



21世纪复旦大学研究生教学用书

现代信号处理 理论和方法

汪源源 编著

復旦大學 出版社

www.fudanpress.com.cn

21 世纪复旦大学研究生教学用书

现代信号处理理论和方法

汪源源 编著

复旦大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

现代信号处理理论和方法/汪源源编著. —上海:复旦大学出版社, 2003.8
ISBN 7-309-03711-1

I. 现… II. 汪… III. 信号处理-研究生-教材
IV. TN911.7

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 058931 号

现代信号处理理论和方法

汪源源 编著

出版发行 复旦大学出版社

上海市国权路 579 号 邮编 200433

86-21-65118853(发行部) 86-21-65109143(邮购)

fupnet@fudanpress.com <http://www.fudanpress.com>

责任编辑 梁 玲

装帧设计 陈 萍

总 编 辑 高若海

出 品 人 贺圣遂

印 刷 崇明裕安印刷厂

开 本 787 × 1092 1/16

印 张 15

字 数 365 千

版 次 2003 年 8 月第一版 2003 年 8 月第一次印刷

印 数 1—3 100

书 号 ISBN 7-309-03711-1/T·276

定 价 22.00 元

如有印装质量问题, 请向复旦大学出版社发行部调换。

版权所有 侵权必究

编辑出版说明

21 世纪,随着科学技术的突飞猛进和知识经济的迅速发展,世界将发生深刻变化,国际间的竞争日趋激烈,高层次人才的教育正面临空前的发展机遇与巨大挑战。

研究生教育是教育结构中最高层次的教育、肩负着为国家现代化建设培养高素质、高层次创造性人才的重任,是我国增强综合国力、增强国际竞争力的重要支撑。为了提高研究生的培养质量和研究生教学的整体水平,必须加强研究生的教材建设,更新教学内容,把创新能力和创新精神的培养放到突出位置上,必须建立适应新的教学和科研要求的有复旦特色的研究生教学用书。“21 世纪复旦大学研究生教学用书”正是为适应这一新形势而编辑出版的。

“21 世纪复旦大学研究生教学用书”分文科、理科和医科三大类,主要出版硕士研究生学位基础课和学位专业课的教材,同时酌情出版一些使用面广、质量较高的选修课及博士研究生学位基础课教材。这些教材除可作为相关学科的研究生教学用书外,还可供有关学者和人员参考。

收入“21 世纪复旦大学研究生教学用书”的教材,大都是作者在编写成讲义后,经过多年教学实践、反复修改后才定稿的。这些作者大都治学严谨,教学实践经验丰富,教学效果也比较显著。由于我们对编辑工作尚缺乏经验,不足之处,敬请读者指正,以便我们在将来再版时加以更正和提高。

复旦大学研究生院

2002 年 6 月

前 言

《现代信号处理理论和方法》是复旦大学电路与系统专业和生物医学工程专业的硕士生学位基础课,至今已在电子工程系十多届硕士生中授课,并取得了良好的效果。由于课程内容本身随着信号处理理论和方法的发展而不断更新,一直没能形成统一的教材,给学生的学习带来一定的困难。经学校研究生院的批准,这门课被列入学校首批重点建设的研究生课程,因此作者便有机会将这门课的讲义总结成教材,以满足广大研究生的学习需要。

本教材的参考学习课时数为 54 学时。教材共分 10 章,主要内容包括:第一章为信号与系统的基本概念,这部分内容简单地阐述了本课程的一些基本概念和方法,包括信号的表征、常用的信号变换方法、系统的基本概念和数字滤波器的概念及设计方法。这些内容是学习本课程其他章节的基础,特别是对于那些本科期间未学过《信号与系统》和《数字信号处理》课程的学生,这一章是学习本课程的入门知识。因此,教师可以根据实际需要,择要讲授此章,或者作为学生的自学或复习内容;第二章的信号检测主要围绕假设检测,首先介绍单次观察时二元检测的各种判决准则,然后分析多次观察的二元检测问题,最后给出单次观察或多次观察时多元检测的方法;第三章的参数估计在介绍估计的基本概念后,分别阐述非线性估计中的贝叶斯估计和最大似然估计、线性估计中的线性最小均方误差估计、递归的线性最小均方误差估计和最小二乘估计;第四章先对信号维纳滤波中的维纳-霍夫方程进行推导,然后分别介绍非因果和因果的信号维纳滤波器的求解方法,并进一步讨论信号的维纳预测问题、后验维纳滤波问题和互补维纳滤波问题。在卡尔曼滤波问题中,先详细地推导标量形式的信号卡尔曼滤波器的实现方法,然后将得到的结论推广到矢量形式的信号卡尔曼滤波器的实现中;第五章的频谱估计在介绍经典的信号频谱估计方法及其改进措施后,对自相关法、Burg 算法和改进的协方差法等信号 AR 模型参数估计的几种方法进行阐述,并对最大熵估计、MA 模型估计和 ARMA 模型估计作出简单的介绍;第六章的自适应滤波介绍了自适应处理的基本概念后,先后阐述了 5 种自适应处理的方法:横向结构的随机梯度法、格形结构的随机梯度法、横向结构的最小二乘法、格形结构的最小二乘法和快速横向滤波器法,并讨论了自适应滤波器的一些应用功能。第七章的同态信号处理介绍同态系统的广义线性叠加原理后,对乘法同态系统和卷积同态系统进行分析,并给出卷积同态系统中复倒谱的定义及其计算方法;第八章为信号的时频分布,这一章先介绍信号时频表示的基本概念,并对短时傅里叶变换这种最简单的信号时频表示方法进行讨论,然后介绍信号二次型的 Cohen 族时频分布,其中着重介绍了形式相对简单的 Wigner-Ville 分布,最后给出信号时频分布的两种应用;第九章为多采样率的信号处理,在介绍信号整数倍抽取、整数倍内插和有理因子 M/L 的采样率转换方法后,给出信号采样率转换的网络结构,并结合信号的多采样率 FIR 系统介绍了时变线性系统的系统响应和双频系统函数,最后给出信号多采样率转换的多级实现方法;第十章的小波变换首先介绍信号连续小波变换的定义和性质,利用框架理论讨论连续小波变换的尺度和时移的离散问题,然后根据信号的多分辨率分析方法给出小波变换的 Mallat 算法,并对其中的滤波器组、尺度函数和小波函数进行较为深入的分析,最后本章还对小波包的基本概念和性质进行简单的介绍。

《现代信号处理理论和方法》的学习,不仅要求研究生能够扎实地掌握书上的基础理论和

基本方法,而且要求他们善于将学到的知识应用到实际的科研工作中去,这才是学习的根本目的。因此,学生除了学习书本知识外,还要阅读信号处理领域相关的参考文献,应用这些基础理论和基本方法去完成一些小课题,并努力将学到的知识和自己的科研工作结合起来。

编写此书的过程中,作者得到中国工程院院士、复旦大学电子工程系教授王威琪老师的关心与鼓励。复旦大学电子工程系的历届研究生在学习这门课的过程中,对本课程的建设也提出了许多宝贵的意见。梁玲博士担任了本书的编辑工作,范仁梅副编审对本书的出版给予了指导。作者在此向他们表示衷心的感谢。

由于现代信号处理的理论和方法正处于快速的发展之中,加之作者的水平有限,书中难免存在不少缺点,恳请广大专家、读者不吝批评指正。

汪源源

2002 年 8 月

目 录

第一章 信号与系统的基本概念	1
1.1 信号的基本概念	1
1.2 采样、量化和编码	2
1.2.1 采样	2
1.2.2 量化	3
1.2.3 编码	7
1.3 常用的信号变换方法	10
1.3.1 傅里叶级数	10
1.3.2 傅里叶变换	11
1.3.3 拉普拉斯变换	13
1.3.4 Z 变换	15
1.3.5 离散傅里叶变换	17
1.4 系统的基本概念	18
1.4.1 确定性信号通过线性系统	19
1.4.2 随机信号通过线性系统	19
1.5 数字滤波器及其设计方法	21
1.5.1 数字滤波器概述	21
1.5.2 数字滤波器的网络表示	22
1.5.3 数字滤波器的设计指标	24
1.5.4 模拟低通滤波器的设计方法	25
1.5.5 无限冲激响应数字滤波器的设计	27
1.5.6 有限冲激响应数字滤波器的设计	30
第二章 信号检测的基本概念	34
2.1 假设检测	34
2.2 检测准则	35
2.2.1 极大后验概率准则	35
2.2.2 最小错误概率准则	36
2.2.3 最小风险贝叶斯准则	38
2.2.4 极小极大准则	39
2.2.5 纽曼-皮尔逊准则	39
2.3 多次观察	40
2.4 多元检测	42
2.4.1 离散随机量的多元检测	42
2.4.2 连续随机量的多元检测	43

第三章 参数估计的基本理论	45
3.1 估计的基本概念	45
3.2 贝叶斯估计	49
3.3 最大似然估计	51
3.4 线性最小均方误差估计	53
3.5 递归的线性最小均方误差估计	55
3.6 最小二乘估计	57
第四章 维纳滤波和卡尔曼滤波	59
4.1 维纳滤波的基本概念	59
4.2 维纳滤波的求解	60
4.2.1 非因果的维纳滤波问题	61
4.2.2 因果的维纳滤波问题	62
4.3 预测问题	64
4.4 后验维纳滤波	65
4.5 互补维纳滤波	66
4.6 卡尔曼滤波的基本概念	67
4.7 标量卡尔曼滤波	67
4.8 矢量卡尔曼滤波	70
第五章 频谱估计理论	72
5.1 经典频谱估计	72
5.1.1 经典频谱估计的基本算法	72
5.1.2 经典频谱估计的改进	74
5.2 频谱估计的参数模型	77
5.3 AR 模型的频谱估计	78
5.3.1 AR 模型的 Yule-Walker 方程	78
5.3.2 AR 模型估计的自相关法	81
5.3.3 Burg 算法	83
5.3.4 改进的协方差法	86
5.3.5 AR 模型的阶次估计	87
5.4 最大熵估计	87
5.5 MA 和 ARMA 模型的频谱估计	89
5.5.1 MA 模型的频谱估计	89
5.5.2 ARMA 模型的频谱估计	91
第六章 自适应处理技术	92
6.1 自适应处理的基本概念	92
6.2 横向结构的随机梯度法	92
6.2.1 基本算法	93

6.2.2 算法性能	94
6.3 格形结构的随机梯度法	96
6.4 横向结构的最小二乘法	101
6.5 格形结构的最小二乘法	103
6.5.1 线性矢量空间	103
6.5.2 前后向预测误差滤波器	105
6.5.3 格形结构最小二乘法的算法	107
6.6 快速横向滤波器	110
6.6.1 横向滤波器	110
6.6.2 横向滤波算子的时间更新	112
6.6.3 快速横向滤波的自适应算法	113
6.7 自适应滤波器的功能	118
第七章 同态信号处理	121
7.1 广义线性的基本概念	121
7.2 乘积同态系统	123
7.2.1 实数乘积同态系统	123
7.2.2 复数乘积同态系统	124
7.3 卷积同态系统	125
7.4 复倒谱	127
7.4.1 复倒谱的基本概念	128
7.4.2 复倒谱的计算方法	129
第八章 信号的时频分布	133
8.1 时频表示的基本概念	133
8.2 短时傅里叶变换	134
8.3 时频分布	137
8.4 Wigner-Ville 分布	138
8.4.1 定义与性质	138
8.4.2 交叉项的抑制	140
8.4.3 离散 Wigner-Ville 分布的实现	141
8.4.4 基于 Wigner-Ville 分布的离散信号重构	143
8.5 Cohen 族时频分布	145
8.5.1 定义与性质	145
8.5.2 Cohen 族时频分布的几种类型	147
8.6 时频分布的应用	149
8.6.1 瞬时频率估计	149
8.6.2 时频域 Wiener 滤波	151

第九章 多采样率信号处理	153
9.1 整数倍抽取与整数倍内插	153
9.1.1 整数倍抽取	153
9.1.2 整数倍内插	156
9.2 有理因子 M/L 的采样率转换	159
9.2.1 用先内插后抽取的方法实现采样率转换	159
9.2.2 用时变 FIR 滤波器实现采样率转换	162
9.3 多采样率 FIR 系统的网络结构	164
9.3.1 多采样率 FIR 系统的直接实现	165
9.3.2 多采样率 FIR 系统的多相结构	169
9.3.3 多采样率时变系统的网络结构	175
9.4 线性时变和多采样率网络系统表示	176
9.4.1 系统响应和双频系统函数	176
9.4.2 抽取器和零值内插器的输入、输出映射	177
9.5 采样率转换器的多级实现	179
9.5.1 多级实现的原因	180
9.5.2 多级实现的设计方法	181
9.5.3 用多个二倍抽取(内插)器级联的实现方法	183
第十章 小波变换理论	193
10.1 连续小波变换	193
10.1.1 连续小波变换的定义与性质	193
10.1.2 几种常用的小波	196
10.2 尺度与时移离散化的小波变换	199
10.2.1 尺度与时移的离散化	199
10.2.2 小波框架理论	200
10.3 多分辨率分析	204
10.3.1 多分辨率分析的基本概念	205
10.3.2 尺度函数和小波函数	207
10.3.3 Mallat 算法	211
10.4 多分辨率分析中的滤波器组	215
10.4.1 多分辨率分析中滤波器组的条件	215
10.4.2 正交镜像滤波器组和共轭正交滤波器组	217
10.4.3 Daubechies 小波	218
10.4.4 从滤波器响应计算尺度函数	219
10.5 小波包与时频分析	222
10.5.1 小波包的基本概念	222
10.5.2 小波包的定义与性质	223
参考教材	226

第一章 信号与系统的基本概念

信号与系统的基本概念是深入学习《现代信号处理理论和方法》这门课的基础。作为入门知识,本章简单地介绍了信号与系统中的一些主要概念和方法,它们包括:信号的描述和分类、信号的数字化、常用的信号变换方法、信号通过系统的特性和数字滤波器的概念及设计方法。

1.1 信号的基本概念

信号通常是指电信号,即:随着时间而变化的电压或电流。信号的描述通常有两种基本方法:一是写出它的时域表达式,二是画出它的波形。这两种方法都是描述信号的直观方法,除此以外,还可以用频谱分析法或其他正交变换法来描述信号。

研究信号的理论和方法很多,涉及面也相当广。从大的方面来讲,可以分为两类:信号的分析 and 信号的综合。信号的分析主要研究信号的表示、变换和处理等。信号的综合则主要讨论满足给定条件下信号最佳形式的选择或设计。由于前者是后者的基础,因此信号处理理论和方法大多着重于前者的研究。

信号 $x(t)$ 的形式是多种多样的,按不同的角度信号可以有不同的分类方法:

1. 连续时间信号和离散时间信号

根据信号 $x(t)$ 的自变量 t 的取值特点,可以将信号分为连续时间信号和离散时间信号。对于任意时间 t (除若干个不连续点以外)都有信号值,这样的信号称为连续时间信号。如果仅在离散的时间点上有信号值,这样的信号称为离散时间信号。

2. 确定性信号和随机性信号

根据信号是否存在随机性的特点,可以将信号分为确定性信号和随机性信号。如果信号是时间的函数,而且它的所有参数都已经确定,即对于给定的某一时刻 t 都有确定的函数值,这样的信号被称为确定性信号。随机性信号是指信号的波形或参数具有随机性。所谓随机性,是指信号在某个时刻 t 的值在该时刻以前不可确定地预知,重复观察时也不一定重复出现。随机性信号不能用确切的时间函数来描述,只能从统计的角度,使用随机过程的概率分布函数与概率密度函数来描述信号的各种统计特性。

3. 模拟信号和数字信号

根据信号幅度取值的特点,可以将信号分为模拟信号和数字信号。在离散信号中,如果信号的幅度只能取某个量值的整数倍,这样的信号称为数字信号。反之,如果信号的幅度是连续取值的,该信号就属于模拟信号。对于连续时间信号,不管其幅度是按某个量值的整数倍取值,还是连续取值,均属于模拟信号。

4. 能量型信号和功率型信号

根据信号能量的特点,可以将信号分为能量型信号和功率型信号。能量型信号的持续时间可以是有限的,也可以是无限的,但是其能量总是一个有限的值。功率型信号的持续时间是无限的,其能量也是无限的,但是信号能量的时间平均值,即信号的功率却是有限的。

5. 周期性信号和非周期信号

根据信号的重复特点,可以将信号分为周期性信号和非周期信号。当周期性信号的周期为 T 时,信号具有如下特性:

$$x(t) = x(t + kT),$$

其中 k 为任意整数。

1.2 采样、量化和编码

模拟信号经过采样,可以形成一系列时间离散的采样值。将时间离散的采样值(模拟量)进行量化,可以得到幅度值也离散的数字信号。在实际应用中,为了便于信号的存贮和传输,常常需对数字信号进行编码。

1.2.1 采 样

采样定理在信号的分析与处理中占有重要的地位。如果对某个带宽有限(即信号存在有限的最大频率)的连续时间信号进行采样,当采样的频率达到一定数值时,根据这些离散时间的采样值能够准确重建原始的信号。

信号采样定理的具体描述为:设信号 $x(t)$ 的频带宽度有限,其最高频率记为 $f_{\max}$,对该信号用周期 $T \leq \frac{1}{2f_{\max}}$ 的脉冲序列进行采样,所得的离散信号 $x(nT)$ 可以惟一地确定原始信号 $x(t)$ 。也就是说,通过这些采样值可以完全无失真地恢复出原来的信号。

假设信号 $x(t)$ 的傅里叶变换为 $X(\omega)$ (即信号的频谱,其示意图如图 1.2.1(a) 所示,信号傅里叶变换的具体定义将在稍后的 1.3.2 中介绍),采样脉冲 $\delta_T(t)$ 是一个周期为 T 的冲激函数序列,即:

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT), \quad (1.2.1)$$

其中 $\delta(t)$ 是冲激函数,根据冲激函数的性质($t \neq 0$ 时, $\delta(t) = 0$),有

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t - T_1) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} x(T_1) \delta(t - T_1) dt = x(T_1), \\ x(t) \delta(t - T_1) &= x(T_1) \delta(t - T_1). \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

采样时,连续时间信号 $x(t)$ 与冲激函数序列 $\delta_T(t)$ 相乘,“取出”了冲激函数发生时刻的 $x(t)$ 的幅度,即:

$$x_T(t) = x(t) \delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \delta(t - nT),$$

此时所得的信号 $x_T(t)$ 为离散时间信号。这个过程称为连续时间信号的采样。

根据信号傅里叶变换的性质:两个信号的时间域乘积对应于这两个信号傅里叶变换在频率域的卷积,可以求出离散时间信号 $x_T(t)$ 的傅里叶变换为:

$$X_T(\omega) = \frac{1}{2\pi} [X(\omega) * \Delta_T(\omega)].$$

由于冲激函数序列的傅里叶变换仍为冲激函数序列,因此可以进一步得到采样后的离散时间信号的频谱为:

$$X_T(\omega) = \frac{1}{2\pi} \left[X(\omega) * \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right) \right] = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right) \quad (1.2.3)$$

除比例因子 $1/T$ 外,采样后信号的频谱 $X_T(\omega)$ 等于原来信号的频谱 $X(\omega)$ 在频率轴上以 $\omega_s = 2\pi/T$ 的周期重复。

当 $T \leq \frac{1}{2f_{\max}}$ 时,离散信号相邻的频谱之间没有重叠发生,如图 1.2.1(b) 所示,只要将该信号通过理想的低通滤波器 $H(\omega)$ (如图 1.2.1(c) 所示,截止频率为 $\omega_c = \omega_s/2 = \pi/T$) 后,就可以完全无失真地取出原来信号 $x(t)$ 的频谱,还原出原来的连续时间信号 $x(t)$ 。如果 $T > \frac{1}{2f_{\max}}$, 即 $f_{\max} > \frac{1}{2T}$, 离散信号相邻的两个频谱之间将出现重叠。这样,即使使用理想的低通滤波器,也不能完全无失真地取出原来信号的频谱,恢复出来的连续时间信号也是失真的。因此,对连续时间信号进行采样而且要求恢复出的信号不失真,则该信号必须是有限频带的,采样频率 $f_s = 1/T$ 应该大于或者等于信号最高频率 $f_{\max}$ 的 2 倍。其中满足采样定理的最小采样频率 $f_s = 2f_{\max}$ 称为信号的奈奎斯特频率。

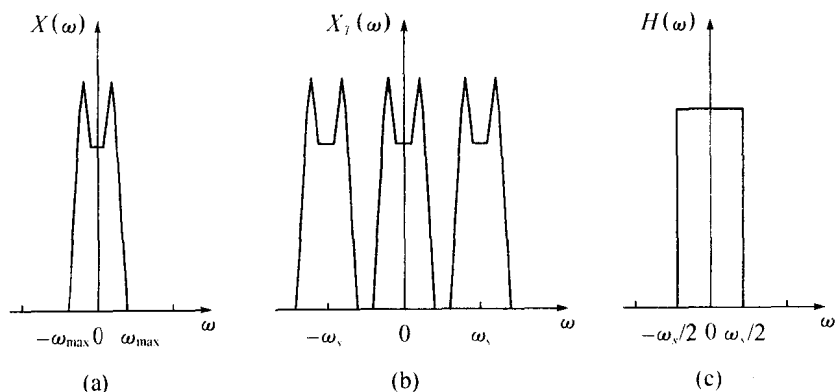


图 1.2.1 信号采样的示意图

(a) 连续时间信号的频谱 (b) 采样后离散时间信号的频谱
(c) 信号恢复时使用的理想低通滤波器

1.2.2 量 化

采样后的信号在时间上被离散化,而信号的幅度仍是连续取值的,因此该信号仍属于模拟信号。为将其转换成数字信号,还必须将连续的信号采样值离散化,即进行信号幅度的量化。所谓量化就是对信号的幅度进行“分级”或“分层”处理。

1. 均匀量化

把输入信号的幅度取值按相等间隔进行分层,并在各层的取值域中选定一个固定的值作为该层输出的量化值,这个过程称为信号的均匀量化。显然,均匀量化的间隔是一个常数,它的大小取决于输入信号的变化范围和量化电平数目(分层数)。

若输入信号的最小值为 a , 最大值为 b , 量化电平数为 N , 则均匀量化的间隔 ΔV 为:

$$\Delta V = \frac{b-a}{N} \quad (1.2.4)$$

如果设 x_i 和 x_{i-1} 为第 i 个量化间隔的上、下分界电平,对应的量化输出为 V_i , 则有

$$x_{i-1} \leq V_i \leq x_i$$

一般而言, V_i 的取法通常有三种:四舍五入法、舍去法和补足法。

四舍五入法就是将量化输出选在相邻分界电平的中点,也就是说,凡是信号的幅度在 $0 \sim \Delta V$ 的范围时,其量化值为 $0.5\Delta V$;信号的幅度在 $\Delta V \sim 2\Delta V$ 的范围时,其量化值为 $1.5\Delta V$ ……以此类推。在这种量化方式中,信号的量化误差不超过 0.5 个量化间隔,且量化误差有正有负。舍去法是将量化输出取为量化间隔的下分界电平,也就是说,凡 $0 \sim \Delta V$ 范围内的信号,量化输出为零; $\Delta V \sim 2\Delta V$ 范围内的信号,量化输出为 ΔV 等等。补足法与舍去法恰好相反,其量化输出等于量化间隔的上分界电平,也就是说,凡 $0 \sim \Delta V$ 范围内的信号,量化输出为 ΔV ; $\Delta V \sim 2\Delta V$ 范围内的信号,量化输出为 $2\Delta V$ 等等。舍去法与补足法的最大量化误差均可达一个量化间隔。只不过舍去法的量化误差总是正的,而补足法的量化误差总是负的。如果在量化时,采用的是舍去法,则电路可以比四舍五入法来得简单。而在恢复信号时,可对舍去法的输出补足半个量化间隔,则此时总的量化误差将与四舍五入法完全一致。

通常将输入信号 x 和它的量化值 y 的关系曲线称为量化特性曲线。上述三种方法的均匀量化特性曲线如图 1.2.2 所示。

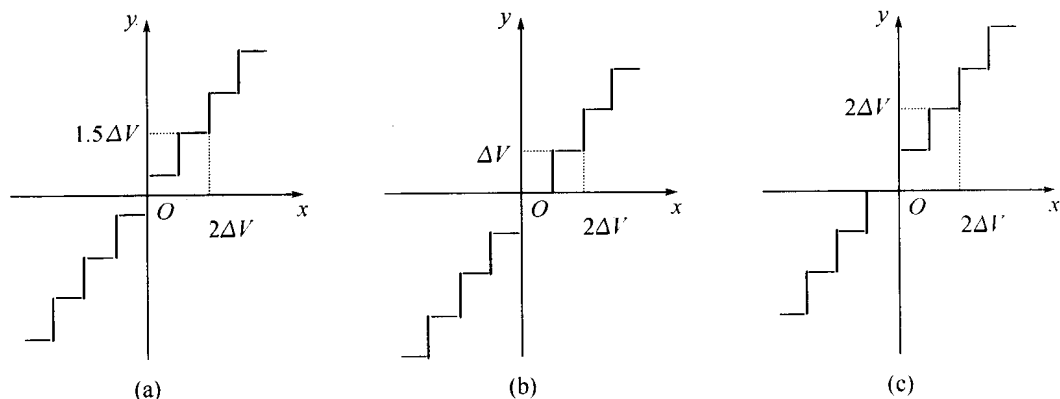


图 1.2.2 均匀量化曲线
(a) 四舍五入法 (b) 舍去法 (c) 补足法

量化过程会在最后重现的信号中引入误差,这个误差是不能恢复的。量化的影响像是在系统中引入了附加的噪声,可以用量化噪声来表征。

2. 量化噪声

信号的量化实际上是以阶梯形的信号来近似表示原来的信号。若原来的信号为 $x(t)$,量化后阶梯形信号为 $x_q(t)$,则两者的误差信号为:

$$e(t) = x(t) - x_q(t)。$$

采样后实际离散时间的误差信号为:

$$e(nT) = x(nT) - x_q(nT)。$$

四舍五入法中, $e(nT)$ 的幅度不会超过 $0.5\Delta V$ 。量化引入的误差相当于噪声的作用,称为量化噪声。

设输入的双极性信号被量化为 N 级,量化间隔为 ΔV ,则可将均匀量化的电压限制在 $-N\Delta V/2 \sim +N\Delta V/2$ 的范围内。如果输入信号幅度超出该范围,就可认为量化器已经过载,一般将 $\pm N\Delta V/2$ 称为过载电平。从这个意义上说,量化噪声可分为一般量化噪声和过载量化噪

声。由于过载量化噪声是因信号电平过载而产生的,因此只要在使用中适当地控制输入电平的范 围,就可以避免过载情况的出现。下面只讨论一般量化噪声的情况。

设信号取值在第 i 个量化级,即 $x_{i-1} \leq x \leq x_i$ 时,可将其量化为 V_i 值,其量化噪声是

$$e_i = x - V_i,$$

(这里将把表示时间因子的 nT 略去不写)。若设信号幅度的概率密度函数为 $p(x)$,则第 i 个量化级的量化噪声的平均功率为:

$$N_{qi} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} e_i^2 p(x) dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - V_i)^2 p(x) dx. \quad (1.2.5)$$

在实际量化时,为保证该信号量化后的失真很小,通常使量化级 $N \gg 1$,间隔 ΔV 足够小。由此可以认为:在同一量化级中, $p(x)$ 可以近似为常数 $p(V_i)$,于是

$$N_{qi} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - V_i)^2 p(V_i) dx = \frac{1}{3} p(V_i) [(x_i - V_i)^3 + (V_i - x_{i-1})^3]. \quad (1.2.6)$$

(1.2.6)式表明:第 i 个量化噪声的平均功率与量化电平 V_i 有关。由 $dN_{qi}/dV_i = 0$ 得出:当 $V_i = (x_{i-1} + x_i)/2$ 时, N_{qi} 最小。由于有 $\Delta V = x_i - x_{i-1}$,于是

$$N_{qi} = \frac{1}{12} p(V_i) [\Delta V]^3. \quad (1.2.7)$$

而 $p(V_i) \Delta V = P_i$ 是信号落在第 i 个量化级的概率,则(1.2.7)式又可以写成:

$$N_{qi} = \frac{1}{12} [\Delta V]^2 P_i. \quad (1.2.8)$$

由于总的量化噪声功率 N_q 是各量化级的量化噪声功率之和,所以

$$N_q = \sum_i N_{qi} = \frac{1}{12} [\Delta V]^2 \sum_i P_i = \frac{1}{12} [\Delta V]^2. \quad (1.2.9)$$

由(1.2.9)式可见:当采用均匀量化的方式时,只要量化级 N 足够大,量化噪声的功率仅与量化间隔 ΔV 有关,而与信号幅度的概率分布无关。

当信号不是均匀量化时,有 $\Delta V_i = x_i - x_{i-1}$,信号落在第 i 个量化级的概率近似等于

$$P_i = p(V_i) \Delta V_i;$$

则其量化噪声功率为:

$$N_q = \frac{1}{12} E [(\Delta V_i)^2]. \quad (1.2.10)$$

下面讨论量化的信噪比。信号的功率与信号的幅度分布有关。对于信号幅度在 $\pm N\Delta V/2$ 内均匀分布的情况,其功率为:

$$S_q = \sum_{i=-N/2+1}^{N/2} V_i^2 P_i = \sum_{i=-N/2+1}^{N/2} \left\{ \frac{1}{2} [i\Delta V + (i-1)\Delta V] \right\}^2 \frac{1}{N} = \frac{[\Delta V]^2}{12} (N^2 - 1) \approx \frac{N^2}{12} [\Delta V]^2. \quad (1.2.11)$$

所以,此信号的信噪比为:

$$S_q/N_q = N^2. \quad (1.2.12)$$

若取量化级 $N = 2^m$ 为 2 的幂次,即用 m 个二进制码(m 个 bit)表示一个采样值,则以 dB 为单位的信噪比为:

$$SNR = 10 \lg N^2 = 20 m \lg 2 \approx 6 m \text{ (dB)}. \quad (1.2.13)$$

(1.2.13)式表明:每增加一个 bit(即量化的分层数增加一倍),可以增加 6 dB 的量化信噪比。

对于高斯分布的输入随机信号,幅度大于 4σ 的概率已经很小了,通常可以认为:在量化

之前,信号的均方根值是量化过载电平 $N\Delta V/2$ 的 $1/4$,即:

$$\sigma = N\Delta V/8。$$

分析表明:对于量化级 $N > 16$ 的情况,高斯分布信号所重现的信号的平均功率也近似为 σ^2 。因此输出量化信噪比为:

$$\frac{S_q}{N_q} = \frac{N^2[\Delta V]^2/64}{[\Delta V]^2/12} = \frac{3}{16}N^2。 \quad (1.2.14)$$

对于量化级 $N = 2^m$ 时,以 dB 为单位计算的量化信噪比为:

$$SNR \approx 6m - 7.3(\text{dB})。 \quad (1.2.15)$$

其他概率分布的量化信噪比也有与(1.2.13)式、(1.2.15)式相类似的关系式。一般而言,信噪比 S_q/N_q 均与 N^2 成正比,即分层数每增加一倍,量化信噪比都将提高 6 dB。

3. 非均匀量化

对信号的量化,通常要求具有一定的量化信噪比。把满足一定量化信噪比条件下,所容许的信号最大幅度和最小幅度两者之比称为输入信号的动态范围。在均匀量化中,为了增加输入信号的动态范围,同时保证小信号时也有足够的量化信噪比,就要大大地增加量化级数,即增加编码的位数。例如对于语音信号,从轻声细语到狂吼怒叫,其语音的强度变化达到 40 dB 以上,为了要听清楚轻声细语,至少要有超过 20 dB 的信噪比,所以就需要量化器有 60 ~ 70 dB 的输入范围。如果采用 4096 个量化级(相当于 70 dB 的输入变化),每个采样值要进行 12 位的二进制编码。这样就增加了系统的复杂性,而且大信号时量化的信噪比又显得太大。所以需要在在大信号时,将量化间隔取得大一点;而在小信号时,将量化间隔取得小一些。这样就可以保证在量化级数(即编码位数)不变的条件下,提高小信号的量化信噪比,扩大输入信号的动态范围。这就是信号非均匀量化的基本概念。

从原理上讲,任何一种非均匀量化特性都可以由压缩器、均匀量化器组成。信号恢复时则采用扩张器。压缩器的特点是对小信号有较大的放大倍数,而对大信号有较小的放大倍数。压缩过程可以在采样、量化前进行,使用的压缩器通常称为模拟压缩器;也可以在均匀量化后进行,使用的压缩器通常称为数字压缩器。扩张器具有和压缩器相反的功能。

由于先对输入信号进行压缩,然后再进行均匀量化,这就等效于不等间距的量化。非线性压缩特性表明了输入信号幅度和输出信号幅度的非线性关系,可以把它记为:

$$y = f(x),$$

其中输入信号幅度 x 与输出信号幅度 y 都已经在 $(-1, 1)$ 区间内归一化。若假设 y 在 $(-1, 1)$ 区间内被均匀量化为 N 级,每级的间隔为 $2/N$,相当于 x 为不均匀的 N 个量化间隔。将 x 的第 i 个量化间隔的中点坐标记为 x_i 。当 $N \gg 1$ 时,可以近似认为第 i 个量化间隔所截的压缩特性曲线为一直线(折线化),其斜率为:

$$f'(x_i) = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_i}, \quad (1.2.16)$$

于是输入信号的第 i 个量化间隔为:

$$\Delta x_i = \frac{2/N}{f'(x_i)} = \frac{2}{Nf'(x_i)}。 \quad (1.2.17)$$

将(1.2.17)式代入(1.2.10)式,并假定输入信号的幅度分布是对称的,即:

$$p(-x) = p(x),$$

可以得到非均匀量化的归一化量化噪声功率

$$N_q = 2 \sum_{i=1}^{N/2} p(x_i) \frac{1}{12} \left[\frac{2}{Nf'(x_i)} \right]^2。$$

当量化级 $N \gg 1$ 时,可用相当的积分来近似上式的求和,得到:

$$N_q = \frac{2}{3N^2} \int_0^1 \frac{p(x_i)}{[f'(x_i)]^2} dx。 \quad (1.2.18)$$

从(1.2.18)式可以看到,在量化级数和信号幅度概率密度函数 $p(x)$ 一定的情况下,量化噪声功率的大小由压缩特性曲线的斜率决定。由于均匀量化和非均匀量化第 i 个量化间隔的比值为:

$$\frac{2/N}{2/[Nf'(x_i)]} = f'(x_i)。$$

因此在非均匀量化时,对 $f'(x_i) > 1$ 的区域(可设计在小信号范围),信号的量化间距相比均匀量化时缩小,量化噪声功率减少,量化信噪比得到改善。对 $f'(x_i) < 1$ 的区域(可设计在大信号范围),信号的量化间隔比均匀量化时增大,量化噪声功率增加,量化信噪比下降。可见,具有压缩特性的非均匀量化,实际上是以大信号时的信噪比下降为代价来换取小信号时信噪比的提高,从而扩大输入信号的动态范围。由于在大信号时,信噪比已经足够高,即使非均匀量化会带来信噪比的损失,但这往往是可以忍受的。

目前用得最广泛的 μ 律(北美等地使用)和 A 律(西欧等地使用)都具有近似对数的压缩特性。

其中 μ 律压缩特性定义为:

$$y = \frac{\ln(1 + \mu|x|)}{\ln(1 + \mu)} \text{Sgn}(x), \quad (1.2.19)$$

其中 $\text{Sgn}(\cdot)$ 为符号函数, y 为归一化的压缩输出幅度, x 为归一化的压缩输入幅度, μ 为压缩参数,表示压缩程度,目前常用的为 $\mu = 255$ 。

A 律的压缩特性定义为:

$$y = \begin{cases} \frac{A|x|}{1 + \ln A} \text{Sgn}(x) & 0 \leq |x| \leq \frac{1}{A} \\ \frac{1 + A|x|}{1 + \ln A} \text{Sgn}(x) & \frac{1}{A} \leq |x| \leq 1 \end{cases}, \quad (1.2.20)$$

其中 A 为压缩参数, $A > 1$, 而且 A 越大,小信号的压缩效果越好。目前常用的为 $A = 87.6$ 。

1.2.3 编 码

在通信技术中,经常把数字信号编码成所希望的等效代码形式,然后再进行存贮或传输。编码的形式通常有时间域编码和频率域编码两类,其中脉冲编码调制(PCM,简称脉码调制)属于时间域编码形式,是二进制码数字系统中最常用的一种形式。

1. 线性 PCM 编码

所谓编码就是用一组二进制码元或多进制码元来表示采样量化电平的大小。在数字通信中,最常用的是二进制码。 n 位二进制码元有 $M = 2^n$ 种不同的组合,其中任何一种组合就能成为一个码字,如果用不同的码字来表示不同的电平,则 n 位二进制码元可以表示 2^n 个不同的电平。在这 2^n 个码字与 2^n 个电平的对应过程中,可以遵循不同的规律、编出有不同特点的码组。下面只介绍两种最简单的二进制码:自然二进制码和折叠二进制码。表 1.2.1 给出了字长为 4 的这两种码的各个码字与 16 个电平的对应关系。