

量子力学 基础教程

陈鄂生

山东大学出版社
Shandong University Press

590

04131-43
C44

本书得到“山东大学出版基金委员会”资助

量子力学基础教程

陈鄂生

山东大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

量子力学基础教程/陈鄂生编著. — 济南: 山东大学出版社,
2002. 8

ISBN 7-5607-2475-2

I. 量... II. 陈... III. 量子力学 - 高等学校 - 教材
IV. 0413.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 055559 号

山东大学出版社出版发行

(山东省济南市山大南路 27 号 邮政编码:250100)

山东省新华书店经销

日照日报社印刷厂印刷

850×1168 毫米 1/32 12.25 印张 314 千字

2002 年 8 月第 1 版 2002 年 8 月第 1 次印刷

印数:1 - 3000 册

定价:20.00 元

目 录

第一章 量子力学产生的历史背景	(1)
§ 1.1 20 世纪初经典物理学遇到的困难	(1)
§ 1.2 普朗克原子振动能量假设	(8)
§ 1.3 爱因斯坦光量子概念	(9)
§ 1.4 玻尔原子结构理论	(11)
§ 1.5 德布洛意物质波假设	(13)
习题	(16)
第二章 波函数与薛定谔方程	(18)
§ 2.1 量子力学基本假定 1, 波函数及其意义	(18)
§ 2.2 自由粒子平面波函数	(21)
§ 2.3 量子力学基本假定 2, 薛定谔方程	(27)
§ 2.4 几率守恒与几率流密度矢量	(30)
§ 2.5 定态薛定谔方程	(33)
习题	(38)
第三章 一维定态问题	(40)
§ 3.1 一维束缚定态的性质	(40)
§ 3.2 一维方势阱	(43)
§ 3.3 一维谐振子	(51)
§ 3.4 势垒穿透	(59)
§ 3.5 δ 函数势	(64)
习题	(67)
第四章 力学量与算符	(73)
§ 4.1 线性算符, 对易关系与厄密算符	(73)
§ 4.2 厄密算符的性质	(78)
§ 4.3 量子力学基本假定 3, 力学量与算符	(92)
§ 4.4 量子力学中常用的力学量算符	(94)
§ 4.5 量子力学基本假定 4, 力学量平均值	(103)
§ 4.6 不确定关系	(106)

§ 4.7	力学量平均值随时间的变化,守恒量	(112)
§ 4.8	薛定谔绘景与海森伯绘景	(115)
§ 4.9	维里定理与 F—H 定理	(122)
习题		(128)
第五章	表象	(133)
§ 5.1	坐标表象与动量表象	(133)
§ 5.2	本征值为分立的力学量表象	(142)
§ 5.3	表象变换	(157)
§ 5.4	狄拉克符号	(163)
习题		(170)
第六章	三维定态问题	(175)
§ 6.1	简单的三维定态问题	(175)
§ 6.2	两体问题	(177)
§ 6.3	中心力场	(178)
§ 6.4	氢原子	(180)
§ 6.5	球方势阱	(188)
§ 6.6	带电粒子在电磁场中的运动	(192)
习题		(196)
第七章	近似方法	(202)
§ 7.1	定态非简并微扰方法	(202)
§ 7.2	定态简并微扰方法	(212)
§ 7.3	变分法	(224)
§ 7.4	与时间有关的微扰方法,跃迁几率	(228)
§ 7.5	常微扰,黄金规则	(232)
§ 7.6	周期微扰,共振吸收与共振发射	(237)
§ 7.7	原子的自发辐射	(248)
§ 7.8	能量时间不确定关系	(250)
习题		(255)
第八章	自旋	(263)
§ 8.1	电子的自旋	(263)
§ 8.2	泡利矩阵	(269)
§ 8.3	两个角动量的耦合	(273)

§ 8.4	两个 $s = \frac{1}{2}$ 粒子组成的体系自旋态	(280)
§ 8.5	原子光谱的精细结构	(290)
§ 8.6	塞曼效应	(294)
	习题	(297)
第九章	全同粒子体系	(305)
§ 9.1	全同粒子体系, 全同性原理	(305)
§ 9.2	氦原子	(315)
§ 9.3	费米气体模型	(320)
§ 9.4	粒子占有数表象	(325)
	习题	(336)
第十章	散射	(342)
§ 10.1	散射截面	(342)
§ 10.2	分波法, 低能中心力场散射	(346)
§ 10.3	高能散射, 玻恩近似	(359)
§ 10.4	质心系与实验室系	(363)
§ 10.5	自旋 $s = 1/2$ 的非全同粒子散射	(368)
§ 10.6	全同粒子散射	(371)
	习题	(378)

第一章 量子力学产生的历史背景

§ 1.1 20 世纪初经典物理学遇到的困难

物理学研究物质的运动规律. 物质分二类: 一类是有质量的物体, 它们遵守牛顿运动方程; 另一类是无质量的电磁波, 它们遵守麦克斯韦电磁方程. 以牛顿方程和麦克斯韦电磁方程为基础建立起来的经典物理学, 对处理这两类物质的问题, 一直是十分成功的. 然而在 1900 年前后, 由于科学技术的发展, 人们开始研究微观粒子体系的运动规律, 如原子的辐射, 光对原子的作用, 原子的内部结构等, 情况就变了. 经典物理学不再是锐利的武器, 它遇到了许多无法解决的困难. 这里介绍其中主要几个困难.

(1) 黑体辐射的能量密度

黑体是能够将照射在它表面上的电磁波全部吸收掉的物体. 经典物理学证明, 黑体在高温下辐射电磁波的性质同组成黑体的材料无关. 因此研究黑体的辐射规律是很有意义的. 然而自然界并不存在绝对的黑体. 一个十分接近理想的黑体可以由如图 1.1 所示的装置构成. 这是一个带有小孔

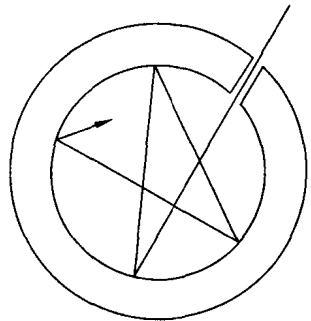


图 1.1

类似于火炉的空腔. 当一束光从外部由小孔射入空腔后, 光经过内壁材料的多次反射与吸收, 几乎全部被吸收, 而从小孔逸出的

部分光微乎其微,实际上完全可以忽略不计.因此在外界观察者看来,连接空腔的小孔是黑的,是十分接近理想的黑体.如果让空腔内部处于高温,如绝对温度 2000 度,则空腔内将充满由内壁材料辐射的电磁波.只要温度保持一定,空腔与电磁辐射一定会达到平衡:单位时间内内壁材料辐射的频率为 ν 的电磁波能量同吸收的相同频率的电磁波能量相等,空腔内单位体积中频率在 $\nu \sim \nu + d\nu$ 内的电磁波能量 $U(T, \nu)d\nu$ 保持一定. $U(T, \nu)$ 的物理意义是在绝对温度为 T 的空腔中,单位体积单位频率间隔内频率为 ν 的电磁波能量, $U(T, \nu)$ 称电磁波辐射能量密度.空腔在高温下由小孔源源不断辐射出电磁波,这就是黑体辐射.实验可以测量 $U(T, \nu)$. 实验测量的 $U(T, \nu)$ 如图 1.2 所示. $U(T, \nu)$ 有一个极大值,极大值的位置随 T 升高而向频率大的方向移动,极大值的数值随 T 升高而增大.1900 年普朗克 (Planck) 给出了一个同实验符合得非常好的 $U(T, \nu)$ 的经验公式:

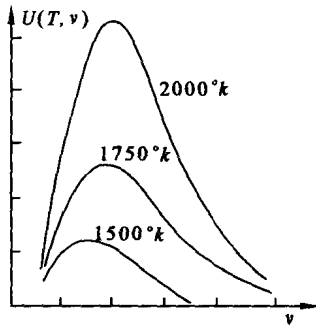


图 1.2

$$U(T, \nu) = \frac{a\nu^3}{e^{b\nu/T} - 1}, \quad (1)$$

其中 $a = 6.11 \times 10^{-57}$ 尔格·秒⁴/厘米³, $b = 4.87 \times 10^{-11}$ 秒·度. 这就是著名的普朗克公式.

经典物理学可以计算黑体辐射的能量密度 $U(T, \nu)$. 先利用经典电磁理论, 得到

$$U(T, \nu) = \frac{8\pi\nu^2 \bar{E}_\nu(T)}{c^3}, \quad (2)$$

其中 c 为光速, $\bar{E}_\nu(T)$ 是当空腔与辐射处于绝对温度为 T 的平衡态时, 腔壁原子以频率 ν 作一维振动的平均能量(公式(2)的推导

见本节末的例题)。根据经典统计物理学, 绝对温度为 T 时原子振动能量为 E 的相对几率为 $e^{-E/kT}$, 其中 k 为玻尔兹曼常数。因此原子振动的平均能量为

$$\bar{E}_v(T) = \frac{\int_0^{\infty} E e^{-E/kT} dE}{\int_0^{\infty} e^{-E/kT} dE} = kT. \quad (3)$$

将(3)式代入(2)式中, 得到

$$U(T, \nu) = \frac{8\pi k T \nu^2}{c^3}. \quad (4)$$

这就是瑞利 - 金斯公式, 它是 1900 年由瑞利(Rayleigh) 和金斯(Jeans) 导出的。这个公式在 ν 比较小的范围内同实验符合得比较好, 但在 ν 比较大的范围内同实验严重不符, 特别是当 $\nu \rightarrow \infty$ 时, $U(T, \nu) \rightarrow \infty$ 。这显然是错误的。瑞利和金斯严格按照经典物理学推导出的 $U(T, \nu)$, 具有如此严重的错误, 被认为是经典物理学遇到的一个灾难, 称为“紫外灾难”。

(2) 光电效应

光照射到金属表面上, 电子由金属表面逸出现象叫光电效应。实验观察到, 光电效应有以下三个特征:

① 对于一定的金属, 存在一个相应的临界频率 ν_0 , 只有当照射光的频率 $\nu \geq \nu_0$ 时, 才有光电子产生。当 $\nu < \nu_0$ 时, 无论照射光的强度有多大, 光电子都不能产生。

② 光电子的最大动能 T_{\max} 正比于照射光的频率, 同光的强度无关。图 1.3 给出了 $T_{\max} \sim \nu$ 的实验结果。

③ 在光照射金属的同时就有光电子产生。即使照射光的强度很弱, 也是如此。

根据经典物理学, 金属中的自由电子在照射光的电磁场作用下, 如果获得的能量足以克服金属表面对电子的束缚能(电子脱出

功)时,就有可能逸出金属表面,成为光电子.因此不应该有临界频率 ν_0 ,并且光电子的最大动能 T_{\max} 不应该同照射光的频率有关,只应该同光的强度有关.当照射光的强度很弱时,电子要获得大于脱出功的能量,必须等待一定时间.由此可见,经典物理学不能解释光电效应.

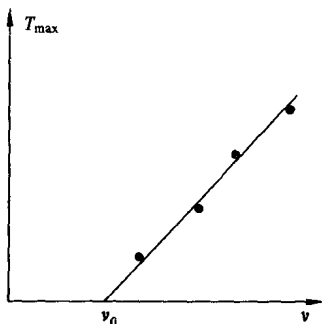


图 1.3

(3) 散射光的波长变大

波长 λ 一定的光在轻物质上散射的实验结果表明,在散射角为 θ 的方向上,散射光的波长 λ' 变大,并且 $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$ 同 θ 之间满足如下关系:

$$\Delta\lambda \sim \sin^2 \frac{\theta}{2}. \quad (5)$$

根据经典电磁理论,散射体系中的原子在入射光的作用下产生电偶极振动,振动的频率就是入射光的频率 ν .原子振动发光为散射光,散射光的频率同入射光的频率相同.经典物理学不能解释散射光波长的变化.

(4) 固体原子的比热

当固体温度升高一度时,平均每个原子增加的能量称作原子的比热 C .实验测量的固体原子比热 C 同绝对温度 T 之间的关系,如图 1.4 所示.当温度升高时, C 达到饱和值 $3k$, k 为波尔兹曼常数.当温度低时, C 随温度下降而下降.根据经典物理学,固体绝

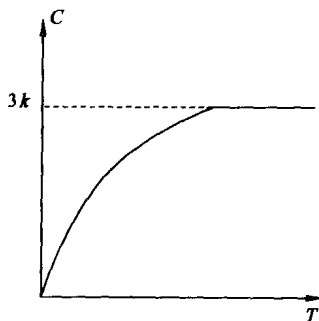


图 1.4

对温度为 T 时, 原子作一维振动的平均能量为(3) 式计算的 kT . 实际上原子作三维振动, 故原子平均能量为 $\bar{E} = 3kT$. 原子比热 $C = \frac{\partial \bar{E}}{\partial T} = 3k$. 这个结果只在温度高时正确. 经典物理学不能解释温度低时 C 随温度下降而下降的事实.

(5) 原子的稳定结构和线状光谱

20 世纪初, 人们已经了解到原子是由带负电的电子同带正电的原子核组成的电中性体系. 原子核位于原子中心, 只占据原子体积中很小部分, 却集中了原子质量的绝大部分. 经典物理学对原子的描述是, 电子在原子核库仑引力作用下绕原子核作类似于行星绕太阳旋转的轨道运动. 但是, 根据经典电动力学, 带电粒子作加速运动时要辐射电磁波. 电子围绕原子核的转动是加速运动, 电子要不断辐射电磁波而损失能量. 电子最终要因能量丢失尽而落入原子核中. 因此根据经典物理学, 原子不可能形成稳定的结构. 然而实验却表明原子有稳定的结构. 特别是原子光谱线的频率 ν 具有线状结构. 氢原子光谱线的频率 ν 满足如下经验公式:

$$\nu = R_H c \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad (6)$$

其中 $m < n$, $m = 1, 2, 3, \dots$, $n = 2, 3, 4, \dots$, $R_H = 1.09677576 \times 10^5 \text{ 厘米}^{-1}$, c 为光速. 经典物理学不能解释原子光谱的线状结构, 更不能解释巴耳末公式(6).

[例题] 在边长为 abc 的长方体形空腔中, 根据形成驻波的条件, 证明频率在 $\nu \sim \nu + d\nu$ 内的振动模式的数目

$$dN_\nu = \frac{8\pi V \nu^2 d\nu}{c^3}, \quad (7)$$

其中 $V = abc$ 是空腔的体积, 并由(7) 式导出黑体辐射的能量密度 $U(T, \nu)$.

解：设直角坐标系的 xyz 轴同长方体的 abc 边一致. 在空腔 xyz 方向形成驻波的条件是半波长的整数倍等于边长：

$$\frac{\lambda_x}{2} n_x = a, \quad \frac{\lambda_y}{2} n_y = b, \quad \frac{\lambda_z}{2} n_z = c, \quad (8)$$

$$n_x, n_y, n_z = 1, 2, 3, \dots$$

将(8)式代入下式,

$$k_x = \frac{2\pi}{\lambda_x}, \quad k_y = \frac{2\pi}{\lambda_y}, \quad k_z = \frac{2\pi}{\lambda_z}, \quad (9)$$

得驻波波矢量 \mathbf{k} 的三个分量：

$$k_x = \frac{\pi n_x}{a}, \quad k_y = \frac{\pi n_y}{b}, \quad k_z = \frac{\pi n_z}{c}. \quad (10)$$

用 $n_x n_y n_z$ 构成直角坐标系, 由坐标 $(n_x n_y n_z)$ (取正整数) 决定的点是位于第一象限边长为 1 的立方体晶格格点. 每一格点占有空间体积 $1 \times 1 \times 1 = 1$. $n_x n_y n_z$ 空间的体积等于其中格点的数目. 由 (10) 式看出, $n_x n_y n_z$ 空间中的每一个格点对应波矢量空间中的一个矢量 $\mathbf{k}(k_x, k_y, k_z)$.

考虑到黑体辐射的波长远小于空腔尺寸：

$$\lambda_x \ll a, \quad \lambda_y \ll b, \quad \lambda_z \ll c,$$

或

$$k_x \gg \frac{1}{a}, \quad k_y \gg \frac{1}{b}, \quad k_z \gg \frac{1}{c}.$$

由(10)式看出, 同 k_x, k_y, k_z 相应的 n_x, n_y, n_z 是远远大于 1 的正整数. 因此, n_x, n_y, n_z 的变化可以看成是连续的 (如 $10^5 \rightarrow 10^5 + 1$), 相应地, k_x, k_y, k_z 的变化也可以看成是连续的. 我们研究三个分量分别在

$$k_x \sim k_x + dk_x, \quad k_y \sim k_y + dk_y, \quad k_z \sim k_z + dk_z$$

的波矢量 \mathbf{k} 的数目 dN . 与上述波矢量对应的 n_x, n_y, n_z 分别在

$$n_x \sim n_x + dn_x, \quad n_y \sim n_y + dn_y, \quad n_z \sim n_z + dn_z,$$

其中

$$dn_x = \frac{a}{\pi} dk_x, \quad dn_y = \frac{b}{\pi} dk_y, \quad dn_z = \frac{c}{\pi} dk_z. \quad (11)$$

显然, $n_x n_y n_z$ 空间的体积 $dn_x dn_y dn_z$ 就是波矢量 \mathbf{k} 的数目 dN .

$$dN = dn_x dn_y dn_z = \frac{V}{\pi^3} dk_x dk_y dk_z, \quad (12)$$

其中 $V = abc$. (12) 式表示, 波矢量 \mathbf{k} 的数目 dN 正比于波矢量空间的体积元 $d^3 \mathbf{k}$. 显然, 波数在 $k \sim k + dk$ 的波矢量 \mathbf{k} 的数目

$$dN = \frac{1}{8} \times \frac{V}{\pi^3} k^2 dk \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{V k^2 dk}{2\pi^2}. \quad (13)$$

上式中的因子 $1/8$ 是由于 k_x, k_y 与 k_z 限于取正值而引入的. 将电磁波的波数 k 与频率 ν 的关系式

$$k = \frac{2\pi\nu}{c} \quad (14)$$

代入(13)式, 得到在体积为 V 的空腔中, 频率在 ν 到 $\nu + d\nu$ 的电磁波模式的数目

$$dN'_\nu = \frac{4\pi V \nu^2 d\nu}{c^3}. \quad (15)$$

考虑到电磁波为横波, 在与它传播方向垂直的平面内存在两种偏振态, 即存在两种偏振的电磁波. 因此 dN'_ν 乘 2 才是在体积为 V 的空腔中, 频率在 ν 到 $\nu + d\nu$ 的电磁波模式的数目

$$dN_\nu = \frac{8\pi V \nu^2 d\nu}{c^3}. \quad (16)$$

根据经典理论, 空腔中的电磁波由腔壁原子振动产生. 电磁波的模式取决于原子振动的模式. 当空腔处于绝对温度为 T 的辐射平衡态时, 频率在 ν 到 $\nu + d\nu$ 的电磁波能量等于在相同频率范围的原子振动模式的数目 dN_ν 乘以原子在绝对温度为 T 时以频率 ν 振动的平均能量 $\bar{E}_\nu(T)$:

$$dN_\nu \bar{E}_\nu(T) = \frac{8\pi V \nu^2 \bar{E}_\nu(T) d\nu}{c^3}. \quad (17)$$

上式除以 $Vd\nu$ 便得到黑体辐射的能量密度

$$U(T, \nu) = \frac{8\pi\nu^2 \bar{E}_\nu(T)}{c^3}. \quad (2)$$

§ 1.2 普朗克原子振动能量假设

普朗克在给出黑体辐射能量密度的经验公式之后, 就立即研究如何从理论上推导出这个同实验符合得非常好的公式. 他发现, 只要假定原子振动的能量不是按经典物理学所要求的那样在 0 和 ∞ 之间取连续值, 而是取如下分立值: $E = nh\nu$ ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$, ν 为振动频率, h 为常数), 普朗克公式就可以推导出来. 按照这个假定, § 1.1 的公式(3)中的积分应该改为如下的求和:

$$\bar{E}_\nu(T) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} nh\nu e^{-nh\nu/kT}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nh\nu/kT}}. \quad (1)$$

令 $\alpha = h\nu/kT$, 上式可表示为

$$\bar{E}_\nu(T) = -h\nu \frac{\partial}{\partial \alpha} [\ln \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha}]. \quad (2)$$

利用公式

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-e^{-\alpha}}, \quad (3)$$

便有

$$\bar{E}_\nu(T) = \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}. \quad (4)$$

将(4)式代入 § 1.1 的(2)式, 得

$$U(T, \nu) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/kT} - 1}. \quad (5)$$

比较 § 1.1 的(1)式与上式看出, 只要令

$$a = \frac{8\pi h}{c^3}, \quad b = \frac{h}{k}, \quad (6)$$

两式就完全相同. 由(6)式确定常数 $h = 6.55 \times 10^{-34}$ 焦耳·秒, $k = 1.35 \times 10^{-23}$ 焦耳/度. 普朗克确定的 k 值同当时测定的玻尔兹曼常数值相符合, 并且更接近目前测定的 k 值 (1.38066×10^{-23} 焦耳/度). h 称作普朗克常数. 目前测定的普朗克常数值为 $h = 6.62608 \times 10^{-34}$ 焦耳·秒.

1900年12月普朗克发表了上述研究结果. 由于他的假设违反了经典物理学, 他的工作在当时没有得到人们的支持. 然而他的假设是正确的. 他所做的工作具有划时代的意义. 正是他第一个揭示了微观粒子运动的特殊规律——能量不连续.

§ 1.3 爱因斯坦光量子概念

普朗克关于原子振动能量取分立值 $nh\nu$ 的假设, 同原子辐射与吸收频率为 ν 的电磁波的能量是以 $\epsilon = h\nu$ 为单位的假设等效. 1905年爱因斯坦(Einstein)支持并发展了普朗克的观点, 提出了光量子的概念: 频率为 ν 波长为 λ 的光是由能量 $E = h\nu$, 动量 $p = h/\lambda$ 的光量子组成的. 普朗克认为原子发射与吸收频率为 ν 的电磁波, 就是经典电磁理论所描述的那种波, 只是由于原子振动能量不连续, 导致了波的能量不连续, 光就是波, 不具有粒子性. 而爱因斯坦却认为光同时具有波动性和粒子性, 正是普朗克常数 h , 将代表波动性的频率 ν 和波长 λ 同代表粒子性的能量 E 和动量 p 联系起来. $E = h\nu$ 和 $p = h/\lambda$ 称为普朗克—爱因斯坦关系式.

根据光量子概念, 光电效应立即得到解释. 光照射金属时, 在金属中的电子获得的最大能量为光子的全部能量 $h\nu$. 显然, 只有当 $h\nu$ 大于电子在该金属的脱出功 A 时, 光电子才能产生. 因此存

在临界频率 $\nu_0 = A/h$ 光电子的最大动能

$$T_{\max} = h\nu - A. \quad (1)$$

这个公式同图 1.3 所示的实验结果一致. 实验给出的直线斜率 $\Delta T_{\max}/\Delta\nu = 6.56 \times 10^{-34}$ 焦耳·秒, 正是公式(1)所表示的直线斜率 h , 即普朗克常数. 只要照射光的频率 $\nu > \nu_0$, 光照射金属时, 总有一些电子被光子打出来, 光电子的产生不需要时间上的延迟.

光量子概念及普朗克—爱因斯坦关系式, 在康普顿散射实验中得到进一步完全的证实. 光在物质上的散射被认为是光子同原子中电子的作用. 对于 X 射线, 光子能量远远大于轻原子中外层电子的束缚能, 电子可以看作是静止的. 一个能量 $E_0 = h\nu_0$, 动量 $p_0 = \frac{h}{\lambda_0} \mathbf{k}$ (\mathbf{k} 为 z 轴单位矢量) 的光子同质量为 μ 的电子作用过程如图 1.5 所示. 光子在同电子碰撞后, 能量与动量分别变为 $E = h\nu$ 和 $\mathbf{p} = nh/\lambda$, \mathbf{n} 是 θ 方向上的单位矢量. 电子以动量 \mathbf{p}_e 反冲, 能量为

$$E_e = (\mu^2 c^4 + p_e^2 c^2)^{1/2}. \quad (2)$$

由动量守恒,

$$\mathbf{p}_e = \mathbf{p}_0 - \mathbf{p}, \quad (3)$$

得

$$p_e^2 = p_0^2 + p^2 - 2p_0 p \cos\theta. \quad (4)$$

由能量守恒,

$$E_0 + \mu c^2 = E + (\mu^2 c^4 + p_e^2 c^2)^{1/2}. \quad (5)$$

对于光子,

$$E_0 = h\nu_0 = p_0 c, \quad E = h\nu = pc. \quad (6)$$

将(6)式代入(5)式中, 得到

$$p_e^2 = (p_0 - p)^2 + 2\mu c(p_0 - p). \quad (7)$$

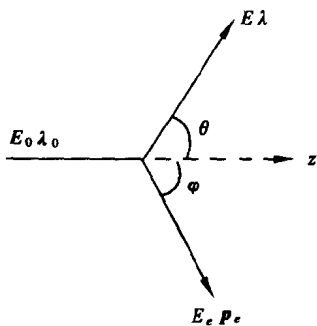


图 1.5

由(7)与(4)式得

$$\mu c(p_0 - p) = p_0 p(1 - \cos\theta) = 2p_0 p \sin^2 \frac{\theta}{2}. \quad (8)$$

上式两边乘以 $h/\mu c p_0 p$, 得

$$\frac{h}{p} - \frac{h}{p_0} = \frac{2h}{\mu c} \sin^2 \frac{\theta}{2},$$

即

$$\lambda - \lambda_0 = \frac{2h}{\mu c} \sin^2 \frac{\theta}{2}. \quad (9)$$

这个基于普朗克—爱因斯坦关系式的理论计算结果同实验完全符合. 散射光波长变大的效应得到了解释.

1907年爱因斯坦根据普朗克给出的公式 (§1.2 中的(4)式) 计算了固体中原子的比热 C . 考虑到固体中原子作三维运动, 绝对温度 T 时, 原子振动的平均能量为

$$\bar{E} = \frac{3h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}. \quad (10)$$

原子比热

$$C = \frac{\partial \bar{E}}{\partial T} = \frac{3h^2 \nu^2}{kT^2} \frac{e^{h\nu/kT}}{(e^{h\nu/kT} - 1)^2}. \quad (11)$$

由(11)式不难看出, 当 $kT \gg h\nu$ (即 $T \gg h\nu/k$) 时, $C \rightarrow 3k$; 而当 $kT \ll h\nu$ (即 $T \ll h\nu/k$) 时

$$C \rightarrow \frac{3h^2 \nu^2}{kT^2} e^{-h\nu/kT} \xrightarrow{T \rightarrow 0} 0. \quad (12)$$

爱因斯坦成功地解释了固体原子比热随温度下降而下降直至为零的现象.

§ 1.4 玻尔原子结构理论

1913年玻尔(Bohr)将普朗克与爱因斯坦的观点推广应用于