全国成人专科升本科招生考试教程

高等数学（二）习题详解

李树香　林宗振　编审

根据教育部重新修订并颁布的《复习考试大纲》编写

专升本（非师范类）入学考试参考丛书

高等数学（二）考试参考书

（修订版）

暨南大学出版社

全国成人专科升本科招生考试教程

高等数学(二)习题详解

李树香　林宗振　编审

暨南大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

全国成人专科升本科招生考试教程 高等数学（二）习题详解/李树香，林宗振编 —广州：暨南大学出版社，2000.3

ISBN 7－81029－894－1

Ⅰ．全… Ⅱ．①李… ②林… Ⅲ．高等数学－高等教育：成人教育－解题 Ⅳ．O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（1999）第 66344 号

暨南大学出版社出版发行

封开人民印刷厂印刷

开本：787×1092 1/32 印张：6 字数：13 万字

2000 年 3 月第 1 版 2000 年 3 月第 1 次印刷

印数：1—5000 册

定价：10.00 元

前　　言

为了帮助考生系统复习高等数学（二），我们根据教育部最新颁布的《全国各类成人高等学校（专升本）招生复习考试大纲》，编写了经济数学这套丛书，列出全部习题及模拟试题并将其全部解出，而且对各类题型的解题方法都有详细说明，相信读者在认真阅读本题解之后，可以在成人高考中得心应手，取得满意的成绩。

参加本教程题解的有林宗振、李树香两位老教师，他们根据在高校多年的教学经验，用简便的方法求解。第一章至第三章第一节由李树香负责。从第三章第二节至第四章由林宗振负责。考虑到模拟试题大部分已有解答，我们仅对那些没有求解过程的给予解出。

本书如有不足之处，望读者指正，谢谢。

编审者

2000 年 1 月于暨南园

目　录

第一章　函数、极限、连续

函数

如何判断两个函数是否相同？两个函数只要定义域相同，对于定义域内每一个值，与之对应的两个函数的函数值都相同，这两个函数就相同。如果两个函数定义域相同，对应的法则相同，只是表示自变量的字母不同，这两个函数仍然是相同的，即函数与表示自变量的字母无关。

求定义域时要注意以下几点：

(1)函数式里若有分式，分母的值不能为零；

(2)函数式里若有偶次根式，根号里的式子必须大于或等于零。

(3)函数式里若有对数记号，要使真数为正。

(4)函数式里若有正切余切函数，在正切余切符号下的值分别不能等于 $k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$k\pi$（k 为整数）；

(5)函数式里若有反正弦或反余弦函数，在反正弦、反余弦符号下的式子的绝对值不大于 1。

(6)若函数是分段函数，则定义域是各分段定义域的各部分(并集)和。

习题 1-1

1. 函数 $y=\sqrt{5-x}+\lg(x-1)$ 的定义域是(B)。

A.$(0,5)$　　B.$(1,5]$

C.$(1,5)$　　D.$(1,+\infty)$

解 $\begin{cases} 5-x\geqslant 0 \\ x-1>0 \end{cases}$

$x\leqslant 5$　　$x>1$

故　选 B。

2. 函数 $y=\dfrac{\sqrt{9-x^2}}{\lg(x+2)}$ 的定义域是(C)。

A.$[-2,3]$　　B.$[-3,3]$

C.$(-2,-1)\cup(-1,3]$　　D.$(-3,3)$

解 $\begin{cases} 9-x^2\geqslant 0 & |x|\leqslant 3 \\ x+2>0 & x>-2 \\ x+2\neq 1 & x\neq -1 \end{cases}$

定义域是$(-2,-1)\cup(-1,3]$

故　选 C。

3. 求 $y=\sqrt{3-x}+\arccos\dfrac{x-2}{3}$ 的定义域。

解 $\begin{cases} 3-x\geqslant 0 & x\leqslant 3 \\ -1\leqslant\dfrac{x-2}{3}\leqslant 1 & -1\leqslant x\leqslant 5 \end{cases}$

故　定义域是$[-1,3]$。

4. 求分段函数

$$f(x)=\begin{cases} -x & x<0 \\ x^2 & 0\leqslant x<3 \\ x-2 & x>3 \end{cases}$$

的定义域。

解　$(-\infty,3)\cup(3,\infty)$

5. 设　$y=f(x)$的定义域是$[0,1]$,求

$f(x+\frac{1}{4})+f(x-\frac{1}{4})$的定义域。

解　因为$0\leqslant x+\frac{1}{4}\leqslant 1$　　$-\frac{1}{4}\leqslant x\leqslant\frac{3}{4}$

$0\leqslant x-\frac{1}{4}\leqslant 1$　　$\frac{1}{4}\leqslant x\leqslant\frac{5}{4}$

所以　得定义域$[\frac{1}{4},\frac{3}{4}]$。

6. 下列$f(x)$与$g(x)$是相同的函数的是(B)。

$A.f(x)=x$　　$g(x)=(\sqrt{x})^2$

$B.f(x)=\sqrt{x^2}$　　$g(x)=|x|$

$C.f(x)=\lg x^2$　　$g(x)=2\lg x$

$D.f(x)=\lg\sqrt{x}$　　$g(x)=\frac{1}{2}\lg|x|$

解　因为$f(x)=\sqrt{x^2}$　$g(x)=|x|$　由于$f(x)$与$g(x)$的定义域相同，对于定义域内每一个x值与之对应的两个函数值都相同。

故　选B。

7. 设$f(x)=\lg(x+\sqrt{1+x^2})$，证明$f(x)$为奇函数。

证　由定义有：

$$\begin{aligned}
f(-x)&=\lg(-x+\sqrt{1+(-x)^2})\\
&=\lg(-x+\sqrt{1+x^2})\\
&=\lg(\sqrt{1+x^2}-x)\\
&=\lg\frac{(\sqrt{1+x^2}-x)(\sqrt{1+x^2}+x)}{\sqrt{1+x^2}+x}\\
&=\lg\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}
\end{aligned}$$

$$= \lg(x+\sqrt{1+x^2})^{-1}$$

$$= -\lg(x+\sqrt{1+x^2}) = -f(x)$$

所以　$f(x)$为奇函数

8. 下列函数中是奇函数的为(C)。

$A.\ y = x^4 - x^2$　　　$B.\ y = x - x^2$

$C.\ y = \frac{\alpha^x - \alpha^{-x}}{2}$　　　$D.\ y = \frac{\alpha^x + \alpha^{-x}}{2}$

解　$f(-x) = \frac{\alpha^{-x} - \alpha^{-(-x)}}{2} = \frac{\alpha^{-x} - \alpha^x}{2}$

$$= -\frac{\alpha^x - \alpha^{-x}}{2} = -f(x)$$

故　选 C。

9. 设$f(x)$在$(-\infty,\infty)$内有定义,试判断下列函数的奇偶性。

(1) $y = f(x) - f(-x)$

解　$f(-x) - f[-(-x)] = f(-x) - f(x)$

$$= -[f(x) - f(-x)]$$

所以　$y = f(x) - f(-x)$是奇函数。

(2) $y = f(x^2)$

解　$f[(-x)^2] = f(x^2)$

所以　$y = f(x^2)$是偶函数。

(3) $y = f(x) + f(-x)$

解　$f(-x) + f[-(-x)] = f(-x) + f(x) = f(x) + f(-x)$

所以　$y = f(x) + f(-x)$为偶函数。

(4) $y = xf(x^2)$

解　$-xf[(-x)^2] = -xf(x^2)$

所以　$y = xf(x^2)$为奇函数

注意：两个偶函数相乘或相加仍然是偶函数。

两个奇函数的和仍为奇函数。

两个奇函数的乘积是偶函数。

奇函数与偶函数的乘积是奇函数。

10. 设$f(x+1)=x^2-1$，则 $f(x)=(C)$。

A. $x(x+1)$　　B. x^2

C. $x(x-2)$　　D. $(x+2)(x-1)$

解　令 $x+1=t$　　则 $x=t-1$

$$f(x)=(t-1)^2-1=t^2-2t=t(t-2)$$

所以　$f(x)=x(x-2)$

故　选 C。

11. 在$(-\infty,\infty)$内单调减少的函数是(D)。

A. $y=x^2$　　B. $y=x^3$

C. $y=\mathrm{ctg}x$　　D. $y=e^{-x}$

解　$y'=(e^{-x})'=-e^{-x}$

$$=-\frac{1}{e^x}<0$$

所以　$y=e^{-x}$在$(-\infty,\infty)$单调减少。

故　选 D。

12. 在区间$(0,\infty)$，下列函数中是无界函数的为(D)。

A. $y=e^{-x^2}$　　B. $y=\dfrac{1}{1+x^2}$

C. $y=\sin x$　　D. $y=x\sin x$

解　$y=x\sin x$ 在$(0,\infty)$内任取一点 x_0，对于任给的 $M>0$，都有$|x\sin x|>M$。

所以　$y=x\sin x$ 无界；其余 A、B、C 都有界。

故　选 D。

13. 设函数 $y=\lg(x-1)$，试分别指出在 $(1,3)$ 及 $(2,3)$ 是否有界。

解　当 $x \to 1$ 时　$\lg(x-1) \to -\infty$

当 $x \to 3$ 时　$\lg(x-1) \to \lg 2$

当 $x \to 2$ 时　$\lg(x-1) \to \lg 1 = 0$

当 $x \to 3$ 时　$\lg(x-1) \to \lg 2$

所以　$y=\lg(x-1)$ 在 $(1,3)$ 内无下界。

$y=\lg(x-1)$ 在 $(2,3)$ 内有界。

14. 函数 $y=\sin^2(5x+3)$ 的复合过程是(C)。

A. $y=\sin^2 u \quad u=5x+3$

B. $y=u^2 \quad u=\sin(5x+3)$

C. $y=u^2 \quad u=\sin V \quad V=5x+3$

D. $y=\sin u^2 \quad u=5x+3$

解　$y=u^2 \quad u=\sin V \quad V=5x+3$

故　选 C。

15. 试将函数 $y=5-|2x-1|$ 用分段函数形式表示。

解

$$y=f(x)=\begin{cases}5-2x+1 & \text{当 } x \geqslant \frac{1}{2} \text{ 时} \\ 5-(-2x+1) & \text{当 } x<\frac{1}{2} \text{ 时}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}6-2x & \text{当 } x \geqslant \frac{1}{2} \text{ 时} \\ 4+2x & \text{当 } x<\frac{1}{2} \text{ 时}\end{cases}$$

16. 设函数

$$f(x)=\begin{cases}-1 & x<0 \\ 0 & x=0 \\ 1 & x>0\end{cases}$$

求　$f(-0.001)$及$f(x-1)$

解　$f(-0.001)=-1$

$$f(x-1)=\begin{cases}-1 & x<1\\ 0 & x=1\\ 1 & x>1\end{cases}$$

17. 设函数

$$\varphi(x+1)=\begin{cases}x^2 & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 2x & 1<x<2\end{cases}$$

求　$\varphi(x)$的定义域。

解　因为　$\varphi(x)=\begin{cases}(x-1)^2 & -1\leqslant x\leqslant 0\\ 2(x-1) & 0<x<1\end{cases}$

所以　$\varphi(x)$的定义域是$[-1,1)$。

极限

极限分为数列的极限和函数极限，而数列是一类特殊的函数，它是定义在正整数集合上的函数。

定义：如果当 x 无限接近定值 x_0（即 $x\to x_0$）时，函数 $f(x)$ 无限接近一个确定常数 A，那么 A 叫做函数$f(x)$当 $x\to x_0$ 的极限。记为

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A$$

注意：x_0 可以是函数$f(x)$的定义域内的点，也可以不是定义域内的点。

定理　当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$的极限等于 A 的充分必要条件是：

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=\lim_{x\to x_0^+}f(x)=\lim_{x\to x_0}f(x)=A$$

这就是说：如果当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限等于 A，则必定有左、右极限都存在而且等于 A；反之，如果在点 x_0 左、右极限都存在而且等于 A，则必有 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$。特别对分段函数在分界点 x_0 处的极限是否存在，往往都用左右极限来判断。

习题 1－2

1. 写出下列各数的通项（一般项）。通过观察，指出收敛数列的极限。

(1) $1,\frac{1}{3},\frac{1}{5},\frac{1}{7},\frac{1}{9},\cdots$

解　$1,\frac{1}{3},\frac{1}{5},\frac{1}{7},\frac{1}{9},\cdots,\frac{1}{2n+1}$

通项 $x_n=\frac{1}{2n+1}$　　$(n=0,1,2,\cdots)$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}=0$$

(2) $1,-\frac{1}{2},\frac{1}{3},-\frac{1}{4},\frac{1}{5},-\frac{1}{6},\frac{1}{7},\cdots$

解　$1,-\frac{1}{2},\frac{1}{3},-\frac{1}{4},\frac{1}{5},\cdots,(-1)^{n-1}\frac{1}{n},\cdots$

通项 $x_n=(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$　　$(n=1,2,\cdots)$

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}=0$$

(3) $\frac{\sqrt{2}}{1},\frac{\sqrt{5}}{2},\frac{\sqrt{10}}{3},\frac{\sqrt{17}}{4}\cdots$

解　$\frac{\sqrt{2}}{1},\frac{\sqrt{5}}{2},\frac{\sqrt{10}}{3},\frac{\sqrt{17}}{4},\cdots,\frac{\sqrt{n^2+1}}{n},\cdots$

通项　$x_n=\frac{\sqrt{n^2+1}}{n}$　　$n=1,2,\cdots$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}$$

$$=1$$

(4) $2,6,12,20,30,42,56,\cdots$

解　$2,6,12,20,30,42,56,\cdots,n(n+1)$

通项　$x_n=n(n+1)$　　$n=1,2,\cdots$

$$\lim_{n\to\infty}n(n+1)=\infty$$

所以　原数列发散。

2. 当 $n\to\infty$ 时，下列数列中极限存在的是(A)。

$A.(-1)^n\sin\frac{1}{n}$　　$B.(-1)^n n$

$C.(-1)^n\frac{n}{n+1}$　　$D.[(-1)^n+1]n$

解　因为 $(-1)^n\sin\frac{1}{n}$ 在 $n\to\infty$ 时 $\sin\frac{1}{n}\to 0$，而 $(-1)^n$ 当 n 为奇数时是 -1，当 n 为偶数时是 1，根据有界变量乘无穷小量仍是无穷小。

所以　$\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\sin\frac{1}{n}=0$

故　选 A。其余 B、C、D 极限均不存在。

3. 下列极限中正确的是(D)。

$A.\lim\limits_{x\to 0}2^{\frac{1}{x}}=\infty$　　$B.\lim\limits_{x\to\infty}2^{\frac{1}{x}}=0$

$C.\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}=0$　　$D.\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$

解　$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\sin x\cdot\frac{1}{x}=0$　(因为 $|\sin x|\leqslant 1$)

故　选 D。其余 A、B、C 都是错误的。

4. 设 a 是一个常数，且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$　则数列 $\{x_n - a\}$ 的选择是（C）。

A.单调增加且收敛　　　　B.单调减少且收敛

C.收敛于 0　　　　　　D.发散

解　因为 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

$$\lim_{n\to\infty} \{x_n - a\} = 0$$

即当 $n\to\infty$ 时　数列 $\{x_n - a\}$ 收敛于 0。

故　选 C。其余 A、B、D 为错。

5. 设 a 是一个常数，且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$　则函数 $f(x)$ 在点 x_0 处为（A）。

A.可以有定义也可以无定义　　B.一定有定义

C.一定无定义　　　　　　　　D.有定义且 $f(x_0) = a$

解　$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$　则函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可以有定义，也可以没有定义。

故　选 A。其余 B、C、D 是错的。

6. 变量 $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ 在什么变化中是无穷小量？在什么变化中是无穷大量？

解　$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x-1} = 0$，即当 $x\to\infty$ 时 $f(x)$ 是无穷小量。

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{x-1} = \infty$，即当 $x\to 1$ 时 $f(x)$ 是无穷大量。

7. 在下列分段函数中，在分界处极限是否存在？

$$(1)\ f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & x < 0 \\ 2^x & x > 0 \end{cases}$$

解 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}(x^2+2) = 2$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} 2^x = 1$

因为 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 2 \neq \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$

所以 $f(x)$在 $x=0$ 极限不存在。

$(2) f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

解 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x} & x > 0 \\ \dfrac{-x}{x} & x < 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}(-1) = -1$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} 1 = 1 \neq \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -1$

由于左极限不等于右极限，所以函数 $f(x)$在 $x=0$ 处极限不存在。

$(3) f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2-x} & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ x + \dfrac{1}{2} & x > 0 \end{cases}$

解 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{2-x} = \dfrac{1}{2}$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(x+\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2} = \lim\limits_{x\to 0^-}\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$

由于左极限存在而且右极限也存在，并且相等。所以，函数 $f(x)$在 $x=0$ 处极限存在。