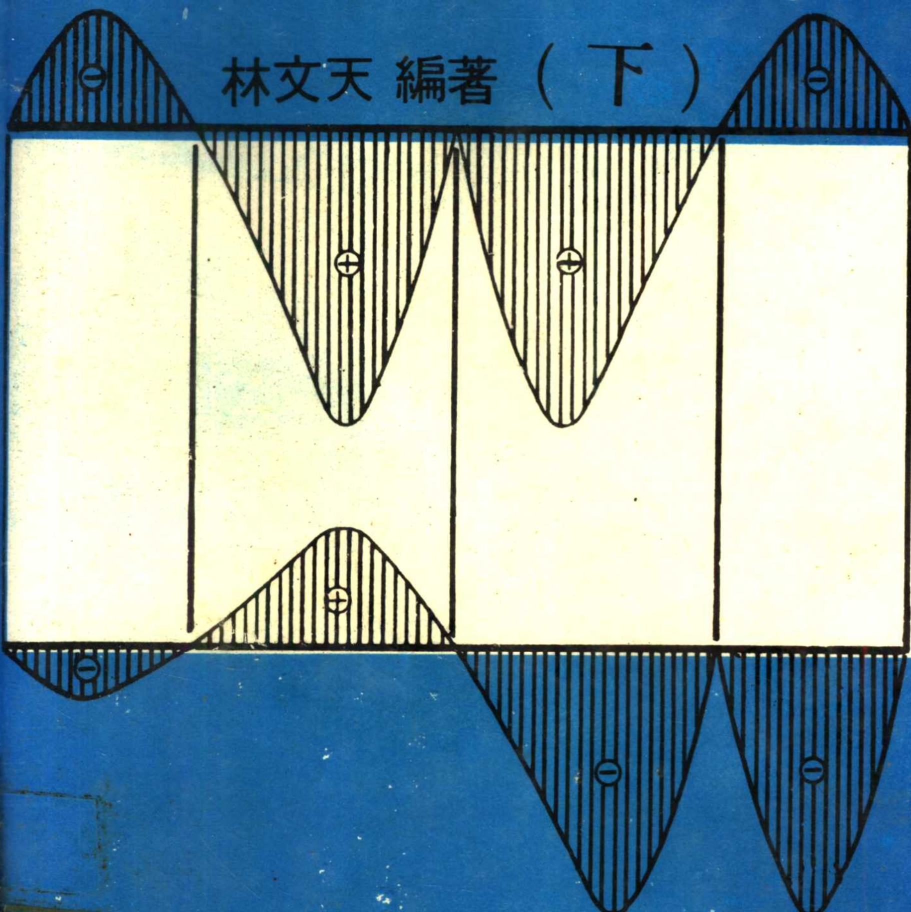
科技用書

结構學

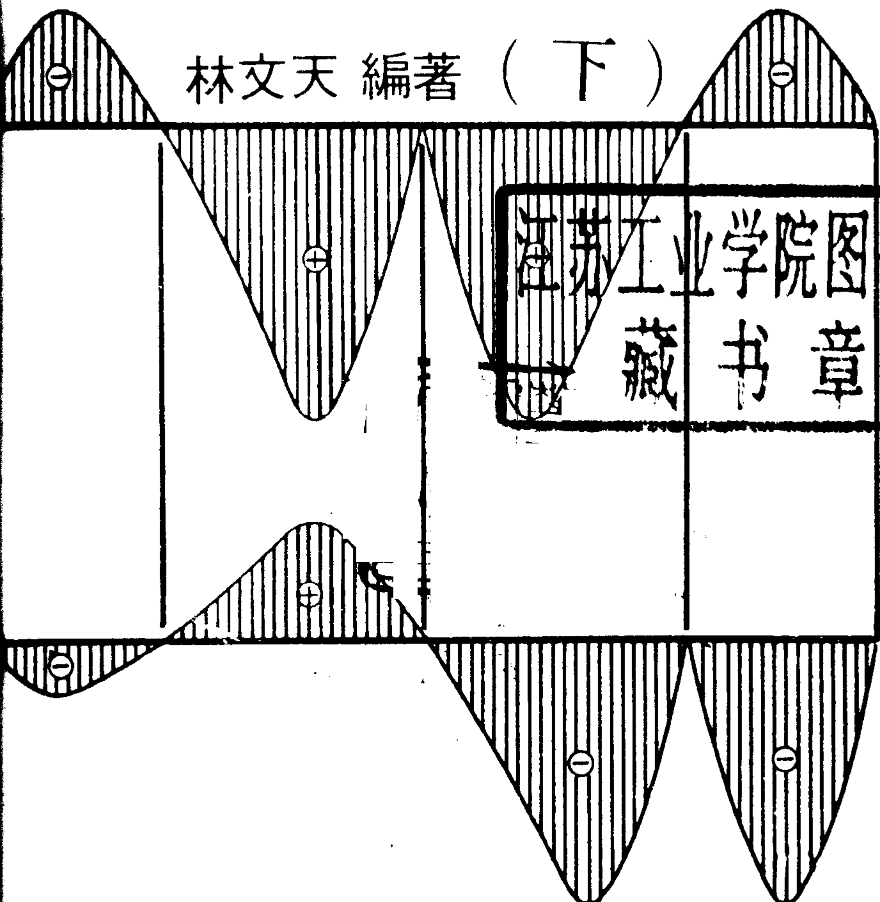
林文天 編著（下）



大行出版社印行

結構学

林文天 編著（下）



大行出版社印行

中華民國六十八年五月　日初版
書　名：結　構　學　（　下　）
著作者：林　文　天　編　著
發行人：裴　振　九
出版者：大　行　出　版　社
社址：台南市體育路41巷26號
電話：2 5 3 6 8 5 號
本社免費郵政劃撥帳號南字第32936號
本社登記證字號：行政院新聞局
局版台業字第0395號
總經銷：成大書局有限公司
台南市體育路41巷26號
電話：[illegible] 3 0 9 [illegible] 號
特　價：平一[illegible]〇元精一五〇元
編　號：B 0 0 1[illegible]—0 0 4 9 4
同業好友・敬請愛護

序

結構學爲土木水利及建築工程科系必修之主要科目之一，初學者僅須具有高等代數之基礎，即可研讀，但欲對其通盤理論做一徹底之瞭解，則須費一番相當的工夫，也就是說，結構之理論並非容易。作者擔任是科教學數年，深深感覺到一本結構學教本之好壞，直接影響到學生學習的效果，遂有編寫本書的動機。

目前坊間結構學教本甚多，英文版本固然有其可取之處，諸如取材新穎，內容豐富等，但它却有一些不適合中國學生的地方，至少，由於語文方面的隔閡，對初學者來說，很難收到預期的效果。至於中譯本，既使文字再流暢通順，也難免有艱澀的感覺。作者有鑒於此，乃就過去研讀是科之心得，及教學之經驗，編著此書。

本書分上下二册，下册爲靜不定結構。第十一章結構之撓度，是爲分析靜不定結構之基本，特就其各種不同之解法，做一有系統之歸納介紹。第十二章至第十七章，分別闡述撓度法分析靜不定結構，最小功法，三彎矩定理，傾角撓度法，彎矩分配法，及柱比法等分析靜不定結構之方法。其中以彎矩分配法，特提出一些簡捷分析法，有利實際之應用。第十八章靜不定結構之感應線，除利用麥氏撓度互等定理之求解外，亦討論彎矩分配法之應用。

本書編著之目標，期能使學者收事半功倍之效，故取材新穎，內容適當，層次分明，以精簡爲原則，但困難之處，雖是細微末節，亦不厭其煩，力求詳盡。所用名詞，悉以「土木工程標準名詞」爲準，並附原文。希望有助於學者，而收預期之效。

本書承內子黃昭月女士之協助，得以順利成書，是以編著態度審愼。但因利用公餘，且作者學驗有限，仍恐有疏漏不妥之處，尙希先進不吝賜教，是爲至幸。

林文天　謹識

時民國六十八年元月于台北

第十一章　結構之撓度

§11-1　概　　論

結構所用材料，因外力作用或溫度變化之影響，將生變形，故結構各部位置即有移動，此種移動謂之撓度（Deflection）或稱結構之彈性變形（Elastic Deformations of Structures）。結構之撓度一般均極微小，但基於下述原因，吾人必須加以研究。

一、結構各點之撓度有時須計算其實際數值，以便於設計及施工。例如：架設懸臂橋及拱橋時，應先計算撓度，確定各點之精確位置，以利施工；長跨度橋樑，或建築物中之梁版，爲免因載重作用而生下垂現象，須計算節點升起之拱度，使人有安全感；又如房屋建築中，粉刷灰泥之天花板或梁，常限制其最大撓度不得超過其跨度之$\frac{1}{360}$，以免灰泥裂開，在設計時應先予核算。故實際計算結構之撓度確有必要。

二、利用撓度以分析靜不定結構之應力：撓度在靜不定結構中之重要性，與靜力平衡方程式在靜定結構中之地位相同，是以結構撓度乃爲研究靜不定結構應力分析之初步。

計算結構撓度之方法甚多，各有其特點及適用範圍，桁架撓度主要由於各桿件軸向之伸長或縮短；梁或剛架撓度主要由於各桿件之彎曲。因作用不同，故計算撓度除一般共用之方法外，亦有其特殊之方法，將其歸納如下：

一、適用於任何型結構（桁架，梁，剛架）之一般方法。

(一)卡氏第一定理（Castiglianos First Theorem）。

(二)虛功法(The method of virtual work)或單位載重法(Unit-load method)。

二、適用於梁,剛架之特殊方法。

(一)面矩法(Moment-Area method)。

(二)共軛梁法(Conjugate-beam method)或彈性載重法(Elastic-load method)。

三、適用於桁架之特殊方法。

(一)韋氏-莫氏圖法(Williot-Mohr method)。

(二)桿鏈法(Bar-Chain method)。

以上之方法均基於材料符合虎克定律(Hooke's law),即應力與應變成正比,及結構之變形極微小,並不影響結構本身尺寸之假設,故有利於重疊原理之應用。

§ 11-2 卡氏第一定理

1876年,卡氏(Aberto Castigliano) 提出兩個重要之定理,卡氏第一定理(Castigliano's First Theorem) 用以決定結構之撓度,適用於任何型結構之一般方法,述之如下:

設一可變力F沿其作用方向生一距離ds ,則所作之功為Fds ,由F在一移動期間中之總作功為

$$W=\int_{s_1}^{s_2} F\,ds \qquad (11\text{-}1)$$

式中S_1與S_2為始位值與終位值。

若有一載重逐漸地加於一結構上,載重由零增至P ,結構因受力作用而生彈性變形,即P力作用點生有一定之撓度,設此P力方向所生之撓度為δ ,故P力所作之外功

$$W_E=\int_0^{\delta} F\,ds=\int_0^{\delta}\left(\frac{PS}{\delta}\right)ds=\frac{1}{2}P\delta \qquad (11\text{-}2)$$

同理，設載重為一力偶M，所生轉動角度為θ，則力偶M所作之外功

$$W_E=\frac{1}{2}M\cdot\theta \qquad (11\text{-}3)$$

若將載重移去，結構變形隨即消失而恢復原狀，即載重與撓度間有一線性關係，則外力作用所生之功，將以另外一種形式儲存於結構材料之內者，稱為內功或應變能。

圖 11-1(a)示一受有軸向力S之桿件，取一小段長度為dx，若應變為ϵ，則伸長量為ϵdx，故內功

$$dW_I=\frac{1}{2}S\cdot\epsilon dx$$

$$\because\quad \epsilon=\frac{S}{AE}\qquad\qquad \therefore\quad dW_I=\frac{1}{2}S\cdot\frac{S}{AE}dx$$

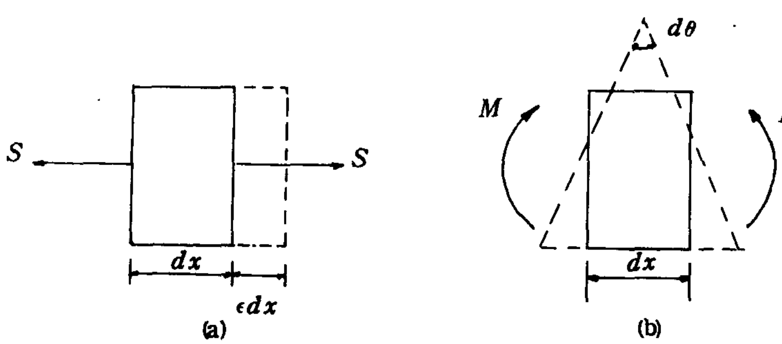


圖 11-1

式中A為桿件之斷面積，E為材料之彈性係數，如桿件之總長為l，則其內功

$$W_I=\int_0^l \frac{S^2}{2AE}\,dx=\frac{S^2 l}{2AE} \tag{11-4}$$

圖 11-1(b) 則示一受有彎矩M桿件之一小段，長度亦為dx，設此二斷面間之轉動角度為$d\theta$，故內功

$$dW_I=\frac{1}{2}M\cdot d\theta$$

$$\because \quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\theta}{dx}=\frac{M}{EI} \qquad d\theta=\frac{M}{EI}\,dx$$

$$\therefore \quad dW_I=\frac{1}{2}M\cdot\frac{M}{EI}\,dx$$

式中I為斷面之慣性矩。若桿件全長為l，則其內功

$$W_I=\int_0^l \frac{M^2}{2EI}\,dx=\frac{M^2 l}{2EI} \tag{11-5}$$

今若有P_1，P_2，…P_n等載重作用於一物體上，如圖 11-2 所示，令W_E，W_I分別代表其總外功及總內功，則內外功均為P_1，P_2，…P_n等作用力之函數，且內功等於外功，即

$$W_E=W_I=f(P_1,P_2,\cdots P_n)$$

卡氏第一定理即說明：「總內功（應變能）對於某一作用力（或力矩）的偏導數，等於該力（或力矩）作用點在該方向所生之撓度〔或斜度（ slope ）〕，證明如下：

外力P_n若增加一微小量dP_n，則W_I將增為

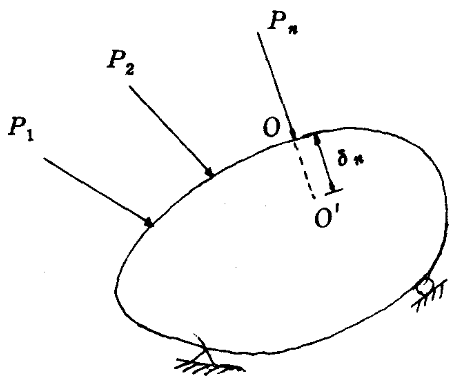


圖 11-2

$$W_I' = W_I + \frac{\partial W_I}{\partial P_n} \cdot dP_n$$

但因作功大小全視各力最後數值而定，與各力作用先後次序無關，現若假設 dP_n 先作用於該物體，依序再有 P_1，$P_2 \cdots P_n$ 等作用，當 dP_n 單獨作用時所生之外功極小，忽略不計，其後由 P_1，$P_2 \cdots P_n$ 等作用，在該方向上所生之撓度令為 δ_n，故其總外功為

$$W_E' = W_E + dP_n \cdot \delta_n$$

因　$W_E' = W_I'$

$$\therefore \quad W_I + \frac{\partial W_I}{\partial P_n} \cdot dP_n = W_E + dP_n \cdot \delta_n$$

得　$$\frac{\partial W_I}{\partial P_n} = \delta_n \qquad \text{〔11-6(a)〕}$$

同樣地，將上式中之作用力 P_n 與撓度 δ_n 改為力矩 M_n 及轉角（斜度）θ_n，可得

$$\frac{\partial W_I}{\partial M_n} = \theta_n \qquad \text{〔11-6(b)〕}$$

〔11-6(a)〕及〔11-6(b)〕式卽爲卡氏第一定理算式之表示。

以卡氏第一定理求結構之撓度，應將各力爲內功W_I之函數寫出。

桁架各桿只受軸向力，(11-4)式得

$$W_I = \Sigma \frac{S^2 l}{2AE}$$

卽 $$\delta = \frac{\partial}{\partial P_n} \Sigma \frac{S^2 l}{2AE} = \Sigma \frac{Sl}{AE} \left(\frac{\partial S}{\partial P_n}\right) \qquad (11\text{-}7)$$

梁及剛架受有彎矩及剪力，內功中以彎矩爲主，通常略去剪力之影響，由(11-5)式得

$$W_I = \Sigma \int \frac{M^2}{2EI}\, dx$$

$$\therefore \quad \delta = \frac{\partial}{\partial P_n} \Sigma \int \frac{M^2}{2EI}\, dx$$

$$= \Sigma \int \frac{M}{EI} \left(\frac{\partial M}{\partial P_n}\right) dx \qquad (11\text{-}8)$$

§ 11-3 卡氏第一定理之應用

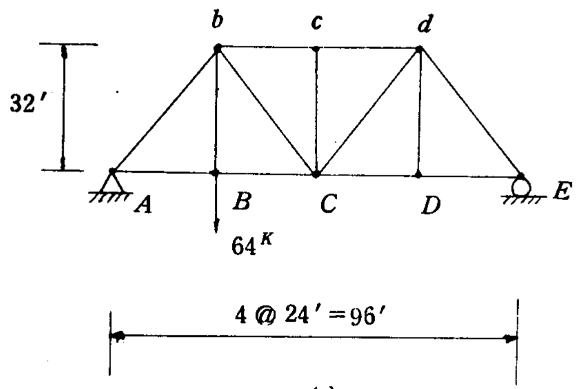
一、用卡氏第一定理求桁架之撓度

求桁架某節點之撓度，可在擬求撓度點之方向，加一假想力P_n，求得桁架各桿件在P_n力及實際載重作用下所生之應力，利用公式

$$\delta = \Sigma \frac{S\left(\frac{\partial S}{\partial P_n}\right) l}{AE} \qquad (11\text{-}9)$$

並令 $P_n=0$（或 P_n = 該點之實際載重），即可求得該點之撓度，其方向視假想力作用方向而定，正號示同向，負號示反向。

例題 *11.1* 以卡氏第一定理求圖 11-3(a) 所示桁架 d 點之水平撓度，$E=30,000\text{ksi}$ 並令各桿 $\frac{l}{A}=1\,(\text{ft/in}^2)$。



(a)

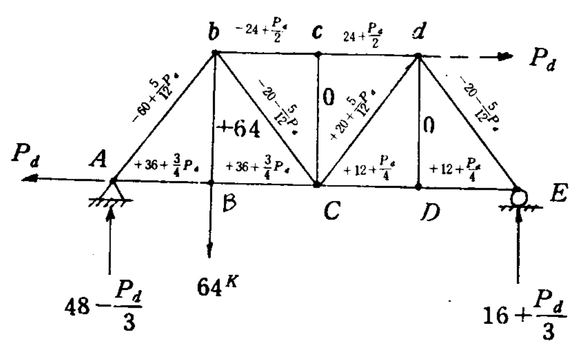


圖 11-3

解:欲求 d 點之水平撓度,可在 d 點加一假想力 P_d,設其向右作用。分別計算 P_d 力及實際載重作用之各桿應力如圖(b)所示,並列表如下,以利計算撓度值。

表 11-1

桿件	$\frac{\ell}{A}(ft/in^2)$	$S^{(k)}$	$\frac{\partial S}{\partial P_d}$	$\frac{S(\partial S/\partial P_d)\ell}{A}(ft\text{-k}/in^2)$
AB	1	$+36+\frac{3}{4}P_d$	$+\frac{3}{4}$	$+27$
BC	1	$+36+\frac{3}{4}P_d$	$+\frac{3}{4}$	$+27$
CD	1	$+12+\frac{1}{4}P_d$	$+\frac{1}{4}$	$+3$
DE	1	$+12+\frac{1}{4}P_d$	$+\frac{1}{4}$	$+3$
bc	1	$-24+\frac{1}{2}P_d$	$+\frac{1}{2}$	-12
cd	1	$-24+\frac{1}{2}P_d$	$+\frac{1}{2}$	-12
Ab	1	$-60+\frac{5}{12}P_d$	$+\frac{5}{12}$	-25
bB	1	$+64$	0	0
bC	1	$-20-\frac{5}{12}P_d$	$-\frac{5}{12}$	$+8.33$
cC	1	0	0	0
Cd	1	$+20+\frac{5}{12}P_d$	$+\frac{5}{12}$	$+8.33$
dD	1	0	0	0
dE	1	$-20-\frac{5}{12}P_d$	$-\frac{5}{12}$	$+8.33$

$$\therefore \quad (\delta_d)_H = \Sigma \frac{S\left(\dfrac{\partial S}{\partial P_d}\right) l}{AE} = +\frac{36}{30,000}$$

$$= +0.0012'\text{（向右）}$$

例題 *11.2*　以卡氏第一定理求圖 11-3(a) C 點之垂直撓度。

解：在 C 點加一假想力 P_c，求得假想力 P_c 及實際載重各桿之應力如圖 11-4 所示。列表計算如下：

表 11-2

桿件	$\frac{\ell}{A}(ft/in^2)$	$S^{(k)}$	$\frac{\partial S}{\partial P_c}$	$\frac{S(\partial S/\partial P_c)\ell}{A}(ft\text{-}k/in^2)$
AB	1	$+36+\frac{3}{8}P_c$	$+\frac{3}{8}$	$+13.5$
BC	1	$+36+\frac{3}{8}P_c$	$+\frac{3}{8}$	$+13.5$
CD	1	$+12+\frac{3}{8}P_c$	$+\frac{3}{8}$	$+4.5$
DE	1	$+12+\frac{3}{8}P_c$	$+\frac{3}{8}$	$+4.5$
bc	1	$-24-\frac{3}{4}P_c$	$-\frac{3}{4}$	$+18$
cd	1	$-24-\frac{3}{4}P_c$	$-\frac{3}{4}$	$+18$
Ab	1	$-60-\frac{5}{8}P_c$	$-\frac{5}{8}$	$+37.5$
bB	1	$+64$	0	0
bC	1	$-20+\frac{5}{8}P_c$	$+\frac{5}{8}$	-12.5
cC	1	0	0	0
Cd	1	$+20+\frac{5}{8}P_c$	$+\frac{5}{8}$	$+12.5$
dD	1	0	0	0
dE	1	$-20-\frac{5}{8}P_c$	$-\frac{5}{8}$	$+12.5$