=X'AX,$$

其中 $X=(x_1,\cdots,x_n)'$, A 为对称矩阵,称为二次型 f 的矩阵,A 的秩称为f 的秩．

2° 二次型经过满秩线性代换 $X=CY$ 后变为

$$f=X'AX=Y'(C'AC)Y,$$

其中 $B=C'AC$ 为变换后二次型的矩阵．显然 $r(B)=r(A)$,即二次型经过满秩线性代换后秩不改变．

3° 设 A,B 为数域F 上两个n 阶矩阵．如果存在 F 上 n 阶矩阵C 使

$$C'AC=B,$$

则称 A 与B 在上下合同．

合同关系是一个等价关系．从而可对 F 上全体n 阶矩阵按合同与否来进行分类．

题　解

【619】写出下列二次型的矩阵：

1) $f(x_1,x_2)=3x_1^2-2x_1x_2+x_2^2$;

2) $f(x_1,x_2,x_3)=(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2$;

3) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+3x_2^2-x_3^2+x_1x_2-2x_1x_3+3x_2x_3$;

4) $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1^2+3x_2^2-x_3^2+x_1x_2-2x_1x_3+3x_2x_3$.

解　用 X 表示$(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$，但在每个小题中的 n 是不同的．

1) $\because$

$$f(x_1,x_2)=3x_1^2-x_1x_2-x_2x_1+x_2^2=(x_1,x_2)\begin{pmatrix}3&-1\\-1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix},$$

故 f 的矩阵为$\begin{pmatrix}3&-1\\-1&3\end{pmatrix}$.

2) $\because$

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,x_3)&=\left[(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\right]^2\\&=X'\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}(a_1,a_2,a_3)X\\&=X'\begin{pmatrix}a_1^2&a_1a_2&a_1a_3\\a_2a_1&a_2^2&a_2a_3\\a_3a_1&a_3a_2&a_3^2\end{pmatrix}X,\end{aligned}$$

故 f 的矩阵为 $$\begin{pmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & a_1a_3 \\ a_2a_1 & a_2^2 & a_2a_3 \\ a_3a_1 & a_3a_2 & a_3^2 \end{pmatrix}.$$

3) $$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & 3 & \frac{3}{2} \\ -1 & \frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix}.$$

4) 应该注意的是，此题 f 的表达式虽然与 3)完全相同，但是，3)中 f 是三个变量的二次型，而本题的 f 是四个变量的二次型，亦即含 x_4 项的系统均认为是零，故它的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 3 & \frac{3}{2} & 0 \\ -1 & \frac{3}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

【620】写出矩阵为下列方阵的二次型：

1) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$；

2) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$；

3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$；

4) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$；

$$5)\ \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -1 \end{pmatrix};\quad 6)\ \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

解 1) $f(x_1, x_2, x_3) = x_2^2 + 2x_1x_3$;

2) $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 - x_2^2 + 2x_3^2$;

3) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_2^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 6x_2x_3$;

4) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 6x_2x_3$;

5) $f = x_2^2 + 2x_3^2 - x_4^2 + x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3 - 6x_2x_4$;

6) $f = x_2^2 - x_4^2 + x_1x_2 - 6x_2x_4$.

【 621 】写出下列各二次型的矩阵:

1) $f(x_1, x_2) = X'\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}X$;

2) $f(x_1, x_2, x_3) = X'\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}X$.

解

1) $f(x_1, x_2) = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$= 2x_1^2 + x_1x_2 + 3x_2x_1 + x_2^2 = 2x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$

$= X'\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}X$,

故 f 的方阵为$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

2) $f=X'\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}X=X'\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}X$,

故二次型 f 的方阵为$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}$.

【 622 】设 $f(x_1,\cdots,x_n)=X'AX=X'BX$，其中 A,B 为 n 阶方阵，$X=(x_1,\cdots,x_n)'$. 证明：如果 $A'=A,B'=B$，则 $A=B$.

证 设

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

则 $X'AX$ 与 $X'BX$ 展开后 $x_ix_j(i,j=1,\cdots,n;i\leqslant j)$的系数分别为

$$a_{ij}+a_{ji},\qquad b_{ij}+b_{ji}.$$

但由于 $A'=A,B'=B$，即 $a_{ij}=a_{ji},b_{ij}=b_{ji}$，故 x_ix_j 在 $X'AX$ 与 $X'BX$ 中的系数应相等，即

$$2a_{ij}=2b_{ij},\qquad i,j=1,2,\cdots,n.$$

从而 $a_{ij}=b_{ij}$，故

$$A=B.$$

【 623 】证明：对称方阵只能与对称方阵合同.

证 设 A 与 B 合同，即存在满秩矩阵 C，使 $B=C'AC$. 如果 A 为对称方阵，则

$$B' = (C'AC)' = C'A'(C')' = C'AC = B.$$

即 B 也是对称方阵.

【624】设 A 与 B 为数域 F 上的 n 阶方阵.

1) 证明:若 A 与 B 合同,则 $r(A)=r(B)$. 反之,若 $r(A)=r(B)$,问:A 与 B 在 F 上是否合同?

2) 证明:二次型 $f=X'AX$ 经满秩线性代换后,秩不改变.

证 1) 若 A 与 B 合同,即存在满秩矩阵 C,使 $B=C'AC$. 由于任何方阵乘满秩矩阵不改变矩阵的秩,故 A 与 B 有相同的秩.

反之,若 $r(A)=r(B)$,则 A 与 B 在 F 上不一定合同. 例如,方阵

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

的秩相等,都是 2,但显然两者不合同,因 A 是对称的,B 是不对称的,而不对称方阵不能与对称方阵合同.

2) 对二次型 f 作一个满秩线性代换

$$X=QY \qquad (|Q|\neq 0)$$

后得二次型

$$f=Y'(Q'AQ)Y.$$

令 $B=Q'AQ$,故 A 与 B 合同,根据 1)有

$$r(A)=r(B),$$

即二次型 f 经满秩线性代换后,其秩不变.

【625】若 A 与 B 合同,即存在满秩矩阵 C,使 $B=C'AC$. 问:C 是否惟一?

解 不惟一，例如，$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$在复数域上合同，且有

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & i\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & i\end{pmatrix}.$$

【 626 】证明：E 与 $-E$ 在复数域上合同，但在实数域上不合同 .

证 取

$$C=\begin{pmatrix}i & & & 0\\ & i & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & i\end{pmatrix}$$

则有 $-E=C'EC$，即 E 与 $-E$ 在复数域上合同 .

又若存在实满秩矩阵 R，使

$$-E=R'ER=R'R,$$

这是不可能的：因为 $-E$ 的第一行第一列交叉位置上的元素为 -1，而 $R'R$ 的对应元素却为

$$r_{11}^2+r_{21}^2+\cdots+r_{n1}^2,$$

其中 $r_{11},r_{21},\cdots,r_{n1}$为 R 的第一列元素 . 由于 R 为实方阵，故 $r_{11}^2+\cdots+r_{n1}^2\neq-1$. 因此，$E$ 与 $-E$ 在实数域上不合同 .

【 627 】证明：实对角矩阵

$$A=\begin{pmatrix}a_1 & & & 0\\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n\end{pmatrix}$$

与单位方阵在实数域上合同的充分与必要条件是每个 $a_i>0$.

证 若 A 与 E 在实数域上合同,即存在实满秩矩阵

$$C=\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

使 $A=C'EC=C'C$, 由此可得

$$a_i=c_{1i}^2+c_{2i}^2+\cdots+c_{ni}^2>0,\quad i=1,\cdots,n.$$

反之,若每个 $a_i>0$, 则取

$$C=\begin{pmatrix} \sqrt{a_1} & & & 0 \\ & \sqrt{a_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \sqrt{a_n} \end{pmatrix},$$

便有 $A=C'C=C'EC$. 即 A 与 E 合同.

【628】设 A 为实 n 阶满秩矩阵. 证明:如果 A 与 $-A$ 在实数域上合同,则 n 必为偶数.

证 因为 A 与 $-A$ 在实数域上合同,故存在实满秩矩阵 C, 使

$$-A=C'AC.$$

两边取行列式,得

$$(-1)^n|A|=|-A|=|C'AC|=|A||C|^2.$$

由于 A、C 都是满秩的,故由上可得

$$|C|^2=(-1)^n>0,$$

从而 n 必为偶数.

【629】证明:若实方阵 A 与单位方阵在实数域上合同,则 $|A|>0$. 问:反之如何?