新编《信息、控制与系统》系列教材

清华大学研究生精品教材立项项目

北京市高等教育精品教材立项项目

Problems and Solutions for Modern signal Processing

现代信号处理习题与解答

张贤达 编著

Zhang Xianda

TUP
清华大学出版社

Springer

内 容 简 介

本书是研究生教材《现代信号处理》的配套参考书，由随机信号、参数估计理论、现代谱估计、自适应滤波器、高阶统计分析、时频信号分析的线性变换与非线性变换等7章组成。每章先系统总结现代信号处理的有关主要理论和方法，然后编排有关习题，并给出了全部习题的详细解答。所选习题分为复习型、应用型、补充型共三种类型；复习型帮助读者复习与掌握教材的主要内容；应用型包括了一定数量富有启发的应用问题；补充型则提供了教材以外的一些现代信号处理理论和方法。

本书和《现代信号处理》配套为清华大学研究生精品课计划教材和北京市高等教育精品教材，可供电子、通信、自动化、计算机、物理、生物医学和机械工程等各学科有关教师、研究生和科技人员教学、自学、进修或考研之用。

图书在版编目(CIP)数据

现代信号处理习题与解答/张贤达编著. —北京：清华大学出版社，2003
（新编《信息、控制与系统》系列教材）
ISBN 7-302-06529-2

Ⅰ. 现…　Ⅱ. 张…　Ⅲ. 信号处理—研究生—习题　Ⅳ. TN911.7-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 025954 号

出 版 者：清华大学出版社（北京清华大学学研大厦，邮编 100084）
http://www.tup.com.cn
责任编辑：王一玲
印 刷 者：北京鑫丰华彩印有限公司
发 行 者：新华书店总店北京发行所
开　　本：787×1092 1/16　**印张**：24　**字数**：490 千字
版　　次：2003 年 6 月第 1 版　2003 年 6 月第 1 次印刷
书　　号：ISBN 7-302-06529-2/TN・140
印　　数：0001～3000
定　　价：29.80 元

新编《信息、控制与系统》系列教材

出 版 说 明

信息、控制与系统学科是在20世纪上半叶形成和发展起来的一门新兴技术科学。在人类探索自然和实现自动化的进程中，信息、控制与系统学科的理论、方法和技术始终起着重要的和基础的作用。基于信息、控制与系统科学的自动化的发展和应用水平在一定意义上是一个国家和社会的现代化程度的重要标志之一，本系列教材是关于信息、控制与系统学科所属各个领域的基本理论和前沿技术的一套高等学校系列教材。

本系列教材所涉及的范围包括信号和信息处理、模式识别、知识工程、控制理论、智能控制、过程和运动控制、传感技术、系统工程、机器人控制、计算机控制和仿真、网络化系统、电子技术等方面。主要读者对象为自动控制、工业自动化、计算机科学和技术、电气工程、机械工程、化工工程和热能工程等系科有关的高年级大学生和研究生，以及工作于相应领域和部门的科学工作者和工程技术人员。

10多年前，清华大学出版社会同清华大学自动化系，曾经组织出版过一套《信息、控制与系统》系列教材，产生了较大的社会影响，其中多数著作获得过包括国家级教学成果奖和部委优秀教材奖在内的各种奖励，至今仍为国内众多院校所采用，并被广大相关领域科技人员作为进修和自学读物。我们现在组编的这套新编《信息、控制与系统》系列教材，从一定意义上说，就是先前那套教材的延伸和发展，以反映近些年来学科的发展和在科学研究与教学实践上的新成果和新进展，以适应当前科技发展和教学改革的新形势和新需要。列入这套新编系列教材中的著作，大多是清华大学自动化系开设的课程中经过较长教学实践而形成的，既有多年教学经验和教学改革基础上的新编著的教材，也有部分原系列教材的更新和修订版本。这套新编系列教材总体上仍将保持原系列教材求新与求实的风格，力求反映所属领域的基本理论和新进展，力求做到学科先进性和教学适用性统一。需要说明的是，此前我们曾以《信息技术丛书》为名组编这套教材，并已出版了若干种著作。现为使“书”和“名”更为相符，这些已出版的著作将在重印或再版时列入这套新编系列教材。

我们希望，这套新编系列教材，既能为在校大学生和研究生的学习提供内容先进、论述系统和教学适用的教材或参考书，也能为广大科学工作者与工程技术人员的知识更新与继续学习提供适合的和有价值的进修或自学读物。我们同时要感谢使用本系列教材的广大教师、学生和科技工作者的热情支持，并热忱欢迎提出批评和意见。

新编《信息、控制与系统》系列教材编委会

2002年6月

前　　言

随着信号处理学科的迅速发展，我国很多大学都开设了现代信号处理的有关研究生课程。在教学过程中，许多研究生反映，很多理论和方法似乎懂了，但面对一些习题却感到无从下手。有些习题即使做了，也不知道结果正确与否。“不会做习题”成了学习现代信号处理课程的一只拦路虎，影响了学习效果，甚至让部分研究生感到现代信号处理课难学。授课老师也因此在布置、批改作业和考试出题方面为难。为了帮助广大师生系统掌握现代信号处理的有关理论、方法与应用，克服教学过程中所遇到的困难，笔者编著了本书。

本书由随机信号、参数估计理论、现代谱估计、自适应滤波器、高阶统计分析、时频信号分析的线性变换与非线性变换等 7 章组成。每章包含三部分内容：第一部分总结与复习该章所涉及的现代信号处理主要理论和方法，第二部分为习题，第三部分则提供该章所有习题的详细解答。

全书共选编了 170 道习题。我们选编和解答这些习题的原则是：重点帮助读者复习和掌握好有关理论和方法，同时培养读者理论联系实际的能力。本书选编的习题大致可划分为三种类型：复习型依据有关现代信号处理的主要理论和方法而编选，帮助读者学习与掌握教材的主要内容；应用型针对一些不太复杂的实际问题，启发读者如何运用所学到的理论和方法解决实际中的应用问题；补充型习题要求读者推导或证明一些在一般教材中不讲授的理论和方法，作为对教材内容的拓展。

本书的主要目的不是帮助读者如何应试，而是体会如何学以致用、如何进行研究。需要指出的是，应用型习题主要启发读者如何将学到的理论、方法应用于解决工程实际问题，而补充型习题则主要帮助读者如何将所学到的理论和方法在理论上作进一步的展开或推广。前者是学以致用这一环节不可或缺的，后者的主要目的是培养读者进行有关理论基础研究和应用基础研究方面的兴趣和能力。当然，计算机仿真也是学习现代信号处理课程的一个重要环节，但本书未列入这类习题，因为这类习题的主要任务是编程，参考答案不方便给出。

《现代信号处理》已被列入清华大学研究生精品课计划和北京市高等教育精品教材。笔者先行出版的研究生教材《现代信号处理》(第 2 版) 和本书都是在这两项计划的资助下完成的。本书可视为与《现代信号处理》配套的教学参考书。这两本书反映了作者在清华大学与西安电子科技大学的一系列研究成果和近十年的教学实践。这些研究和教学得到了国家自然科学基金、教育部高等学校博士点专项基金、教育部“长江学者奖励计划”等的资助。

在本书的编写中，采纳了我的十几位博士、硕士研究生和其他很多听课研究生的意见和建议。博士研究生高秋彬、吕齐，硕士研究生苏泳涛、彭春翌仔细阅读和校对了书稿，并解答了少量习题。

本书的部分习题和解答是在参考并引用了有关文献的基础上，结合本人的理解完成的。应当提请读者注意的是，不要把书中提供的习题解答看作是“标准解答”，它们只是“参考解答”而已。作者希望，本书的习题解答能够起到抛砖引玉的作用，引发“一题多解”和更好的解答。

张贤达

2002年12月谨识于清华园

目 录

第 1 章　随 机 信 号

本章首先复习随机信号的基本概念、协方差函数和功率谱密度的定义与性质。接着，从独立性、不相关性、正交性和相干性这四种基本统计关系出发，讨论如何进行两个随机信号之间的比较与识别。随后，介绍正交信号变换、双正交信号变换和非正交信号变换的基本理论。最后，以被随机信号激励的线性系统为对象，分析系统输出与输入之间的统计量的关系，对两个随机信号之间的关系作更深入一步的描述。

1.1　主要理论与方法

若信号在每个时刻的取值为随机变量，则称之为随机信号或随机过程。

1.1.1　随机信号的特性

随机信号具有以下特点：

- 随机信号在任何时间的取值都是不能先验确定的随机变量。
- 虽然随机信号取值不能先验确定，但这些取值却服从某种统计规律。换言之，随机信号或过程可以用概率分布特性 (简称统计性能) 统计地描述。

复随机信号 $\{x(t)\}$ 的自相关函数定义为

$$R_{xx}(t_1,t_2)=\mathrm{E}\{x(t_1)x^*(t_2)\} \tag{1.1.1}$$

协方差函数定义为

$$C_{xx}(\tau)=\mathrm{E}\{[x(t_1)-\mu_x(t_1)][x(t_2)-\mu_x(t_2)]^*\} \tag{1.1.2}$$

式中 $\mu_x(t)=\mathrm{E}\{x(t)\}$ 为信号在时刻 t 的均值。

1. 广义平稳

复随机信号 $\{x(t)\}$ 称为广义平稳信号，若

(1) 其均值为常数，即 $\mathrm{E}\{x(t)\}=\mu_x$ (常数)；

(2) 其二阶矩有界，即 $\mathrm{E}\{x(t)x^*(t)\} = \mathrm{E}\{|x(t)|^2\} < \infty$;

(3) 其协方差函数与时间的起点无关，只与时间差 (滞后) 有关，即 $C_{xx}(\tau) = \mathrm{E}\{[x(t)-\mu_x][x(t-\tau)-\mu_x]^*\}$。

广义平稳也称协方差平稳、弱平稳等，简称平稳信号。

2. 严格平稳

随机信号 $\{x(t)\}$ 称为严格平稳的过程，若随机变量组 $\{x(t_1+\tau),\cdots,x(t_k+\tau)\}$ 和 $\{x(t_1),\cdots,x(t_k)\}$ 的联合分布函数对所有 $\tau > 0$ 和 $(t_1,\cdots,t_k)$ 均相同，其中 $k = 1,2,\cdots$。

文字叙述为：概率密度分布函数与时间无关的随机信号 $x(t)$ 称为严格平稳信号。

以下是 n 阶平稳、广义平稳、严格平稳和非平稳之间的关系：

(1) 广义平稳是 $n = 2$ 时的 n 阶平稳；

(2) 严格平稳一定是广义平稳，但广义平稳不一定是严格平稳；

(3) 由于不是广义平稳的随机过程不可能是 $n > 2$ 阶平稳的和严格平稳的，所以不具有广义平稳性的随机信号统称非平稳信号。

与随机信号统计量密切相关的一个重要问题是：从随机信号的一次观测记录是否可以估计其统计量 (如相关函数、功率谱等)。这一问题称为信号的遍历性。

令 $\{x(t)\}$ 是一个平稳信号，它的 n 阶及较低阶的所有矩都是与时间无关的。称该信号是 n 阶矩均方遍历的，若对于所有 $k = 1,2,\cdots,n$ 和所有整数 $t_1,t_2,\cdots,t_k$，恒有

$$\lim_{N\to\infty} \mathrm{E}\left\{\left|\frac{1}{2N+1}\sum_{t=-N}^{N} x(t+t_1)x(t+t_2)\cdots x(t+t_k) - \mu(t_1,\cdots,t_k)\right|^2\right\} = 0 \quad (1.1.3)$$

当一个信号是 n 阶矩均方遍历的平稳过程时，它的 n 阶及所有低阶的统计平均都可以用各自的时间平均来代替。换句话说，这些统计量均可以根据该信号的一次观测数据进行估计。均方遍历性是对平稳随机信号的一个基本假设。

1.1.2 单个平稳随机信号的二阶统计量

1. 自相关函数

$$R_{xx}(\tau) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{E}\{x(t)x^*(t-\tau)\} \quad (1.1.4)$$

2. 自协方差函数

$$C_{xx}(\tau) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{E}\{[x(t)-\mu_x][x(t-\tau)-\mu_x]^*\} = R_{xx}(\tau) - |\mu_x|^2 \quad (1.1.5)$$

数学性质:

$$R_{xx}^*(\tau) = R_{xx}(-\tau) \tag{1.1.6}$$

$$C_{xx}^*(\tau) = C_{xx}(-\tau) \tag{1.1.7}$$

$$|C_{xx}(\tau)| \leqslant C_{xx}(0), \quad \forall\tau \tag{1.1.8}$$

式中 $\forall\tau$ 表示对于所有 τ 成立。

相互关系:

(1) 对于具有零均值的随机信号 $x(t)$ 而言，自协方差函数与自相关函数等价，即

$$C_{xx}(\tau) = R_{xx}(\tau) \tag{1.1.9}$$

(2) 当 $\tau = 0$ 时，信号 $x(t)$ 的自相关函数退化为 $x(t)$ 的二阶矩，即

$$R_{xx}(0) = \mathrm{E}\{x(t)x^*(t)\} = \mathrm{E}\{|x(t)|^2\} \tag{1.1.10}$$

(3) 当 $\tau = 0$ 时，信号 $x(t)$ 的自协方差函数退化为 $x(t)$ 的方差，即

$$\begin{aligned} C_{xx}(0) &= \mathrm{var}[x(t)] = \mathrm{E}\{[x(t) - \mu_x][x(t) - \mu_x]^*\} \\ &= \mathrm{E}\{|x(t) - \mu_x|^2\} = \mathrm{E}\{|x(t)|^2\} - |\mu_x|^2 \\ &= R_{xx}(0) - |\mu_x|^2 \end{aligned} \tag{1.1.11}$$

3. 功率谱密度

$$P_{xx}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} C_{xx}(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,2\pi f\tau}\mathrm{d}\tau \tag{1.1.12}$$

数学性质:

(1) 功率谱密度 $P_{xx}(f)$ 是实的;

(2) 功率谱密度是非负的，即 $P_{xx}(f) \geqslant 0$;

(3) 自协方差函数是功率谱密度的 Fourier 反变换，即

$$C_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} P_{xx}(f)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,2\pi f\tau}\mathrm{d}f \tag{1.1.13}$$

特别地，当 $\tau = 0$ 时， $C_{xx}(0)$ 给出信号 $x(t)$ 的能量，即

$$E = C_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} P_{xx}(f)\mathrm{d}f \tag{1.1.14}$$

(4) 功率谱密度对频率的积分给出信号 $\{x(t)\}$ 的方差，即

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_{xx}(f)\mathrm{d}f = \mathrm{var}[x(t)] = \mathrm{E}\{|x(t) - \mu_x|^2\} \tag{1.1.15}$$

(5) 若 $\{x(t)\}$ 是零均值 ($\mu_x = 0$) 的随机过程，则协方差函数与相关函数等价，即 $C_{xx}(\tau) = R_{xx}(\tau)$，此时，式 (1.1.12) 和式 (1.1.13) 分别等价为

$$P_{xx}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,2\pi f\tau}\mathrm{d}\tau \tag{1.1.16}$$

$$R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} P_{xx}(f)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,2\pi f\tau}\mathrm{d}f \tag{1.1.17}$$

式 (1.1.16) 和式 (1.1.17) 描述的关系称为 Wiener-Khinchine 定理，其文字表述为：任意一个零均值的广义平稳随机过程的功率谱 $P_{xx}(f)$ 和它的自相关函数 $R_{xx}(\tau)$ 组成一个 Fourier 变换对。

(6) 对于零均值的随机过程 $\{x(t)\}$，功率谱的积分等于零滞后 ($\tau = 0$) 处的相关函数，即

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_{xx}(f)\mathrm{d}f = \mathrm{E}\{|x(t)|^2\} = R_{xx}(0) \tag{1.1.18}$$

1.1.3 两个平稳随机信号的二阶统计量

1. 互相关函数

$$R_{xy}(t_1,t_2) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{E}\left\{x(t_1)y^*(t_2)\right\} \tag{1.1.19}$$

2. 互协方差函数

$$C_{xy}(t_1,t_2) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{E}\left\{[x(t_1) - \mu_x][y(t_2-\tau) - \mu_y]^*\right\} = R_{xy}(\tau) - \mu_x\mu_y^* \tag{1.1.20}$$

数学性质:

$$R_{xy}^*(\tau) = R_{yx}(-\tau) \tag{1.1.21}$$

$$|R_{xy}(\tau)|^2 \leqslant |R_{xx}(0)|\,|R_{yy}(0)|, \quad \forall\tau \tag{1.1.22}$$

$$C_{xy}^*(\tau) = C_{yx}(-\tau) \tag{1.1.23}$$

3. 互相关系数

$$\rho_{xy}(\tau) = \frac{C_{xy}(\tau)}{\sqrt{C_{xx}(0)C_{yy}(0)}} \tag{1.1.24}$$

4. 互功率谱密度

$$P_{xy}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} C_{xy}(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,2\pi f\tau}\mathrm{d}\tau \tag{1.1.25}$$

与功率谱密度 $P_{xx}(f)$ 是频率 f 的实函数不同，互功率谱密度是频率 f 的复函数。互功率谱密度的实部称为同相谱，虚部称为正交谱。

5. 相干函数

$$C(f) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{|P_{xy}(f)|}{\sqrt{P_{xx}(f)P_{yy}(f)}} \tag{1.1.26}$$

数学性质：

(1) 相干函数是实函数；

(2) 相干函数的模小于或等于 1，即 $|C(f)| \leqslant 1$。

1.1.4 两个平稳随机信号的统计关系

1. 统计独立

称随机信号 $x(t)$ 与 $y(t)$ 统计独立，若

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y) \tag{1.1.27}$$

式中 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$ 分别是 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的概率密度函数。

2. 统计不相关

称随机信号 $x(t)$ 与 $y(t)$ 统计不相关，若

$$C_{xy}(\tau) = \mathrm{E}\{[x(t)-\mu_x][y(t-\tau)-\mu_y]^*\} = 0, \quad \forall\tau \tag{1.1.28}$$

3. 正交

称随机信号 $x(t)$ 与 $y(t)$ 正交，若

$$R_{xy}(\tau) = \mathrm{E}\{x(t)y^*(t-\tau)\} = 0, \quad \forall\tau \tag{1.1.29}$$

统计独立、统计不相关和正交之间的关系：

(1) 统计独立一定意味着统计不相关，但逆叙述一般不成立。惟一的例外是高斯随机过程：任意两个高斯随机过程的统计不相关和统计独立是等价的。

(2) 若 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的均值均等于零，则不相关与正交彼此等价。

对于两个零均值的高斯信号而言，统计独立、统计不相关和正交三者等价。

4. 相干信号

随机信号 $x(t)$ 和 $y(t)$ 为相干信号，若

$$|\rho_{xy}(\tau_0)| = 1, \quad 对某个\ \tau_0 \tag{1.1.30}$$

或

$$|C_{xy}(f)| = 1, \quad \forall f \tag{1.1.31}$$

1.1.5 Gram-Schmidt 标准正交化

一个线性独立的多项式序列 $\{f_i(x)\}$ 可以通过 Gram-Schmidt 标准正交化变成另一个标准正交的多项式序列 $\{\phi_i(x)\}$。

Gram-Schmidt 标准正交化算法:

$$\phi_1(x) = \frac{f_1(x)}{\|f_1(x)\|} \tag{1.1.32}$$

$$\phi_2(x) = \frac{f_2(x) - \langle f_2(x), \phi_1(x)\rangle \phi_1(x)}{\|f_2(x) - \langle f_2(x), \phi_1(x)\rangle \phi_1(x)\|} \tag{1.1.33}$$

$$\vdots$$

$$\phi_k(x) = \frac{f_k(x) - \sum_{i=1}^{k-1} \langle f_k(x), \phi_i(x)\rangle \phi_i(x)}{\left\| f_k(x) - \sum_{i=1}^{k-1} \langle f_k(x), \phi_i(x)\rangle \phi_i(x) \right\|}, \quad k = 2, 3, \cdots, n \tag{1.1.34}$$

Gram-Schmidt 标准正交化矩阵范数算法:

$$d_k = \begin{vmatrix} \langle f_1, f_1\rangle & \langle f_1, f_2\rangle & \cdots & \langle f_1, f_k\rangle \\ \langle f_2, f_1\rangle & \langle f_2, f_2\rangle & \cdots & \langle f_2, f_k\rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \langle f_{k-1}, f_1\rangle & \langle f_{k-1}, f_2\rangle & \cdots & \langle f_{k-1}, f_k\rangle \\ f_1 & f_2 & \cdots & f_k \end{vmatrix} \tag{1.1.35}$$

$$\phi_k = \frac{d_k}{\langle d_k, d_k\rangle^{1/2}}, \quad k = 1, 2, \cdots, n \tag{1.1.36}$$

1.1.6 信号的级数展开与积分变换

基函数是信号的级数展开与积分变换的基本要素。

1. 基函数

令 $x(t) \in L^2(R)$, 称 $\{\phi_k(t)\}$ 是 Hilbert 空间的一组基函数, 若

(1) $\phi_k(t), k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ 相互线性独立, 即对于任意 k, $\phi_k(t)$ 不可能是其他元素的线性组合;

(2) $\langle x, \phi_k\rangle = 0$ $(\forall k \in Z)$ 意味着 $x = 0$。

2. 对偶基函数

如果 $\{\phi_k(t)\}$ 和 $\{g_k(t)\}$ 是两组不同的基函数，并且满足双正交条件

$$\langle g_i, \phi_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \tag{1.1.37}$$

则称 $\{g_k(t)\}$ 是 $\{\phi_k(t)\}$ 的对偶基函数。

3. 标准正交基

基函数 $\{\phi_k(t)\}$ 称为标准正交基，若它满足以下两个条件:

$$\langle \phi_k, \phi_i \rangle = \int_a^b \phi_k(t)\phi_i^*(t)\mathrm{d}t = 0, \quad \forall k \neq i \tag{1.1.38}$$

和

$$\langle \phi_k, \phi_k \rangle = \int_a^b |\phi_k|^2 \mathrm{d}t = 1 \tag{1.1.39}$$

4. 信号的级数展开

信号 $x(t)$ 可以用一组基函数 $\phi_k(t), k = -\infty, \cdots, \infty$ 展开为

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \phi_k(t) \tag{1.1.40}$$

信号的积分变换分为非线性变换、双正交变换与正交变换。

5. 信号非正交变换

若基函数 $g_k(t)$ 不是信号级数展开基函数 $\phi_k(t)$ 的对偶基，则称积分变换

$$c_k = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) g_k^*(t) \mathrm{d}t \tag{1.1.41}$$

为信号 $x(t)$ 的非正交变换。

6. 信号双正交变换

若 $g_k(t)$ 是 $\phi_k(t)$ 的对偶基，则称积分变换 (1.1.41) 是信号 $x(t)$ 的双正交变换。

7. 信号正交变换

若信号级数展开的基函数 $\phi_k(t)$ 为标准正交基，则积分变换

$$c_k = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \phi_k^*(t) \mathrm{d}t \tag{1.1.42}$$

称为信号 $x(t)$ 的正交变换，或称 Karhunen-Loeve 变换 (简称 K-L 变换)。

信号非正交变换、双正交变换与正交变换的关系：

(1) 非正交信号变换使用不同的级数展开基函数和信号变换基函数，它们都是非正交基；

(2) 双正交信号变换在级数展开和信号变换中也使用两种不同的非正交的基函数，但这两组基函数彼此正交 (双正交)。

(3) 正交信号变换在级数展开和信号变换中使用同一组基函数，并且这组基函数是正交基。

8. 基函数的标准正交化

如果 $\boldsymbol{f}_1,\cdots,\boldsymbol{f}_n$ 为基向量，则通过 Gram-Schmidt 标准正交化公式

$$\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{f}_1 \tag{1.1.43}$$

$$\boldsymbol{v}_2=\boldsymbol{f}_2-a_{21}\boldsymbol{f}_1 \tag{1.1.44}$$

$$\vdots$$

$$\boldsymbol{v}_k=\boldsymbol{f}_k-\sum_{i=1}^{k-1}a_{k,i}\boldsymbol{f}_i \tag{1.1.45}$$

式中

$$a_{k,i}=\frac{\langle\boldsymbol{f}_k,\boldsymbol{v}_i\rangle}{\langle\boldsymbol{v}_i,\boldsymbol{v}_i\rangle},\quad k\geqslant 2,\ i=1,2,\cdots,k-1 \tag{1.1.46}$$

可以将它们转换成标准正交基向量 $\boldsymbol{\phi}_1,\cdots,\boldsymbol{\phi}_n$：

$$\boldsymbol{\phi}_k=\frac{\boldsymbol{v}_k}{\|\boldsymbol{v}_k\|},\quad \forall k=1,2,\cdots,n \tag{1.1.47}$$

1.1.7 线性系统的输出

1. 系统输出方程

$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(u)x^*(t-u)\mathrm{d}u \tag{1.1.48}$$

$$=h(t)*x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(u)h^*(t-u)\mathrm{d}u \tag{1.1.49}$$

式中 $x(t)$ 为系统输入；$h(t)$ 为系统冲激响应。

2. 系统传递函数

$$H(f)=\int_{-\infty}^{\infty}h(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi ft}\mathrm{d}t \tag{1.1.50}$$

3. 系统输出的自协方差函数

$$C_{yy}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}C_{xx}(\tau-u_1+u_2)h(u_1)h^*(u_2)\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2 \tag{1.1.51}$$

4. 系统输出的功率谱密度

$$P_{yy}(f)=P_{xx}(f)|H(f)|^2 \tag{1.1.52}$$

即是说，线性系统输出信号的功率谱密度等于输入信号的功率谱密度与系统传递函数的模平方之乘积。

5. 带通滤波器

一滤波器称为带通滤波器，若其传递函数为

$$H(f)=\begin{cases}1, & a\leqslant f\leqslant b\\ 0, & \text{其他}\end{cases} \tag{1.1.53}$$

式中 $b>a$。

特别地，当 $b-a$ 取很小的值时，滤波器为窄带带通滤波器。

6. 带阻滤波器

一滤波器称为带阻滤波器，若其传递函数为

$$H(f)=\begin{cases}0, & a\leqslant f\leqslant b\\ 1, & \text{其他}\end{cases} \tag{1.1.54}$$

式中 $b>a$。

7. 低通滤波器

一滤波器称为低通滤波器，若其传递函数为

$$H(f)=\begin{cases}1, & f\leqslant f_1\\ 0, & \text{其他}\end{cases} \tag{1.1.55}$$

8. 高通滤波器

一滤波器称为高通滤波器，若其传递函数为

$$H(f)=\begin{cases}1, & f\geqslant f_1\\ 0, & \text{其他}\end{cases} \tag{1.1.56}$$