高等学校轻工专业试用教材

线性代数 概率统计

朱俊龄 主编

轻工业出版社

高等学校轻工专业试用教材

线性代数　概率统计

朱俊龄　主编

轻工业出版社

内 容 提 要

本书是由天津轻工业学院等十所院校共同编写的专科工程数学教材。着重介绍了线性代数、概率统计的基本知识。本书在内容选择、结构体系、习题等方面力求结合高等专科学校的要求和学制特点，力求贯彻少而精的原则，注意理论和分析技巧的讲述。本书可作为专科学校工程数学课程的教材，也可作为本科对工程数学要求较低的专业和职工大学、业余大学的教材。

高等学校轻工专业试用教材

线性代数、概率统计

牙俊龄 主编

轻工业出版社出版

（北京广安门南滨河路25号）

密云卫新综合印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

850×1168毫米1/32印张：7 16/32字数：189千字

1989年4月 第一版第一次印刷

印数：1—3,900 定价：2.05元

ISBN7-5019-0577-0/O·003

前　　言

为满足高等工业专科学校各专业数学教学的需要，由十一所轻工业院校联合成立了专科数学教材编写组，在编写《高等数学》的同时，还对高等工业学校专科班的工程数学的教学工作进行了总结，并在此基础上编写出本书。

本书在内容选择和处理、结构体系、习题配备等方面，力求结合工科院校专科的特点和要求，贯彻少而精和理论联系实际的原则。

本书前五章为线性代数部分，着重介绍线性代数的基本知识，内容有行列式、矩阵、向量的线性相关性、线性方程组和二次型，授课时数约为20余学时。本书后六章为概率统计部分，以讲清基本知识为重点，在此基础上，考虑到实际应用的需要，介绍一些常用统计方法，内容有事件与概率、随机变量及其分布、参数估计、假设检验、正交设计、回归分析等，授课时数约为30余学时。书中带*号部分可作为选学内容，书后给出了常用数值表和习题答案。

本书由天津轻工业学院朱俊龄副教授担任主编，参加执笔编写工作的有：齐齐哈尔轻工业学院蒋润勃（第一至五章）；天津轻工业学院李海根（第六至八章）；葛树平（第九至十一章）等同志。

本书由高等工业院校数学课程教学指导委员会委员、南京工学院陶永德教授主审。参加审稿工作的有：景德镇陶瓷学院孙六名，天津轻工业学院赖逸群，山东轻工业学院弗定晖等同志。天津轻工业学院朱佩珍为本书设计绘制了全部插图。

限于编者水平所限，加之时间仓促，书中难免有不妥之处，敬希读者批评指正。

编　者

目　录

线 性 代 数

概　率　统　计

第一章 行 列 式

在中学代数里，曾介绍了二、三阶行列式，并讨论了利用二、三阶行列式解二元、三元一次方程组的方法。但是，在实际应用和理论问题中所遇到的方程组，它的未知数个数有时不止三个。行列式是数学中特别是解一般线性方程组最重要、最常见的工具之一。因此，有必要在三阶行列式的基础上进一步建立n阶行列式的理论。

第一节 n阶行列式的定义

下面考察三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

的展开式。

$$\begin{aligned}
D&=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}\\
&\quad -a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}\\
&=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})\\
&\quad +a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})\\
&=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}\\
&=a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}\\
&\quad +a_{13}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

记

$$M_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad M_{12}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$M_{13}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

这三个行列式M_{11}、M_{12}、M_{13}是从D中依次划去a_{11}，a_{12}，a_{13}所在行、列之后，剩下的二阶行列式。

记

$$A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11},\ A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12},\ A_{13}=(-1)^{1+3}M_{13}$$

其中 $(-1)^{1+j}(j=1,2,3)$ 的指数 $1+j$是元素a_{1j}所在行数 1 和列数$j(j=1,2,3)$的和。

于是，三阶行列式的展开式可写成

$$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13} \tag{1}$$

这种表示法，叫做行列式D按第一行展式。

在三阶行列式中，划去元素 $a_{ij}(i,j=1,2,3)$ 所在的行和列的元素，余下的元素构成一个二阶行列式，这个行列式叫做元素$(a_{ij}$的余子式，记作 M_{ij}，在M_{ij} 前面冠以符号$(-1)^{i+j}$ 得到$(-1)^{i+j}M_{ij}$叫做元素a_{ij}的**代数余子式**，记作A_{ij}。

按此定义，三阶行列式D的值等于第一行的所有元素与它们对应的代数余子式的乘积之和。(见(1)式)。

同理，可得

$$D=a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23}$$

及

$$D=a_{31}A_{31}+a_{32}A_{32}+a_{33}A_{33}$$

以上两式分别叫做行列式D按第二、第三行展开式。

于是，三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

的值等于它任意一行的所有元素与它们对应的代数余子式乘积之和。即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+a_{i3}A_{i3}=\sum_{j=1}^{3}a_{ij}A_{ij}(i=1,2,3) \quad (2)$$

我们称(2)式为行列式按第$i(i=1,2,3)$行的展式。

(2)式的优点，能使三阶行列式的计算降为二阶行列式来计算。

推广三阶行列式的概念及展开式(2)，我们可定义四阶行列式：16个数$a_{ij}(i,j=1,2,3,4)$排成如下的正方表，记为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

称为四阶行列式，其值定义为

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+a_{i3}A_{i3}+a_{i4}A_{i4} \qquad (i=1,2,3,4)$$

其中A_{ij}是元素a_{ij}的代数余子式，它们都是三阶行列式。

同理，可定义五阶行列式，它的值可归结为四阶行列式的计算，依次类推，$n-1$阶行列式可类似定义，其值可归结为$n-2$阶行列式的计算，于是，由数学归纳法就得到n阶行列式的定义。

定义　将n^2个数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 排列成如下的正方表，记为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为n阶行列式，其值定义为

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}(i=1,2,\cdots,n) \qquad (3)$$

其中a_{ij}称为n阶行列式第i行第j列的元素，A_{ij}称为a_{ij}的代数余子式$(i,j=1,2,\cdots,n)$。它们都是$n-1$阶行列式。

例　计算四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

解 按第一行展开

$$D=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}+(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & 9 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & 9 \end{vmatrix}$$

第一个行列式按第一行展开，第二个行列式按第二行展开，

$$D=3\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}+4\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$$

$$+5\times(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 9 \end{vmatrix}$$

$$=3\times 54+4\times(40-42)+5\times 18$$

$$=162-8+90=244$$

第二节 行列式的性质

我们把行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的行与列对调所成的行列式记为

$$D'=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称行列式D'为D的**转置行列式**。

性质 1　行列式与其转置行列式相等。即

$$D=D'$$

例如，三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad D'=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

分别将它们按第一行展开，便可得到$D=D'$.

由性质 1 可知，行列式对行成立的性质，对列也必成立。同时，行列式也可按列展开，例如，三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad D'=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

将D、D'都按第一行展开，得

$$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}$$

及

$$D'=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{32} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{21}\times(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+a_{31}\times(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+a_{31}A_{31}$$

因为，$D=D'$　故

$$D=a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+a_{31}A_{31}$$

此式称为行列式D按第一列的展式。

一般地，n阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj} \tag{1}$$

$(j=1,2,\cdots,n)$ 我们称（1）式为行列式**按第j列的展式**（$j=1,2,\cdots,n$）。这样行列式可按某行展开，也可按某列展开。

性质 2　行列式某行（列）的所有元素同乘以常数 k，其结果等于用数k去乘行列式。

证　设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=ka_{i1}A_{i1}+ka_{i2}A_{i2}+\cdots+ka_{in}A_{in}$$
$$=k(a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in})$$
$$=kD$$

由此可见，如果行列式的某行（列）中所有元素有公因子。则可把公因子提到行列式号外面。

性质 3　交换行列式的任意两行(列)，行列式仅改变符号。(第i行与第j行等换记为$r_i \leftrightarrow r_j$)。

例如下面的行列式D，交换其第一、三两行，得

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix}$$

性质 4　行列式中有两行（列）的对应元素相等，则行列式等于零。

这是因为将这两行（列）交换，就有$D=-D$，从而$D=0$。

由性质 2 及性质 3 推知，若行列式中有两行（列）对应元素

成比例，则行列式等于零。

性质 5 如果行列式的某行（列）的各元素是两项之和，则这个行列式等于两个行列式之和。

例如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

性质 6 将行列式的某一行（列）的元素乘以同一数后，加到另一行（列）的对应元素上去，行列式的值不变。（以数k乘第j行（列）加到第i行（列）上，记作$r_i+kr_j(c_i+kc_j)$）。

例如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \xlongequal{r_2+kr_1} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+ka_{11} & a_{22}+ka_{12} & a_{23}+ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

性质 7 行列式某一行（列）各元素与另一行（列）的代数余子式乘积之和等于零。即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots\cdots+a_{in}A_{jn}=0 \qquad (i\neq j)$$

或

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0 \qquad (i\neq j)$$

例如三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

中，若以第一行的各元素与第二行的代数余子式乘积之和：

$$a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=0$$

根据n阶行列式的定义及性质7，得到下面重要的公式：

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\begin{cases}D\text{当 } i=j\\ 0\text{ 当 } i\neq j\end{cases} \tag{2}$$

或

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=\begin{cases}D\text{当 } i=j\\ 0\text{ 当 } i\neq j\end{cases} \tag{3}$$

在计算行列式时，直接应用展开式（2）或（3）并不一定简化计算，因为把一个n阶行列式的计算换成n个$n-1$阶行列式的计算并不减少工作量，所以，在运用降阶法计算行列式时，要结合本节所介绍的行列式性质，使某行（列）的元素尽可能多的变成零，便于按这行（列）展开时不必去计算元素O所在行与列的代数余子式。

例 1 计算四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}3&1&-1&2\\-5&1&3&-4\\2&0&1&-1\\1&-5&3&-3\end{vmatrix}$$

解

$$D=\begin{vmatrix}3&1&-1&2\\-5&1&3&-4\\2&0&1&-1\\1&-5&3&-3\end{vmatrix}\xlongequal[c_4+c_3]{c_1-2c_3}\begin{vmatrix}5&1&-1&1\\-11&1&3&-1\\0&0&1&0\\-5&-5&3&0\end{vmatrix}$$

按第三行展开

$$D=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}5&1&1\\-11&1&-1\\-5&-5&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5&1&1\\-11&1&-1\\-5&-5&0\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2+r_1}\begin{vmatrix}5&1&1\\-6&2&0\\-5&-5&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-6&2\\-5&-5\end{vmatrix}=(30+10)=40$$

例 2 证明行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\ a_{22}\ a_{33}$$

证 按第一行展开，

$$D=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\ a_{22}\ a_{33}$$

用数学归纳法可以证明n阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}\ a_{22}\ \cdots\ a_{nn} \qquad (4)$$

同理，可证n阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{22} & \cdots\cdots a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots\cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\ \cdots \\ 0 & 0 & \cdots\ \ a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}\ a_{22}\ \cdots\ a_{nn} \qquad (5)$$

形如(4)式、(5)式的行列式分别称为**下三角行列**与**上三角行列式**。

由此即可得到对角行列式（其中对角线上的元素是λ_i，未写出的数全是零)。

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix}=\lambda_1\ \lambda_2\ \cdots\ \lambda_n$$

例 3 计算

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$