清华大学考研辅导班指定教材

刘坤林 莫 骄 章纪民 编著

高等数学典型题题典

——考研数学应试能力进阶

NEUPRESS
东北大学出版社

高等数学典型题题典

——考研数学应试能力进阶

刘坤林　莫骄　章纪民　编著

东北大学出版社

·沈阳·

图书在版编目（CIP）数据

高等数学典型题题典——考研数学应试能力进阶 / 刘坤林，莫骄，章纪民编著 .— 沈阳 ：东北大学出版社，2003.7
ISBN 7-81054-842-5

Ⅰ.高…　Ⅱ.①刘… ②莫… ③章…　Ⅲ.高等数学—研究生—入学考试—习题　Ⅳ.O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 041909 号

出 版 者：东北大学出版社
地址：沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号
邮编：110004
电话：024—83687331（市场部）　83680267（社务室）
传真：024—83680180（市场部）　83680265（社务室）
E-mail：neuph @ neupress.com
http：// www.neupress.com
印 刷 者：沈阳市第二市政建设工程公司印刷厂
发 行 者：东北大学出版社
幅面尺寸：140mm×203mm
印　　张：18.625
字　　数：466 千字
印　　数：1～6000 册
出版时间：2003 年 7 月第 1 版
印刷时间：2003 年 7 月第 1 次印刷
责任编辑：郭爱民　高　媛　责任校对：米　戎
封面设计：唐敏智　　　　　责任出版：杨华宁

定　　价：25.80 元

前　言

当前，科学技术飞速发展，社会对从业人员的素质要求也越来越高。为了在将来的竞争中立于不败之地，不断地充实个人的知识、提高个人的能力是现代年轻人的共同需要，接受研究生教育无疑是达到这一目的的最佳途径。近几年来，研究生报考人数的增长速度每年都超过30%，2003年的总人数已达到了80万，预计2004年将超过100万人。研究生入学考试的难度和竞争的激烈程度早已超过了被社会上更关注的高考，成为国家升学考试中难度最大、竞争最为激烈的一种考试，相信在不久的将来也会成为社会上最为关注的一种考试。

作者多年从事高等数学的教学与研究工作，也多次参加全国硕士研究生入学考试的阅卷工作，深知考生的需要，并对国家考试大纲有深入的了解与研究。编写本书的目的，就是为了帮助考生克服困难，提高考生的应试能力。

一般说来，准备研究生的入学考试要经过三个阶段。第一是课程内容的基础复习阶段，主要是复习本课程学过的内容，无须过分地强调复习内容与考试大纲的关系，因为这一复习阶段的作用主要是找感觉、打基

础。第二是对考试内容的强化复习阶段，也是应试复习是否成功的关键，主要是弄清考什么、怎么考的问题。教育部每年制订的数学考试大纲很好地回答了考什么的问题，但怎么考的问题是考生更为关注的，本书的主要目的即是为考生解决这些问题。第三是试题的强化练习阶段，主要是掌握试卷的结构、熟悉试题的形式与难度、了解各题的赋分与各部分内容所占的比例等，这一阶段在整个复习过程中会起到锦上添花的作用。

为了帮助考生了解考什么和解决怎么考以及强化训练的问题，本书精心设计和编排了下面四部分内容。

考试内容及考试要求 给出了教育部制订的《2004年全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》的考试内容和对每一部分内容的考试要求，可以帮助考生了解要考的内容，掌握好复习的范围。

知识点指要精讲 在考生了解了课程内容的基础上，进一步强调考试的具体内容和各部分内容的联系，为考生强化复习考试内容提供了依据。本部分内容的安排并不是照搬考试大纲，也不仅仅是对考试大纲的细化，内容的选取和安排融入了作者对多年考题分析和研究的体会，对**常考知识点**作了重点介绍。为便于考生了解常考知识点，本部分的最后以列表的形式给出了近几年试题中考查的知识点及其赋分情况，希望此表能给大

家一目了然的感觉。

典型题透析精解 分门别类地将考试内容与考试要求融入到不同的题型中。这些题目（共计 511 题）完全是按照考题的形式组织的，不同的题目体现了对所考知识点的不同要求，题目的类型囊括了过去试题中出现的所有类型。收入本书的选题包括三部分：

(1) 作者长期在清华大学（刘坤林，章纪民）与北京邮电大学（莫骄）教学研究与实践中积累题目的精选；

(2) 基于作者多年对国家考题分析和研究的体会，精选典型考题进行整编。

(3) 清华大学考研辅导班的数学教学用题与模拟试题精选。

书中对常考知识点作了重点介绍与分析。为便于考生掌握，作者精心设计了试题类型的分类，对题目作了详尽的分析，给出了解题思路、考点提示、求解过程，并指出常见错误类型等。编写这部分内容的目的是要让考生了解试题、熟悉试卷、掌握方法，希望通过这一部分内容的学习，让大家在未来的考场上见到试题时，会有一种熟悉和亲切的感觉。

模拟题自检精测 一方面可以使考生检验自己复习的效果，另一方面也可以从不同的侧面进一步加深对考

试内容与考试要求的理解。这部分题目（共计 525 题）涉及的知识点与解题方法在“典型题透析精解”部分都有介绍，并且后面还附有每个题目的答案或提示。希望考生朋友练习时首先要独立思考：只有在花了很长时间演算还没有结果时再去翻看后面的答案与提示，才会蓦然醒悟，在记忆中打下深刻的烙印；否则，本部分将起不到预想的作用。

至于本书的读者对象，则**不只限于应试数学试卷一、二的考生，应该说是面向全体硕士研究生入学考试的考生**（MPA 与 MBA 除外）。**不少人认为，经济学类考生学了经济类高等数学就够了。其实这是误导！试卷三、四历年的题目表明，除个别题目有一点经济术语之外，绝大部分题目的题型与试卷一相当，而数学上的难度也并不亚于试卷一。**一个考生，如果有较良好的理工科数学基础，应答试卷三、四一般不会遇到任何困难，其成绩也定会超过学经济数学的考生。只要有良好的理工科数学基础，那些少量经济术语不会成为答卷的障碍。事实上，少量涉及一些经济术语的题目，不过是一般理工科数学教学中的例题而已。**若只具有经济类高等数学的基础，则距离考研要求将相差甚远，一般达不到应有的应试水平。数学试卷一、二、三、四共用试题也是常有之事。**

此外，**本书对于在读大学生的学习亦有重要的指导作用。**

尽管作者自认为了解考生的需要，也熟悉研究生入学考试的最新要求，并具有丰富的教学与辅导经验，但将这些东西变成文字后是否能够达到预期的效果，还有待于接受读者的检验。希望读者多提意见和建议，以便作者进一步的修改和完善。

在编写本书的过程中，作者翻阅了大量的有关材料，如《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》等，在此作者向有关的人员和单位一并致谢。作者还要感谢东北大学出版社的有关人员，感谢他们为出版本书所做的一切。

最后祝考生们考试成功！

编著者

2003年7月7日

于清华大学

清华大学考研辅导班

地址：清华大学理科楼1101室

电话：010—62781785

网址：http：//math．tsinghua．edu．cn

目　录

第 1 章　函数、极限、连续

1.1　考试内容·考试要求

考试内容

函数的概念及表示法　函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性　复合函数、反函数、分段函数和隐函数　基本初等函数的性质及其图形　初等函数　简单应用问题的函数关系的建立　数列极限与函数极限的定义及其性质　函数的左极限与右极限　无穷小和无穷大的概念及其关系　无穷小的性质及无穷小的比较　极限的四则运算　极限存在的两个准则：单调有界准则和夹逼准则　两个重要极限：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\qquad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$$

函数连续的概念　函数间断点的类型　初等函数的连续性　闭区间上连续函数的性质

考试要求

1. 理解函数的概念，掌握函数的表示法，并会建立简单应用问题中的函数关系式．
2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性．
3. 理解复合函数及分段函数的概念，了解反函数及隐函数的概念．
4. 掌握基本初等函数的性质及其图形．

5. 理解极限的概念，理解函数左极限与右极限的概念，以及函数极限存在与左、右极限之间的关系．
6. 掌握极限的性质及四则运算法则．
7. 掌握极限存在的两个准则，并会利用它们求极限，掌握利用两个重要极限求极限的方法．
8. 理解无穷小、无穷大的概念，掌握无穷小的比较方法，会用等价无穷小求极限．
9. 理解函数连续性的概念(含左连续与右连续)，会判别函数间断点的类型．
10. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性，理解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理)，并会应用这些性质．

1.2 知识点指要精讲

1.2.1 基本不等式

作为数学知识的重要基础和常用工具，读者应掌握以下几类基本不等式及其应用中的变形技巧．

(1) 绝对值不等式

对任意实数 x，均成立不等式

$$0\leqslant|x|+x\leqslant 2|x|. \tag{1.1}$$

其中$|x|\geqslant 0$，并且

$$|x|=\begin{cases} x & x\geqslant 0; \\ -x & x<0. \end{cases} \tag{1.2}$$

(2) 三角不等式(三点不等式)

对任意实数 x 与 y，均成立不等式

$$|x+y|\leqslant|x|+|y|, \tag{1.3}$$

$$|x-y|\geqslant||x|-|y||. \tag{1.4}$$

注 上述的 x, y 可以扩展为向量空间 R^n 上的向量，这时应把绝对值号 $|\cdot|$ 易为 $\|\cdot\|$，而 $\|\cdot\|$ 称为向量的范数．又若 $|x|$ 与 $|y|$ 有大小比较关系时，不等式(1.4)右端外层绝对值号可以脱掉．

(3) 平均值不等式

对任意实数 x, y, 均成立不等式

$$\frac{1}{2}(x^2+y^2)\geqslant xy.$$

当 $x>0$ 且 $y>0$ 时，又有

$$\frac{1}{2}(x+y)\geqslant\sqrt{xy}. \tag{1.5}$$

不等式(1.5)称为平均值不等式，其左端为实数(大于零) x 与 y 的算术平均值，而右端称为它们的几何平均值．式(1.5)的推广形式为

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\geqslant\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^{\frac{1}{n}} \tag{1.6}$$

其中 $x_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 为正数．

(4) 两个重要的不等式

① 对任意实数 $x\in\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$，成立不等式

$$\sin x\leqslant x\leqslant\tan x. \tag{1.7}$$

其中等号仅在 $x=0$ 时成立．

② 对满足 $m>n>0$ 的任意实数及正数 k，均成立不等式

$$\frac{n}{m}\leqslant\frac{n+k}{m+k}. \tag{1.8}$$

1.2.2 实数点集与公理

本小节介绍的内容中，除邻域与上下界概念以外的其余部

分，仅供读者了解，作为对极限概念加强理解的一些辅助性工具和基础，不作为基本要求．

(1) 邻域

设 $x_0 \in \mathbf{R}$，称点集

$$N(x_0, \delta)=\{x \mid |x-x_0|<\delta\}$$

为 x_0 的 δ 邻域(一维)，而称点集

$$N^*(x_0, \delta)=\{x \mid 0<|x-x_0|<\delta\}$$

为 x_0 的去心邻域(一维)．

对多维情况，例如平面，三维空间或 n 维空间 $\mathbf{R}^n$，规定 $x_0 \in \mathbf{R}^n$ 的邻域与去心邻域分别为

$$N(x_0, \delta)=\{x \mid \rho(x, x_0)<\delta\},$$

$$N^*(x_0, \delta)=\{x \mid 0<\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0)<\delta\},$$

其中 $\rho(x, x_0) \triangleq \left(\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-x_0)^2\right)^{\frac{1}{2}}$ 称为 $x \in \mathbf{R}^n$ 与 $x_0 \in \mathbf{R}^n$ 之间的距离，$\rho(x, x_0)$满足：

① $\rho(x, x_0) \geqslant 0$，当且仅当 $x=x_0$ 时 $\rho(x, x_0)=0$；

② $\rho(x_0, x)=\rho(x, x_0)$；

③ 对任意 $x, y, z \in \mathbf{R}^n$ 成立不等式

$$\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z)+\rho(y, z),$$

这里 x, y, z 表示向量 $\mathbf{R}^n$ 上的点，x_i, y_i, z_i 分别为它们的分量．

(2) 点集

下面就一维情况，介绍点集的几个概念与名词．所以概念均可推广到多维空间情况．

① 内点：设 x_0 为点集 E 的一个点，若存在 $N(x_0, \delta) \subset E$，则称 x_0 为 E 的一个内点．

② 聚点：设 x_0 为一个点(可以属于 E，也可不属于 E)，若

x_0 的任何去心邻域 $N^*(x_0, \delta)$ 内都至少有一个点 $x \in E$，则称 x_0 为 E 的一个聚点．

例如，取 $E=\{x \mid x \in (0, 1)\}$，则 $x_0=0.1$ 或 0.001 都是 E 的内点；

取 $E_1=\left\{\frac{1}{n} \middle| n=1, 2, \cdots\right\}$，聚点为 0，但 $0 \notin E$；

取 $E_2=\left\{0, \frac{1}{n} \middle| n=1, 2, \cdots\right\}$，聚点为 0，而 $0 \in E$；

取 $E=[0, 1]$，E 的内点为 $(0, 1)$ 内的全部点，这些点亦都是 E 的聚点，但 E 的聚点还有 0 和 1.

③ 孤立点：设 E 为点集，$x_0 \in E$，不是 E 的聚点，则称 x_0 为 E 的一个孤立点．

例如，设 $E=\left\{\frac{1}{n} \middle| n=1, 2, \cdots\right\}$，则每个点均为 E 的孤立点．

例如，设 $f(x)=\frac{1}{1-\sin x}$，考虑 $f(x)$ 没有定义的点构成的点集 E，即 $E=\{x \mid \sin x=1\}=\left\{2k\pi+\frac{\pi}{2} \middle| k=\pm 1, \pm 2, \cdots\right\}$，则 E 的每个点均为孤立点．

例如，考虑函数 $f(x)=\dfrac{1}{1-\sin\dfrac{1}{x}}$ 没有定义的点构成的点集 $E=\left\{x \middle| x=0 \text{ 或 } \dfrac{1}{2k\pi+\dfrac{\pi}{2}}, k=\pm 1, \pm 2, \cdots\right\}$，$x=0$ 为 E 的聚点，其余点均为孤立点，即 $x=0$ 不为 E 的孤立点．事实上，$x=0$ 的任意邻域内均有 E 的点(密集的点).

④ 界点与边界：若 x_0 的任意去心邻域内既有 E 的点，又有不属于 E 的点，则称 x_0 为 E 的界点，全体界点构成的点集称为 E 的边界．

⑤ 开集与闭集：若 E 的每一个点均为它的内点，则称 E 为开集；若 E 的一切聚点均属于 E，则称 E 为闭集．

例如，$E_1=(0,1)$为开集，$E_2=[0,1]$为闭集，E_1 与 E_2 有相同的界点，均为 0 和 1．

例如，$E=\left\{x=\frac{1}{n}\middle|n=1,2,\cdots\right\}$的界点只有一个点 $x=0$，但 $x=0$ 不属于 E，故 E 为开集．

(3) 上界与下界、确界与实数公理

设 E 为实数点集，若对任意 $x\in E$，$\exists M\in\mathbf{R}$ 使 $x\leqslant M$，则称 M 为 E 的上界；$\exists m\in\mathbf{R}$，使 $x\geqslant m$ 时，称 m 为 E 的下界．

一般有界性的描述可以是如下命题：

对任意实数 $x\in E$，若 $\exists M>0$，使 $|x|\leqslant M$，则称 E 有界，界为 M．事实上，有 $-M\leqslant x\leqslant M$．

注 提请读者特别注意，在序列和函数的有界性描述中有各种"趋向"的前提，方式很多，但这里讲的点集有界性描述是基础．

有界集有无穷多个上界，其中有一个最为重要，即最小的上界，称为上确界；最大的下界称为下确界．E 的上确界与下确界分别记为 $\sup E$ 和 $\inf E$．

我们给出上确界 $\sup E$ 的一个等价性描述如下：

设 M 为 E 的一个上界(即对任意 $x\in E$，有 $x\leqslant M$)，若对任意 $\varepsilon>0$，$\exists x_0\in E$，使得 $x_0>M-\varepsilon$，则称 M 为 E 的上确界．

读者不难给出 E 的下确界 $\inf E$ 的等价性描述．

注 数学中的等价性描述是至关重要的，一个概念的等价性描述很可能成为处理某一问题的思路，为你打开思维的"阀门"．

数学家对实数集合的研究走过了一段漫长的道路，最终形成若干重要的公理，这些公理至今都是讨论和研究数学问题的共同基点，或叫做共识．其中有两条公理对于学好数学是至关重要的，即如下命题：