二十一世纪高等院校标准教材配套辅导

Advanced Mathematics

高等数学

——教材习题详解及自测提高题（下）

主编 黄小英 顾红芳

北京工业大学出版社

二十一世纪高等院校标准教材配套辅导

高等数学（下）

——教材习题详解及自测提高题

主　编　黄小英　顾红芳
副主编　刘广彦

北京工业大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.下:教材习题详解及自测提高题/黄小英主编.—北京:北京工业大学出版社,2002.10

ISBN 7-5639-1175-8

Ⅰ.高... Ⅱ.黄... Ⅲ.高等数学—高等学校—解题 Ⅳ.013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 073934 号

高等数学(下)

——教材习题详解及自测提高题

(配同济四版)

主编 黄小英 顾红芳

*

北京工业大学出版社出版发行

邮编:100022 电话:(010)67392308

各地新华书店经销

亚星印刷厂印刷

*

2002 年 11 月第 1 版 2002 年 11 月第 1 次印刷

850 mm×1 168 mm 32 开 17.625 印张 480 千字

印数:1～5 000

ISBN 7-5639-1175-8/G・661

定价:22.00 元

前　　言

高等数学是高等院校一门非常重要的基础课，为了帮助学生更好地掌握该课程，以便为后续课程打下坚实的数学基础，我们特编写出版了《高等数学—— 教材习题详解及自测提高题》一书.该题解不仅收录了同济大学《高等数学》第四版的全部习题，而且还精选了大量的、题型广泛又有一定难度技巧的题目附于相应内容的后面作为自测提高题．全书分上、下两册，可供高校师生作为教学参考书，或大学生考研的辅导教材．目前关于高等数学方面的辅导书已有很多的版本，之所以编写出版此书，主要基于以下的一些考虑：

(1) 同济大学版《高等数学》，多年来被众多高校选为高等数学教材，该题解应拥有较为庞大的读者群体．

(2) 大学课程进度快，信息量大，尤其是高等数学课程，课后有大量的练习题，教师不可能将课后的所有练习题布置给学生，更不会对作业进行全批全改，这就要求学生拥有一套与教材相互匹配的参考书，显见拥有一套该题解是最合适不过了．

(3) 尽管大学学习不像中学那样，搞题海战术，但作为高等数学这门课程，多做练习仍不失为一种卓有成效的方法．因而拥有这样一本高质量的教材习题详解无疑对学习高等数学是很有裨益的．

(4) 各院校高等数学课程的考试试题均出自试题库，而教材上的习题与试题库中题目的题型往往有较大差距，而本书中自测

题由于题型多样、覆盖面广恰恰能弥补这一差距．

（5）当前大学生考研热方兴未艾，竞争日趋激烈，要求大学生在一年级学习高等数学时就应打好基础，多见识一些题型，而该题解中的自测提高题多选自历年硕士生入学试题，有效地做一些自测提高题将达到这一目的．

（6）数学的应用在教学中往往被忽视，纯粹的理论讲授不结合实际，而显得枯燥无味．据笔者了解，今后的数学教学要加强应用这一环节，因而本题解中适当地补充了一些数学模型的题目，这些题目饶有趣味，既可以调动学生的学习积极性，也符合数学教学的发展趋势．

参加本书编写工作的均为长期工作在高等数学教学一线，具有较为丰富的教学经验，能够追踪考研发展方向的教师．衷心期望本书能为大家在学习高等数学及考研时提供一些帮助．

本书习题丰富，不少自测题难度大，如果认真习做的话，既可以巩固学到的基本概念又可以有效地提高运算能力，特别是有些难题还可以迫使我们学会综合分析的思维方法，正因为如此，我们期望读者，尤其是初学者一定要刻苦钻研，千万不要轻易查抄本书的答案，因为任何削弱独立思考的做法都将违背我们出版此书的初衷，何况所做解答并非一定标准，仅作参考而已，如有某些误解差错也在所难免，一经发现恳请指正，不胜感谢！

编　者

目　　录

第八章　多元函数微分法及其应用

一、教材习题详解

二、自测提高题与解答

第九章　重积分

一、教材习题详解

二、自测提高题与解答

第十章　曲线积分与曲面积分

一、教材习题详解

二、自测提高题与解答

第十一章　无穷级数

一、教材习题详解

二、自测提高题与解答

第十二章　微分方程

一、教材习题详解

第八章　多元函数微分法及其应用

一、教材习题详解

习题 8－1

1. 已知函数 $f(x,y)=x^2+y^2-xy\tan\dfrac{x}{y}$，试求 $f(tx,ty)$.

解 $f(tx,ty)=(tx)^2+(ty)^2-txty\tan\dfrac{tx}{ty}$

$$=t^2\left(x^2+y^2-xy\tan\frac{x}{y}\right)=t^2f(x,y)$$

2. 试证函数 $F(x,y)=\ln x\cdot\ln y$ 满足关系式：

$$F(xy,uv)=F(x,u)+F(x,v)+F(y,u)+F(y,v)$$

证明 $F(xy,uv)=\ln(xy)\cdot\ln(uv)$

$=(\ln x+\ln y)(\ln u+\ln v)$

$=\ln x\cdot\ln u+\ln x\cdot\ln v+\ln y\cdot\ln u+\ln y\cdot\ln v$

$=F(x,u)+F(x,v)+F(y,u)+F(y,v)$

3. 已知函数 $f(u,v,w)=u^w+w^{u+v}$，试求 $f(x+y,x-y,xy)$.

解 $f(x+y,x-y,xy)=(x+y)^{xy}+(xy)^{(x+y)+(x-y)}$

$$=(x+y)^{xy}+(xy)^{2x}$$

4. 求下列各函数的定义域：

(1)$z=\ln(y^2-2x+1)$；

$(2) z=\dfrac{1}{\sqrt{x+y}}+\dfrac{1}{\sqrt{x-y}}$;

$(3) z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$;

$(4) z=\ln(y-x)+\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$;

$(5) u=\sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-r^2}}$

$(R>r>0)$;

$(6) u=\arccos\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

解 (1) 由 $y^2-2x+1>0$ 得函数的定义域为

$$D=\{(x,y)\mid y^2-2x+1>0\}$$

(2) 由 $x+y>0, x-y>0$ 得函数的定义域为

$$D=\{(x,y)\mid x+y>0, x-y>0\}$$

(3) 由 $y\geqslant 0, x-\sqrt{y}\geqslant 0$ 得 $x\geqslant\sqrt{y}$，即 $x\geqslant 0$ 且 $x^2\geqslant y$，故函数定义域为

$$D=\{(x,y)\mid x\geqslant 0, y\geqslant 0, x^2\geqslant y\}$$

(4) 由 $y-x>0, x\geqslant 0, 1-x^2-y^2>0$ 知函数的定义域为

$$D=\{(x,y)\mid y-x>0, x\geqslant 0, x^2+y^2<1\}$$

(5) 由 $R^2-x^2-y^2-z^2\geqslant 0$，即 $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$ 和 $x^2+y^2+z^2-r^2>0$，即 $x^2+y^2+z^2>r^2$，知函数的定义域为

$$D=\{(x,y,z)\mid r^2<x^2+y^2+z^2\leqslant R^2\}$$

(6) $x^2+y^2\neq 0$，即 x,y 不同时为零，且

$$\left|\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leqslant 1$$

即 $z^2\leqslant x^2+y^2$，故函数定义域为

$$D=\{(x,y,z)\mid z^2\leqslant x^2+y^2,\quad x^2+y^2\neq 0\}$$

5. 求下列各极限：

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} \dfrac{1-xy}{x^2+y^2}$;

(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} \dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$;

(4) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$;

(5) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}} \dfrac{\sin xy}{x}$;

(6) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}$.

解 (1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} \dfrac{1-xy}{x^2+y^2} = \dfrac{1-0}{0+1} = 1$

(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} \dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{\ln(1+e^0)}{\sqrt{1+0}} = \ln 2$

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{(2-\sqrt{xy+4})(2+\sqrt{xy+4})}{xy(2+\sqrt{xy+4})}$$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{-1}{2+\sqrt{xy+4}} = -\frac{1}{4}$$

(4) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy(\sqrt{xy+1}+1)}{(\sqrt{xy+1}+1)(\sqrt{xy+1}-1)}$$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy(\sqrt{xy+1}+1)}{xy}$$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (\sqrt{xy+1}+1) = 2$$

(5) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}} \dfrac{\sin xy}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}} \dfrac{\sin xy}{xy} \cdot y = 1 \cdot 0 = 0$

(6) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{2\sin^2\dfrac{x^2+y^2}{2}}{\left(\dfrac{x^2+y^2}{2}\right)^2} \cdot \frac{x^2+y^2}{4x^2y^2}$$

$$= 2\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right) = +\infty$$

6. 证明下列极限不存在：

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x+y}{x-y}$；　　(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$.

证明　(1) 若动点 $P(x,y)$ 沿直线 $y=2x$ 趋向于(0,0)，则

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=2x\to 0}} \frac{x+y}{x-y} = \lim_{x\to 0}\frac{x+2x}{x-2x} = \lim_{x\to 0}\frac{3x}{-x} = -3$$

若动点 $P(x,y)$ 沿直线 $x=2y$ 趋向于(0,0)，则

$$\lim_{\substack{y\to 0\\ x=2y\to 0}} \frac{x+y}{x-y} = \lim_{y\to 0}\frac{3y}{y} = 3$$

所以 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x+y}{x-y}$ 不存在.

(2) 若动点 $P(x,y)$ 沿直线 $y=x$ 趋向于(0,0)，则

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x\to 0}} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^4} = 1$$

若动点 $P(x,y)$ 沿直线 $y=2x$ 趋向(0,0)，则

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=2x\to 0}} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} = \lim_{x\to 0}\frac{4x^4}{4x^4+x^2} = 0$$

所以极限不存在.

7. 函数 $z=\dfrac{y^2+2x}{y^2-2x}$ 在何处是间断的？

解　为使函数表达式有意义，需 $y^2-2x\neq 0$，所以，函数的定义域为 $D=\{(x,y)\,|\,y^2-2x\neq 0\}$ 且在定义域内连续，故在 $y^2-2x=0$ 处，函数 $z=\dfrac{y^2+2x}{y^2-2x}$ 间断.

8. 证明 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$

证明　因为 $x^2+y^2 \geqslant 2|xy|$，即

$$|xy| \leqslant \frac{x^2+y^2}{2}$$

所以 $$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leqslant \frac{x^2+y^2}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}$$

对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，取 $\delta = 2\varepsilon$ 时，就有

$$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0\right| \leqslant \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2} < \frac{\delta}{2} = \varepsilon$$

所以 $$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

习题 8 － 2

1. 求下列函数的偏导数：

(1) $z = x^3y - y^3x$；　　(2) $s = \dfrac{u^2+v^2}{uv}$；

(3) $z = \sqrt{\ln(xy)}$；　　(4) $z = \sin(xy) + \cos^2(xy)$；

(5) $z = \ln\tan\dfrac{x}{y}$；　　(6) $z = (1+xy)^y$；

(7) $u = x^{\frac{y}{z}}$；　　(8) $u = \arctan(x-y)^z$.

解 (1) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y - y^3$，　$\dfrac{\partial z}{\partial y} = x^3 - 3xy^2$

(2) $$\frac{\partial s}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{u}{v} + \frac{v}{u}\right) = \frac{1}{v} - \frac{v}{u^2}$$

$$\frac{\partial s}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{u}{v} + \frac{v}{u}\right) = \frac{1}{u} - \frac{u}{v^2}$$

(3) $$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{\ln(xy)}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\ln(xy)}} \cdot \frac{y}{xy}$$

$$= \frac{1}{2x\sqrt{\ln(xy)}}$$

由对称性，有

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2y\sqrt{\ln(xy)}}$$

(4) $$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos(xy) \cdot y + 2\cos(xy) \cdot [-\sin(xy)] \cdot y$$

$$= y[\cos(xy) - \sin(2xy)]$$

由对称性，有

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x[\cos(xy) - \sin(2xy)]$$

(5) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\tan\frac{x}{y}} \cdot \sec^2\frac{x}{y} \cdot \frac{1}{y} = \frac{2}{y}\csc\frac{2x}{y}$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{\tan\frac{x}{y}} \cdot \sec^2\frac{x}{y} \cdot \frac{-x}{y^2} = -\frac{2x}{y^2}\csc\frac{2x}{y}$$

(6) $\frac{\partial z}{\partial x} = y(1+xy)^{y-1} \cdot y = y^2(1+xy)^{y-1}$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}e^{y\ln(1+xy)}$$

$$= e^{y\ln(1+xy)}\left[\ln(1+xy) + y \cdot \frac{x}{1+xy}\right]$$

$$= (1+xy)^y\left[\ln(1+xy) + \frac{xy}{1+xy}\right]$$

(7) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y}{z}x^{(\frac{y}{z}-1)}$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^{\frac{y}{z}} \cdot \ln x \cdot \frac{1}{z} = \frac{1}{z}x^{\frac{y}{z}}\ln x$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = x^{\frac{y}{z}} \cdot \ln x \cdot \left(-\frac{y}{z^2}\right) = -\frac{y}{z^2}x^{\frac{y}{z}}\ln x$$

(8) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{z(x-y)^{z-1}}{1+(x-y)^{2z}}$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-z(x-y)^{z-1}}{1+(x-y)^{2z}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{(x-y)^z\ln(x-y)}{1+(x-y)^{2z}}$$

2. 设 $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$，求证 $l\frac{\partial T}{\partial l} + g\frac{\partial T}{\partial g} = 0$.

解 因为 $\frac{\partial T}{\partial l} = 2\pi \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{l}{g}}} \cdot \frac{1}{g} = \frac{\pi}{\sqrt{lg}}$

$$\frac{\partial T}{\partial g} = 2\pi \cdot \sqrt{l}\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot g^{-\frac{3}{2}} = -\pi \cdot \frac{\sqrt{l}}{g\sqrt{g}}$$

所以
$$l\frac{\partial T}{\partial l} + g\frac{\partial T}{\partial g} = \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} - \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} = 0$$

3. 设 $z = e^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}$，求证 $x^2\frac{\partial z}{\partial x} + y^2\frac{\partial z}{\partial y} = 2z$.

解 因为$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)} \cdot \frac{1}{x^2}$，$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)} \cdot \frac{1}{y^2}$，所以

$$x^2\frac{\partial z}{\partial x} + y^2\frac{\partial z}{\partial y} = e^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)} + e^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)} = 2z$$

4. 设 $f(x,y) = x + (y-1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{y}}$，求 $f_x(x,1)$.

解 因为

$$f_x(x,y) = 1 + \frac{y-1}{\sqrt{1-\frac{x}{y}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{y}}} \cdot \frac{1}{y}$$

$$= 1 + \frac{y-1}{2\sqrt{x} \cdot \sqrt{y-x}}$$

所以
$$f_x(x,1) = 1 + 0 = 1$$

5. 曲线$\begin{cases} z = \dfrac{x^2+y^2}{4} \\ y = 4 \end{cases}$，在点(2,4,5)处的切线对于 x 轴的倾角是多少?

解
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{4} = \frac{x}{2}, \quad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(2,4,5)} = 1 = \tan\alpha$$

故所求倾角 $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

6. 求下列函数的$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$和$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$:

(1) $z = x^4 + y^4 - 4x^2y^2$;

(2) $z = \arctan\frac{y}{x}$; (3) $z = y^x$.

解 (1)
$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 - 8xy^2, \frac{\partial z}{\partial y} = 4y^3 - 8x^2y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x^2 - 8y^2, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 12y^2 - 8x^2$$