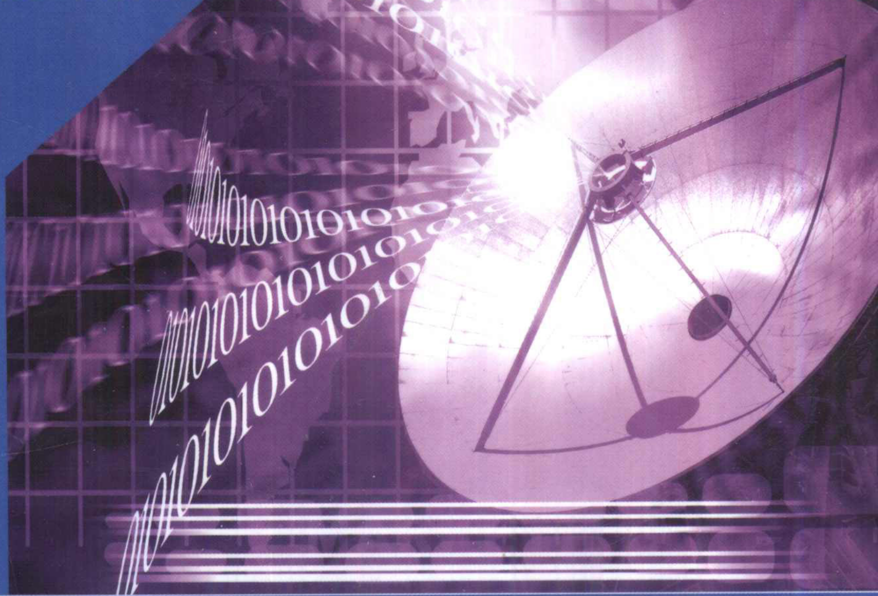
21世纪高职高专系列教材

21SHIJIGAOZHIGAOZHUANXILIEJIAOCAI

信号与线性系统

XINHAOYUXIANXINGXITONG



范世贵 编

西北工业大学出版社

高职高专教材

信号与线性系统

范世贵　编

西北工业大学出版社

【内容简介】 本书是教育部统一规划的高等职业技术教育教材。全书内容共九章：信号与系统的基本概念，连续系统时域分析，连续信号频域分析，连续系统频域分析，连续系统复频域分析，复频域系统函数，离散信号与系统时域分析，离散信号与系统 z 域分析，状态变量法。每章后均有习题。书后有两个附录：各章习题参考答案，自测试题两套（含参考解答）。

本书可作为高等职业技术教育、高等教育自学考试、大学专科的电子、通信、自控、自动化、信息、信号检测、计算机、电力等专业的教材；也可供本科大学学生和工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

信号与线性系统/范世贵编．—西安：西北工业大学出版社，2002.7
ISBN 7-5612-1461-8

Ⅰ．信… Ⅱ．范… Ⅲ．①信号理论—高等学校：技术学校—教材②线性系统—高等学校：技术学校—教材 Ⅳ．TN911.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 014114 号

出版发行：西北工业大学出版社
通信地址：西安市友谊西路 127 号　**邮编**：710072
电　　话：(029) 8493844，8491757，8494375，8491147(兼传真)
网　　址：http://www.nwpup.com
印 刷 者：陕西向阳印务有限公司印装
开　　本：787mm×960mm　1/16
印　　张：17.625
字　　数：426 千字
版　　次：2002 年 8 月第 1 版　　2002 年 8 月第 1 版第 1 次印刷
印　　数：1～5 000 册
定　　价：23.00 元

前　言

本书是教育部统一规划的全国高等职业技术教育信号与系统课程的基本教材。全书内容共九章：信号与系统的基本概念，连续系统时域分析，连续信号频域分析，连续系统频域分析，连续系统复频域分析，复频域系统函数，离散信号与系统时域分析，离散信号与系统 z 域分析，状态变量法。

在本书编写中考虑了以下的原则与特点：

符合高等职业技术教育的培养目标和学生的实际，打好基础，精选内容，以“必需”、“够用”为度，不片面追求理论的严密性与严谨性，省略了一些对大专层次不作要求的数学推导和证明，努力体现针对性与实用性，并适当考虑21世纪现代科技发展的需要。

讲究教学法，遵循学生接受知识的规律，深入浅出，循序渐进。教材的宏观体系是，先连续，后离散；先信号，后系统；先时域，后变换域；先输入-输出法，后状态变量法；并自始至终贯彻辩证思维的思想方法，不搞烦琐哲学与形而上学。

注意了坚持传授知识、发展智力与培养能力相统一的教学原则。在培养能力方面，着重培养学生的科学思维能力，创新思维能力，分析问题解决问题的能力，研究问题的方法论。另外，还注意培养学生良好的非智力素质，严谨的治学态度和科学工作作风，激励学生的学习精神。

在内容上虽然降低了深度和难度，但仍然保持了适当的宽度和广度，以满足学生今后在工作中的需要和现代科技发展的需要。

内容结构既要适合于学生自学，又要适合于教师施教。在微观结构上努力做到主题突出，思路清晰，理论与实践结合，精选典型例题，降低习题难度和数量，以掌握基本理论、基本概念、基本方法和学会应用为目标。

本书可作为高等职业技术学院、高等教育自学考试、大学专科教育通信、电子、自动控制、自动化、信息与网络、计算机、信号检测、电气工程等专业信号与系统课程的教材。书中打有“*”号的内容为选学，不计在总学时之内。

西北工业大学出版社出版的《信号与系统典型题解析及自测试题》一书，可作为自学、复习参考书使用，对于提高本课程的学习质量定会有裨益。

本书的编写与出版，得到了西北工业大学信息技术学院和出版社的推荐、支持和帮助，编者谨致诚挚的谢意。

由于编者水平所限，书中不妥之处在所难免，敬请指正。意见和来信请寄西北工业大学信息技术学院。

编　者

2002 年 2 月

目　录

第 1 章　信号与系统的基本概念……………………………………… 1
§1.1　信号的定义与分类 ……………………………………… 1
§1.2　基本的连续信号及其时域特性 ……………………………… 3
§1.3　信号的时域变换……………………………………………… 11
§1.4　信号的时域运算……………………………………………… 15
§1.5　系统的定义与分类…………………………………………… 19
§1.6　线性时不变系统的性质……………………………………… 21
§1.7　线性系统分析概论…………………………………………… 23
习题 ……………………………………………………………… 24
第 2 章　连续系统时域分析 ………………………………………… 27
§2.1　连续系统的数学模型——微分方程………………………… 28
*§2.2　连续系统微分方程的解——系统的全响应 ……………… 32
§2.3　系统的零输入响应及其求解………………………………… 34
§2.4　系统的单位冲激响应及其求解……………………………… 37
§2.5　卷积积分……………………………………………………… 40
§2.6　求系统零状态响应的卷积积分法…………………………… 46
§2.7　系统的时域模拟与框图……………………………………… 49
习题 ……………………………………………………………… 53
第 3 章　连续信号频域分析 ………………………………………… 57
§3.1　非正弦周期函数展开成傅里叶级数………………………… 57
§3.2　非正弦周期信号的频谱……………………………………… 60
§3.3　非周期信号的频谱…………………………………………… 66
§3.4　傅里叶变换的性质…………………………………………… 70
§3.5　周期信号的傅里叶变换……………………………………… 82
习题 ……………………………………………………………… 86
第 4 章　连续系统频域分析 ………………………………………… 89
§4.1　频域系统函数 $H(\mathrm{j}\omega)$ ……………………………………… 89
§4.2　非正弦周期信号激励下系统的稳态响应…………………… 92
§4.3　非周期信号激励下系统零状态响应的求解………………… 94
§4.4　系统无失真传输及其条件…………………………………… 98

§4.5 理想低通滤波器及其传输特性 …… 100
§4.6 调制与解调系统 …… 102
*§4.7 抽样信号与抽样定理 …… 106
习题 …… 111
第5章 连续系统复频域分析 …… 115
§5.1 拉普拉斯变换 …… 115
§5.2 电路基尔霍夫定律的复频域形式 …… 128
§5.3 电路元件伏安关系的复频域形式 …… 128
§5.4 复频域阻抗与复频域导纳 …… 132
§5.5 线性系统复频域分析法 …… 133
习题 …… 141
第6章 复频域系统函数 …… 145
§6.1 复频域系统函数 $H(s)$ …… 145
§6.2 复频域系统函数的一般表示式及其零、极点图 …… 147
§6.3 复频域系统函数 $H(s)$的应用 …… 151
§6.4 连续系统 s 域模拟 …… 165
习题 …… 168
第7章 离散信号与系统时域分析 …… 172
§7.1 离散信号及其时域特性 …… 173
§7.2 离散系统及其数学模型——差分方程 …… 185
§7.3 离散系统的零输入响应及其求解 …… 189
§7.4 离散系统的单位序列响应 $h(k)$及其求解 …… 191
§7.5 离散系统零状态响应的求解——卷积和法 …… 193
习题 …… 195
第8章 离散信号与系统 z 域分析 …… 199
§8.1 离散信号的 z 变换 …… 199
§8.2 离散系统 z 域分析 …… 206
§8.3 z 域系统函数 $H(z)$与系统 z 域模拟 …… 208
§8.4 离散系统函数 $H(z)$的应用 …… 213
习题 …… 221
第9章 状态变量法 …… 225
§9.1 基本概念与定义 …… 225
§9.2 连续系统状态方程与输出方程的列写 …… 229
§9.3 连续系统状态方程与输出方程的 s 域解法 …… 231
§9.4 连续系统状态方程与输出方程的时域解法 …… 237

§9.5 由状态方程判断系统的稳定性 …………………………… 241
习题………………………………………………………………… 243
附录……………………………………………………………………… 246
附录1 习题参考答案(部分) ………………………………… 246
附录2 自测试题 ……………………………………………………… 258
参考文献………………………………………………………………… 272

第 1 章　信号与系统的基本概念

学习要求

一、了解信号与系统的基本概念与定义，会画一些常用信号的波形。

二、深刻理解基本信号的时域描述方法、特点与性质，并会应用这些性质。

三、深刻理解信号的时域变换与时域运算的原理与方法，并会求解。

四、了解系统的定义与分类。

五、了解线性时不变系统的定义与性质，并会应用这些性质。

§1.1　信号的定义与分类

一、信号的定义

广义地说，信号是带有信息（如语言、音乐、图像、数据等）的随时间（和空间）变化的物理量或物理现象。例如在通信工程中，一般将语言、文字、图像、数据等统称为消息，在消息中包含着一定的信息。通信就是从一方向另一方传送消息，给对方以信息。但传送消息必须借助于一定形式的信号（光信号、电信号等）才能传送和进行各种处理，因而，信号是消息的载体，是消息的表现形式，是通信的客观对象，而消息则是信号的内容。

若信号表现为电压、电流、电荷、磁链，则称为电信号，它是现代技术中应用最广泛的信号。本书将只涉及电信号。

信号随时间变量 t 变化的函数曲线称为信号的波形。

应当注意，信号与函数在概念的内涵与外延上是有区别的。① 信号一般是时间变量 t 的函数，但函数并不一定都是信号，信号是实际的物理量，而函数则可能只是一种抽象的数学定义；② 信号的值一定是单值的，而函数的值则可能是多值的。本书对信号与函数两个概念混用，不予区分。例如正弦信号也说成正弦函数，或者相反；凡提到函数，指的均是信号。

信号的特性可以从两方面来描述，即时域特性与频域特性。信号的时域特

性指的是信号的波形，出现的时间先后，持续时间的长短，随时间变化的快慢和大小，重复周期的大小等。信号时域特性的这些表现，反映了信号中所包含的消息内容。信号频域特性的内涵，我们将在第 3 章中阐述。

二、信号的分类

(1) 确定信号与随机信号：按信号随时间变化的规律来分，信号可分为确定信号与随机信号。

☞ 确定信号是指能够表示为确定的时间函数的信号。当给定某一时间值时，信号有确定的数值，其所含信息量的不同是体现在其分布值随时间或空间的变化规律上。电路基础课程中研究的正弦信号、指数信号、各种周期信号等，都是确定信号的例子。

☞ 随机信号不是时间 t 的确定函数，它在每一个确定时刻的分布值是不确定的，只能通过大量试验测出它在某些确定时刻上取某些值的可能性的分布(概率分布)。空中的噪音，电路元件中的热噪声电流等，都是随机信号的例子。

实际传输的信号几乎都是随机信号。因为若传输的是确定信号，则对接收者来说，就不可能由它得知任何新的消息，从而失去了传送消息的本意。但是，在一定条件下，随机信号也会表现出某种确定性，例如在一个较长的时间内随时间变化的规律比较确定，即可近似地看成是确定信号。

随机信号是统计无线电理论研究的对象。本书中只研究确定信号。

(2) 连续时间信号与离散时间信号：按自变量 t 取值的连续与否来分，信号有连续时间信号与离散时间信号，分别简称为连续信号与离散信号。连续信号自变量 t 的取值是连续的，电路基础课程中所引入的信号都是连续信号。离散信号自变量 t 的取值不是连续的而是离散的，其定义与内涵，将在本书第 7、8 两章中介绍。

(3) 周期信号与非周期信号：若对所有的 $t \in \mathbf{R}$ 存在一个常数 T，使得

$$f(t-nT)=f(t) \quad n \in \mathbf{Z}$$

则称 $f(t)$ 是以 T 为周期的周期信号。周期信号必须在时间上是无始无终的。

不满足上述关系与条件的信号即为非周期信号。

(4) 正弦信号与非正弦信号。

(5) 功率信号与能量信号。

(6) 一维信号、二维信号与多维信号。

本书主要讨论的时间信号是一维信号。电视图像是二维信号的例子。

三、几种具体信号的定义

以下用 $f(t)$ 表示信号。

(1) 无时限信号：在时间区间 $(-\infty, +\infty)$ 内有 $f(t) \neq 0$ 的信号。

(2) 因果信号：若当 $t < 0$ 时 $f(t) = 0$，当 $t > 0$ 时 $f(t) \neq 0$，则 $f(t)$ 为因果信号，可用 $f(t)U(t)$ 表示。其中 $U(t)$ 为单位阶跃信号。

(3) 有始信号：设 t_1 为实常数。若当 $t < t_1$ 时 $f(t) = 0$，当 $t > t_1$ 时 $f(t) \neq 0$，则 $f(t)$ 即为有始信号，其起始时刻为 t_1。因果信号为有始信号的特例。

(4) 反因果信号：若当 $t > 0$ 时 $f(t) = 0$，当 $t < 0$ 时 $f(t) \neq 0$，则 $f(t)$ 即为反因果信号，可用 $f(t)U(-t)$ 表示。反因果信号也称非因果信号。

(5) 有终信号：设 t_2 为实常数。若当 $t > t_2$ 时 $f(t) = 0$，当 $t < t_2$ 时 $f(t) \neq 0$，则 $f(t)$ 即为有终信号。反因果信号为有终信号的特例。

(6) 时限信号：若在时间区间 (t_1, t_2) 内 $f(t) \neq 0$，而在此区间以外 $f(t) = 0$，则 $f(t)$ 即为时限信号。它既是有始信号，也是有终信号。

§1.2 基本的连续信号及其时域特性

所谓基本信号，是指在工程实际与理论研究中经常用到的信号，这些信号的波形及其时间函数表达式都十分简洁，用这些信号还可以组成一些比较复杂波形的信号。本节中仅介绍基本的连续信号。关于离散信号将在第 7 章中介绍。

一、直流信号

直流信号的函数定义式为

$$f(t) = A \qquad t \in \mathbf{R}$$

式中，A 为实常数，其波形如图 1-2-1 所示。若 $A = 1$，则称为单位直流信号。直流信号也称常量信号。

二、正弦信号

正弦信号的函数定义式为

$$f(t) = A\cos(\omega t + \psi) \qquad t \in \mathbf{R}$$

式中，A, ω, ψ 分别称为正弦信号的振幅、角频率、初相角，均为实常数。

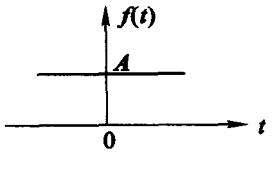


图 1-2-1 直流信号

正弦信号有如下性质：

(1) 它是无时限信号；

(2) 它是周期信号，其周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}$；

(3) 它的微分仍然是正弦信号，即

$$f'(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[A\cos(\omega t+\psi)]=\omega A\cos\left(\omega t+\psi+\frac{\pi}{2}\right)$$

可见其微分 $f'(t)$ 与原信号 $f(t)$ 相比仍是正弦信号，仅是振幅变为 ωA，初相角增加了 $\frac{\pi}{2}$。

(4) 它满足如下形式的二阶微分方程

$$f''(t)+\omega^2 f(t)=0$$

此性质非常有用。

三、单位阶跃信号

单位阶跃信号一般用 $U(t)$ 表示，其函数定义式为

$$U(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t>0\end{cases}$$

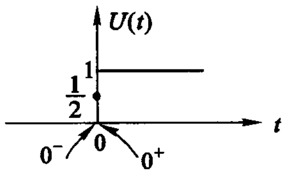


图 1-2-2　单位阶跃信号

也可定义为 $U(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ \frac{1}{2} & t=0\\ 1 & t>0\end{cases}$

其波形如图 1-2-2 所示。，可见在 $t=0$ 时刻发生了阶跃（间断点），从 $U(0^-)=0$ 阶跃到 $U(0^+)=1$，阶跃的幅度为 1。

单位阶跃信号 $U(t)$ 具有使任意非因果信号 $f(t)$ 变为因果信号的功能，即将 $f(t)$ 乘以 $U(t)$，所得 $f(t)U(t)$ 即为因果信号，如图 1-2-3 所示。

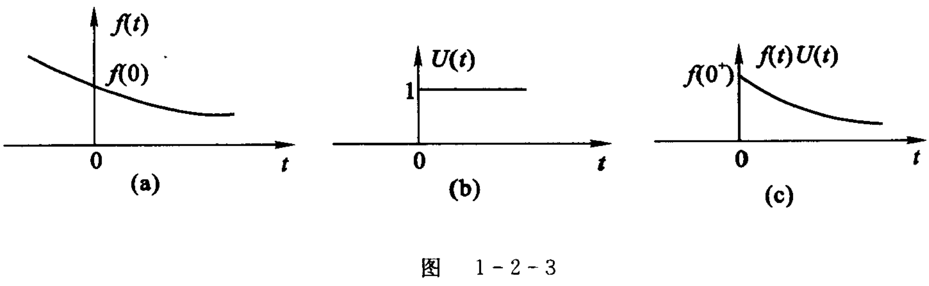


图　1-2-3

四、单位门信号

门宽为 τ、门高为 1 的单位门信号常用符号 $G_\tau(t)$ 表示，其函数定义式为

$$G_\tau(t)=\begin{cases}1 & -\frac{\tau}{2}<t<\frac{\tau}{2}\\ 0 & t>\frac{\tau}{2},\ t<-\frac{\tau}{2}\end{cases}$$

其波形如图 1－2－4(a) 所示。

单位门信号可用两个分别在 $t=-\frac{\tau}{2}$ 和 $t=\frac{\tau}{2}$ 出现的单位阶跃函数之差表示，如图 1－2－4(b)，(c) 所示。即

$$G_\tau(t)=U\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-U\left(t-\frac{\tau}{2}\right)$$

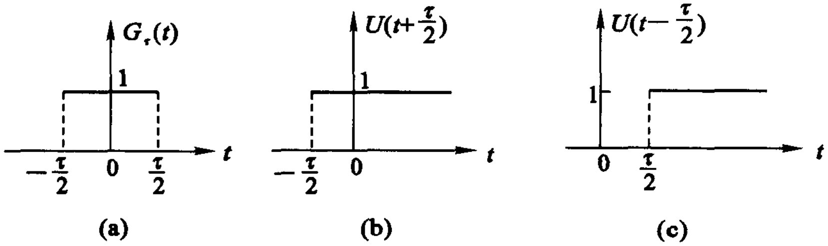


图 1－2－4　单位门信号

五、单位冲激信号

1. 定义

单位冲激信号用 $\delta(t)$ 表示，其函数定义式为

$$\delta(t)=\begin{cases}\infty & t=0\\ 0 & t\neq 0\end{cases}$$

且面积

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\mathrm{d}t=1$$

其波形如图 1-2-5(a) 所示，即用一粗箭头表示，箭头旁标以(1)，表示 $\delta(t)$ 图形下的面积为 1，称为冲激函数的强度，简称冲激强度。

单位冲激信号可理解为门宽为 τ、门高为 $\frac{1}{\tau}$ 的门函数 $G_\tau(t)$［见图 1－2－5(b)］在 $\tau\to 0$ 时的极限，即

$$\delta(t)=\lim_{\tau\to 0}G_\tau(t)=\begin{cases}\infty & t=0\\ 0 & t\neq 0\end{cases}$$

且 $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}\lim_{\tau\to 0}G_\tau(t)\mathrm{d}t=$

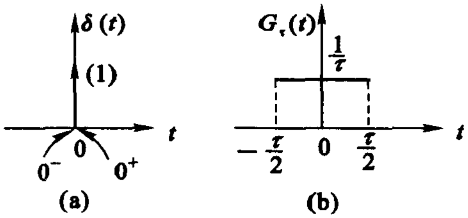


图 1－2－5　单位冲激信号

$$\lim_{\tau\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} G_\tau(t)\mathrm{d}t = 1$$

推广：

(1) 设 t_0 为正实常数，则有

$$\delta(t-t_0)=\begin{cases}\infty & t=t_0\\ 0 & t\neq t_0\end{cases}$$

且 $$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)\mathrm{d}t=\int_{t_0^-}^{t_0^+}\delta(t-t_0)\mathrm{d}t=1$$

其波形如图 1-2-6(a) 所示，即 $\delta(t)$ 在时间上延迟了 t_0。

(2) 若冲激函数图形下的面积为 A，则可写为

$$A\delta(t-t_0)=\begin{cases}\infty & t=t_0\\ 0 & t\neq t_0\end{cases}$$

且 $$\int_{-\infty}^{+\infty}A\delta(t-t_0)\mathrm{d}t=A\int_{t_0^-}^{t_0^+}\delta(t-t_0)\mathrm{d}t=A$$

即冲激强度为 A，其波形如图 1-2-6(b) 所示，箭头旁标以(A)。

(3) 若 $\delta(t)$ 在时间上超前了 t_0，则应写为 $\delta(t+t_0)$，其波形如图 1-2-6(c) 所示。

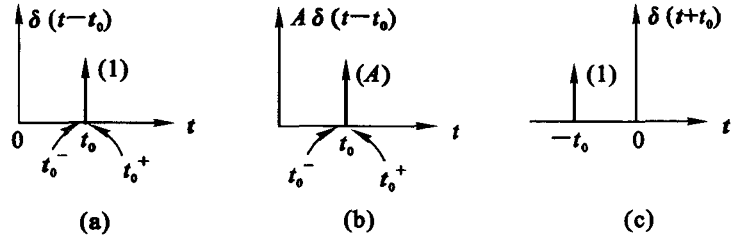


图 1-2-6　延迟或超前的冲激信号

2. 性质

(1) 设 $f(t)$ 为任意有界函数，且在 $t=0$ 或 $t=t_0$ 处连续，其函数值分别为 $f(0)$ 和 $f(t_0)$，则有

$$f(t)\delta(t)=f(0)\delta(t)$$
$$f(t)\delta(t-t_0)=f(t_0)\delta(t-t_0)$$

即时间函数 $f(t)$ 与单位冲激函数相乘，就等于单位冲激函数出现时刻 t_0，$f(t)$ 的函数值 $f(t_0)$ 与单位冲激函数 $\delta(t-t_0)$ 相乘，亦即使冲激函数的强度变为 $f(t_0)$，如图 1-2-7 所示。

(2) 抽样性(筛选性)。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} f(0)\delta(t)\mathrm{d}t = f(0)\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\mathrm{d}t = f(0)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-t_0)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t_0)\delta(t-t_0)\mathrm{d}t = f(t_0)\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)\mathrm{d}t = f(t_0)$$

即任意的有界时间函数 $f(t)$ 与 $\delta(t)$ 或 $\delta(t-t_0)$ 相乘后在无穷区间 $(-\infty, +\infty)$ 上的积分值，等于单位冲激函数出现时刻 $f(t)$ 的函数值 $f(t_0)$。此即为冲激函数的抽样性，也称筛选性，$f(0)$ 或 $f(t_0)$ 即为 $f(t)$ 在抽样时刻的抽样值，简称样值。$f(t)$ 为被抽样的函数。

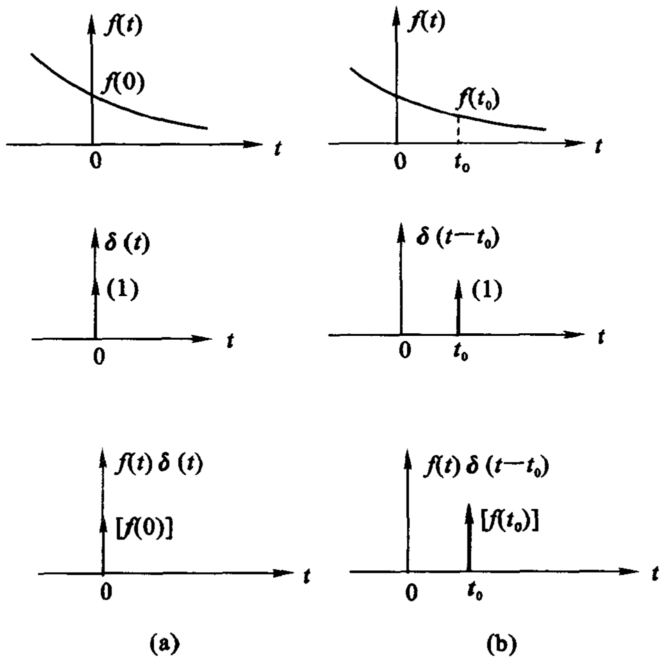


图 1-2-7

(3) $\delta(t)$ 为偶函数，即有

$$\delta(-t) = \delta(t)$$

证明如下：给上式等号两端同乘以 $f(t)$ 并进行积分，即

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(-t)f(t)\mathrm{d}t = \int_{+\infty}^{-\infty}\delta(t')f(-t')\mathrm{d}(-t') = \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t')f(-t')\mathrm{d}t' =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t')f(0)\mathrm{d}t' = f(0)$$

又有 $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)f(t)\mathrm{d}t = f(0)$

故得 $\delta(-t) = \delta(t)$ 证毕

(4) $\delta(at)=\dfrac{1}{a}\delta(t)$ （a 为大于零的实常数）

证明： $$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(at)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t')\frac{1}{a}\mathrm{d}t'=\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t')\mathrm{d}t'=\frac{1}{a}$$

又 $$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{a}\delta(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{a}$$

故得 $$\delta(at)=\frac{1}{a}\delta(t)$$ 证毕

推广：

① $\delta(at-t_0)=\dfrac{1}{a}\delta\left(t-\dfrac{t_0}{a}\right)$

② $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\delta(at)\mathrm{d}t=\frac{1}{a}f(0)$

③ $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\delta(at-t_0)\mathrm{d}t=\frac{1}{a}f\left(\frac{t_0}{a}\right)$

3. $\delta(t)$ 与 $U(t)$ 的关系

$\delta(t)$ 与 $U(t)$ 互为微分与积分的关系，即

$$U(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)\mathrm{d}\tau,\qquad \delta(t)=\frac{\mathrm{d}U(t)}{\mathrm{d}t}$$

现对前一式作一证明：当 $t<0^-$ 时有 $\delta(t)=0$

故有 $$\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{t}0\mathrm{d}\tau=0$$

当 $t>0^-$ 时有 $$\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{0^-}0\mathrm{d}\tau+\int_{0^-}^{0^+}\delta(\tau)\mathrm{d}\tau+\int_{0^+}^{t}0\mathrm{d}\tau=$$
$$0+1+0=1$$

故得 $$\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)\mathrm{d}\tau=\begin{Bmatrix}0 & t<1\\ 1 & t>0\end{Bmatrix}=U(t)$$ 证毕

式 $\delta(t)=\dfrac{\mathrm{d}U(t)}{\mathrm{d}t}$ 的成立是不言而喻的，无须证明了。

【例 1.2.1】 求下列积分：

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-3t}\cos t\delta(t)\mathrm{d}t$；

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-3\tau}\cos\tau\delta(\tau)\mathrm{d}\tau$；

(3) $\displaystyle\int_{-10}^{-2}\mathrm{e}^{-3t}\cos t\delta(t)\mathrm{d}t$。

【解】 (1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-3t}\cos t\delta(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-3\times0}\cos0\delta(t)\mathrm{d}t=1$

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-3\tau}\cos\tau\delta(\tau)\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-3\times0}\cos0\delta(t)\mathrm{d}t=U(t)$

(3) $$\int_{-10}^{-2} \mathrm{e}^{-3t}\cos t\delta(t)\mathrm{d}t = \int_{-10}^{-2} 1 \times 1 \times \delta(t)\mathrm{d}t = 0$$

六、单位冲激偶信号

$\delta(t)$ 函数的一阶导数 $\delta'(t)$ 称为单位冲激偶信号，即

$$\delta'(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta(t)$$

单位冲激偶信号 $\delta'(t)$ 有如下性质：

(1) $\delta'(t)$ 为奇函数，即有 $\delta'(t) = -\delta'(-t)$。

(2) $\int_{-\infty}^{t} \delta'(\tau)\mathrm{d}\tau = \delta(t)$。

(3) $f(t)\delta'(t) = f(0)\delta'(t) - f'(0)\delta(t)$。

证明：因有

$$[f(t)\delta(t)]' = f'(t)\delta(t) + f(t)\delta'(t)$$

即 $$[f(0)\delta(t)]' = f'(0)\delta(t) + f(t)\delta'(t)$$

即 $$f(0)\delta'(t) = f'(0)\delta(t) + f(t)\delta'(t)$$

故得 $$f(t)\delta'(t) = f(0)\delta'(t) - f'(0)\delta(t)$$

这是一个很重要和很有用的公式。

七、符号函数

符号函数用 $\mathrm{sgn}(t)$ 表示，其函数定义式为

$$\mathrm{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases}$$

或写成 $\mathrm{sgn}(t) = U(t) - U(-t) = 2U(t) - 1$

其波形如图 1-2-8 所示。符号函数也称正负号信号。

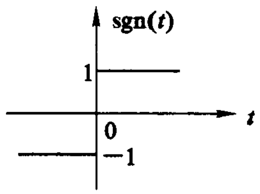


图 1-2-8 符号函数

* 八、单位斜坡函数

单位斜坡函数用 $r(t)$ 表示，其函数定义式为

$$r(t) = tU(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & t \geqslant 0 \end{cases}$$

其波形如图 1-2-9 所示。

单位斜坡信号 $r(t)$ 与 $U(t)$，$\delta(t)$ 有如下的关系

$$r(t) = \int_{-\infty}^{t} U(\tau)\mathrm{d}\tau, \qquad \frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t} = U(t)$$