

882288

高等学校轻工专业试用教材

线性代数 概率统计

朱俊龄 主编

北

轻工业出版社

3151
5151

2522

高等学校轻工专业试用教材

线性代数 概率统计

朱俊龄 主编

轻工业出版社

内 容 提 要

本书是由天津轻工业学院等十所院校共同编写的专科工程数学教材。着重介绍了线性代数、概率统计的基本知识。本书在内容选择、结构体系、习题等方面力求结合高等专科学校的要求和学制特点，力求贯彻少而精的原则，注意理论和分析技巧的讲述。本书可作为专科学校工程数学课程的教材，也可作为本科对工程数学要求较低的专业和职工大学、业余大学的教材。

高等学校轻工专业试用教材

线性代数、概率统计

朱俊龄 主编

轻工业出版社出版

(北京广安门南滨河路25号)

密云卫新综合印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

850×1168毫米1/32印张：7¹⁶/₃₂字数：189千字

1989年4月 第一版第一次印刷

印数：1—3,900 定价：2.05元

ISBN7-5019-0577-0/O·003

前 言

为满足高等工业专科学校各专业数学教学的需要，由十一所轻工业院校联合成立了专科数学教材编写组，在编写《高等数学》的同时，还对高等工业学校专科班的工程数学的教学工作进行了总结，并在此基础上编写出本书。

本书在内容选择和处理、结构体系、习题配备等方面，力求结合工院校专科的特点和要求，贯彻少而精和理论联系实际的原则。

本书前五章为线性代数部分，着重介绍线性代数的基本知识，内容有行列式、矩阵、向量的线性相关性、线性方程组和二次型，授课时数约为20余学时。本书后六章为概率统计部分，以讲清基本知识为重点，在此基础上，考虑到实际应用的需要，介绍一些常用统计方法，内容有事件与概率、随机变量及其分布、参数估计、假设检验、正交设计、回归分析等，授课时数约为30余学时。书中带*号部分可作为选学内容，书后给出了常用数值表和习题答案。

本书由天津轻工业学院朱俊龄副教授担任主编，参加执笔编写工作的有：齐齐哈尔轻工业学院蒋润勃（第一至五章）；天津轻工业学院李海根（第六至八章）；葛树平（第九至十一章）等同志。

本书由高等工业院校数学课程教学指导委员会委员、南京工学院陶永德教授主审。参加审稿工作的有：景德镇陶瓷学院孙六名，天津轻工业学院赖逸群，山东轻工业学院弗定晖等同志。天津轻工业学院朱佩珍为本书设计绘制了全部插图。

限于编者水平所限，加之时间仓促，书中难免有不妥之处，敬希读者批评指正。

编 者

目 录

线 性 代 数

第一章 行列式	(1)
第一节 n 阶行列式的定义	(1)
第二节 行列式的性质	(4)
第三节 克莱姆法则	(11)
习题1	(14)
第二章 矩阵	(16)
第一节 矩阵的概念	(16)
第二节 矩阵的运算	(18)
一、矩阵的加法	(18)
二、数与矩阵相乘	(19)
三、矩阵与矩阵相乘	(19)
四、转置矩阵	(22)
五、矩阵的逆	(24)
习题2	(28)
第三章 向量组的线性相关性及矩阵的初等变换	(30)
第一节 n 维向量	(30)
第二节 向量组的线性相关性	(33)
第三节 矩阵的秩	(40)
习题3	(46)
第四章 线性方程组	(48)
第一节 齐次线性方程组	(48)
第二节 非齐次线性方程组	(55)
习题4	(59)
*第五章 二次型	(60)
第一节 正交矩阵	(60)

第二节 特征值及特征向量	(62)
第三节 二次型及其标准形	(67)
习题5	(72)

概 率 统 计

第六章 事件与概率	(73)
第一节 事件与概率	(73)
一、随机现象	(73)
二、随机事件与样本空间	(75)
三、随机事件发生的频率	(78)
四、事件的概率	(81)
五、古典概型	(82)
第二节 条件概率与事件的独立性	(87)
一、条件概率	(87)
二、事件的独立性	(90)
三、重复独立试验	(93)
习题6	(95)
第七章 随机变量及其分布	(97)
第一节 随机变量的概念	(97)
第二节 离散型随机变量	(100)
一、离散型随机变量的概率分布	(100)
二、离散型随机变量的均值	(102)
三、离散型随机变量的方差	(107)
第三节 连续型随机变量	(110)
一、连续型随机变量的概率密度函数	(110)
二、连续型随机变量的均值与方差	(115)
三、分布函数和正态分布	(118)
* 第四节 极限定理	(123)
一、大数定律	(123)
二、中心极限定理	(124)
习题7	(125)

第八章 参数估计	(128)
第一节 基本概念	(128)
一、总体和样本	(128)
二、统计量与抽样分布	(130)
第二节 参数估计	(136)
一、参数的点估计	(136)
二、参数的区间估计	(139)
习题8	(145)
第九章 假设检验	(147)
第一节 假设检验的基本思想	(147)
一、基本问题	(147)
二、基本思想	(148)
三、两类错误	(149)
第二节 参数假设检验	(149)
一、 u 检验	(150)
二、 t 检验	(154)
三、 X^2 检验、 F 检验	(158)
第三节 分布的假设检验	(162)
一、正态概率纸	(162)
*二、秩的检验	(164)
习题9	(167)
第十章 正交设计	(170)
第一节 多因素试验	(170)
第二节 用正交表安排试验	(171)
一、正交表	(171)
二、制定试验方案	(172)
第三节 试验结果的直观分析	(174)
一、因素各水平的比较	(175)
二、因素主次的比较	(176)
三、选定最优水平搭配(最优生产条件)	(176)
第四节 考虑交互作用的试验	(177)

*第五节 单因素方差分析	(179)
一、方差分析的基本思想	(179)
二、单因素方差分析	(180)
第六节 正交设计的方差分析	(185)
习题10	(190)
第十一章 回归分析	(192)
第一节 一元线性回归	(193)
第二节 相关系数	(198)
第三节 预测与控制	(200)
一、预测问题	(200)
二、控制问题	(202)
*第四节 化曲线回归为线性回归	(204)
习题11	(208)
附表	(210)
线性代数习题答案	(225)
概率统计习题答案	(229)

第一章 行列式

在中学代数里，曾介绍了二、三阶行列式，并讨论了利用二、三阶行列式解二元、三元一次方程组的方法。但是，在实际应用和理论问题中所遇到的方程组，它的未知数个数有时不止三个。行列式是数学中特别是解一般线性方程组最重要、最常见的工具之一。因此，有必要在三阶行列式的基础上进一步建立 n 阶行列式的理论。

第一节 n 阶行列式的定义

下面考察三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

的展开式。

$$\begin{aligned} D &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) \\ &\quad + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\ &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &\quad + a_{13}(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

记

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

这三个行列式 M_{11}, M_{12}, M_{13} 是从 D 中依次划去 a_{11}, a_{12}, a_{13} 所在行、列之后，剩下的二阶行列式。

记

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11}, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12}, \quad A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13}$$

其中 $(-1)^{1+j}$ ($j=1, 2, 3$) 的指数 $1+j$ 是元素 a_{1j} 所在行数 1 和列数 j ($j=1, 2, 3$) 的和。

于是，三阶行列式的展开式可写成

$$D = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \quad (1)$$

这种表示法，叫做行列式 D 按第一行展式。

在三阶行列式中，划去元素 a_{ij} ($i, j=1, 2, 3$) 所在的行和列的元素，余下的元素构成一个二阶行列式，这个行列式叫做元素 (a_{ij}) 的余子式，记作 M_{ij} ，在 M_{ij} 前面冠以符号 $(-1)^{i+j}$ 得到 $(-1)^{i+j} M_{ij}$ 叫做元素 a_{ij} 的代数余子式，记作 A_{ij} 。

按此定义，三阶行列式 D 的值等于第一行的所有元素与它们对应的代数余子式的乘积之和。(见(1)式)。

同理，可得

$$D = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}$$

及

$$D = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}$$

以上两式分别叫做行列式 D 按第二、第三行展开式。

于是，三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

的值等于它任意一行的所有元素与它们对应的代数余子式乘积之和。即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3} = \sum_{j=1}^3 a_{ij}A_{ij} \quad (i=1, 2, 3) \quad (2)$$

我们称(2)式为行列式按第*i*(*i*=1, 2, 3)行的展式。

(2)式的优点, 能使三阶行列式的计算降为二阶行列式来计算。

推广三阶行列式的概念及展开式(2), 我们可定义四阶行列式: 16个数 a_{ij} ($i, j=1, 2, 3, 4$)排成如下的正方表, 记为

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

称为四阶行列式, 其值定义为

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3} + a_{i4}A_{i4} \quad (i=1, 2, 3, 4)$$

其中 A_{ij} 是元素 a_{ij} 的代数余子式, 它们都是三阶行列式。

同理, 可定义五阶行列式, 它的值可归结为四阶行列式的计算, 依次类推, $n-1$ 阶行列式可类似定义, 其值可归结为 $n-2$ 阶行列式的计算, 于是, 由数学归纳法就得到*n*阶行列式的定义。

定义 将 n^2 个数 a_{ij} ($i, j=1, 2, \dots, n$)排列成如下的正方表, 记为

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为*n*阶行列式, 其值定义为

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (3)$$

其中 a_{ij} 称为*n*阶行列式第*i*行第*j*列的元素, A_{ij} 称为 a_{ij} 的代数余子式($i, j=1, 2, \dots, n$)。它们都是 $n-1$ 阶行列式。

例 计算四阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

解 按第一行展开

$$\begin{aligned} D &= (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & 9 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & 9 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

第一个行列式按第一行展开，第二个行列式按第二行展开，

$$\begin{aligned} D &= 3 \times (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 4 \times (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} \\ &\quad + 5 \times (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 9 \end{vmatrix} \\ &= 3 \times 54 + 4 \times (40 - 42) + 5 \times 18 \\ &= 162 - 8 + 90 = 244 \end{aligned}$$

第二节 行列式的性质

我们把行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的行与列对调所成的行列式记为

$$D' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称行列式 D' 为 D 的转置行列式。

性质 1 行列式与其转置行列式相等。即

$$D = D'$$

例如，三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

分别将它们按第一行展开，便可得到 $D = D'$ 。

由性质 1 可知，行列式对行成立的性质，对列也必成立。同时，行列式也可按列展开，例如，三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

将 D, D' 都按第一行展开，得

$$D = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

及

$$\begin{aligned} D' &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{32} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix} \\ &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{21} \times (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &\quad + a_{31} \times (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} \end{aligned}$$

因为， $D = D'$ 故

$$D = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}$$

此式称为行列式 D 按第一列的展式。

一般地， n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \quad (1)$$

($j=1, 2, \dots, n$) 我们称 (1) 式为行列式按第 j 列的展式 ($j=1, 2, \dots, n$)。这样行列式可按某行展开, 也可按某列展开。

性质 2 行列式某行 (列) 的所有元素同乘以常数 k , 其结果等于用数 k 去乘行列式。

证 设

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= ka_{i1}A_{i1} + ka_{i2}A_{i2} + \cdots + ka_{in}A_{in} \\ &= k(a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}) \\ &= kD \end{aligned}$$

由此可见, 如果行列式的某行 (列) 中所有元素有公因子。则可把公因子提到行列式号外面。

性质 3 交换行列式的任意两行 (列), 行列式仅改变符号。(第 i 行与第 j 行替换记为 $r_i \leftrightarrow r_j$)。

例如下面的行列式 D , 交换其第一、三两行, 得

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix}$$

性质 4 行列式中有两行 (列) 的对应元素相等, 则行列式等于零。

这是因为将这两行 (列) 交换, 就有 $D = -D$, 从而 $D = 0$ 。

由性质 2 及性质 3 推知, 若行列式中有两行 (列) 对应元素

成比例，则行列式等于零。

性质 5 如果行列式的某行（列）的各元素是两项之和，则这个行列式等于两个行列式之和。

例如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

性质 6 将行列式的某一行（列）的元素乘以同一数后，加到另一行（列）的对应元素上去，行列式的值不变。（以数 k 乘第 j 行（列）加到第 i 行（列）上，记作 $r_i + kr_j$ ($c_i + kc_j$)）。

例如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \xrightarrow{r_2 + kr_1} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + ka_{11} & a_{22} + ka_{12} & a_{23} + ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

性质 7 行列式某一行（列）各元素与另一行（列）的代数余子式乘积之和等于零。即

$$a_{i_1} A_{j_1} + a_{i_2} A_{j_2} + \cdots + a_{i_n} A_{j_n} = 0 \quad (i \neq j)$$

或

$$a_{1_i} A_{1_j} + a_{2_i} A_{2_j} + \cdots + a_{n_i} A_{n_j} = 0 \quad (i \neq j)$$

例如三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

中，若以第一行的各元素与第二行的代数余子式乘积之和：

$$a_{11} A_{21} + a_{12} A_{22} + a_{13} A_{23}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

根据 n 阶行列式的定义及性质7, 得到下面重要的公式:

$$a_{11}A_{j1} + a_{12}A_{j2} + \cdots + a_{1n}A_{jn} = \begin{cases} D & \text{当 } i=j \\ 0 & \text{当 } i \neq j \end{cases} \quad (2)$$

或

$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = \begin{cases} D & \text{当 } i=j \\ 0 & \text{当 } i \neq j \end{cases} \quad (3)$$

在计算行列式时, 直接应用展开式(2)或(3)并不一定简化计算, 因为把一个 n 阶行列式的计算换成 n 个 $n-1$ 阶行列式的计算并不减少工作量, 所以, 在运用降阶法计算行列式时, 要结合本节所介绍的行列式性质, 使某行(列)的元素尽可能多的变成零, 便于按这行(列)展开时不必去计算元素0所在行与列的代数余子式。

例1 计算四阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

解

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{c_1 - 2c_3 \\ c_4 + c_3}} \begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 & 1 \\ -11 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & -5 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

按第三行展开

$$D = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -11 & 1 & -1 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -11 & 1 & -1 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2 + r_1} \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -6 & 2 & 0 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6 & 2 \\ -5 & -5 \end{vmatrix} = (30 + 10) = 40$$

例 2 证明行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33}$$

证 按第一行展开,

$$D = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & 0 \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33}$$

用数学归纳法可以证明n阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} \quad (4)$$

同理, 可证n阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} \quad (5)$$

形如(4)式、(5)式的行列式分别称为**下三角行列式**与**上三角行列式**。

由此即可得到对角行列式 (其中对角线上的元素是 λ_i , 未写出的数全是零)。

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$$

例 3 计算

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$