序

居今日而欲致國家於富强之林，登斯民於康樂之境，其道無他，要在教育、文化、經濟諸方面力求進步而已。自然科學之研究與發展，屬於文化領域之一環，同時亦爲國防建設之主動力，其在教育設施方面，實佔有甚大之比重，久爲識者所共喻。

巴西華僑徐君銘信，身繫異邦，心縈祖國，鑒於自然科學之發展與夫建國前途所關之鉅，嘗思盡一己之力，爲邦人士格物致知之助。比年以來，其慨捐於國內學術機構者，固已爲數不貲，前歲之冬，復搜購德國著名函授學校之數學、物理、化學、生物等優良課本約五百萬言寄臺，經東海大學吳校長德耀與溫院長步頤之介紹，欲以迻譯刊行，嘉惠學子之任，委諸元吉，自維學殖荒落，本不敦敢，惟感於徐君所見者大，所志者遠，殊不宜過拂其意，爰勉受義務主編及統籌出版之命。嗣經先後約請江鴻（數學總執筆人）、宋澎、李煥燊、南登岐、孫賡年(物理學總執筆人)、張壽彭、陳喜棠、許巍文、黃友訓、傅貽椿、熊俊（生物學總執筆人）、廖可奇、劉泰庠、鍾恩寵、關德懋（以姓氏筆劃爲序）諸君分任迻譯，其事遂舉。顧以個人精力時間，均屬有限，一年以還，竭知盡能，時以能否符合信達雅之準則爲慮，幸賴各方碩彥陳力就列，各自靖獻，得如預期出書，以餉讀者，實爲元吉精神上莫大之收穫。今後倘蒙文教先進及讀者不吝匡翼，俾在吾國科學發展史上日呈緝熙光明之象，遂徐君之初願於萬一，並使其今後仍就此途徑邁進之志事，（徐君近復精選英文本初級科學百科全書，交由科學勵進中心* 譯印。）永感吾道不孤，邪許同聲，則尤元吉一瓣心香，朝夕禱祝者也。茲値本書出版伊始，謹誌涯略，並向協助譯印諸君子敬致感謝之忱。

中華民國五十一年元月湯元吉序於臺北

*該中心爲一不以營利爲目的之財團法人，其宗旨在於促進科學教育、發展科學研究及介紹科學新知。現任董事爲李熙謀、錢思亮、趙連芳、林致平、徐銘信、李先聞、戴運軌、鄭塑厚、湯元吉等九人。

徐氏基金會啓事

一、凡對本書任何一部分，或本會所印行之其他書籍，能在內容及文字方面，提供建議，致使讀者更易迅捷了解書中意義者，如被採納，當致酬美金十二元五角(折合新臺幣五百元)至一百二十五元（折合新臺幣五千元），以示謝意。

二、本會誠徵關於自然科學及機械、電機、電子等工程之中文創作或翻譯稿件，以適合於一般人士或中等學校以上學生自修之用者爲標準。稿費每千字美金二元五角（折合新臺幣一百元），特優譯著稿酬另議。

三、茲爲獎酬本會出版各書之作者及譯者起見，將於各書出版後之次年年底，核計其在臺灣、香港及星加坡三處之銷售數量，分配贈與其作者或譯者以下列三項獎金：

1. 銷數最多者美金6,000元
2. 第二多數者美金4,000元
3. 第三多數者美金2,000元

關於上開一、二兩項事宜，請逕函香港郵政信箱 1284 號徐氏基金會接洽。

編 輯 要 旨

一・本叢書包括數學、物理、化學、生物等四種。

二・本叢書物理、化學、生物等三種，均係採用德國魯斯汀(Rustin)函授學校之課本；數學一種，則係採用德國馬特休斯(Mathesius)函授學校之課本，分別遴請專家迻譯。

三・本叢書之供應對象，主要爲中等以上學校之學生、自行進修人士及從事教授各該有關課業之教師，故其內容亦以適合上述各界人士之需要爲主旨。

四・原書內於每一相當節段，均附有習題、複習題、試題及論文作業等，可使在學者增加反覆研討之機，自修者亦易得無師自通之樂。本叢書對於前三者均已予以保留，俾利讀者之研習。至於論文作業題目，本係該函授學校對於所屬學生之另一種教學措施，學生於作成論文後，校方尚需負修改之責，與本叢書旨趣未盡相同，故均於正文內予以省略，惟爲存眞起見，一俟本叢書出齊後，當彙印單行本，以供讀者參考。

五・本叢書因係依據原書格式譯輯而成，故未能於每一學科之首册中編列總目，擬俟全書出齊後，另行編印專册，以供讀者檢閱。

六・本叢書數學原文，每講約爲六萬字，而其餘各書字數自二萬餘字至四萬餘字不等，且各講自成段落，不能分割，故爲便利讀者及減輕讀者負擔，只能將其每二講或三講合印爲一册，字數遂在七萬餘字至九萬餘字之間。

七・本叢書所有各種科學名詞，一律採用國立編譯館輯譯，教育部審

定公布之名詞；但主編者認爲必要時，亦偶用其他譯名代替之；其爲上述公布名詞中所無者，則出於主編者或譯者之創擬。該項替代或創擬之名詞，是否妥善無疵，未敢自是，倘冀海內專家學者不吝賜教。

八・本叢書之迻譯工作係由多人執筆，行文屬辭，難免各具風格，主編者能力時間，均屬有限，故雖竭智盡慮，勉爲整理，亦僅能使其小異而大同，尚祈讀者諒之。

九・本叢書原文篇帙浩繁，約近五百萬字，出版須依一定進度，編者勢難將譯文與原文逐一核對，倘有未盡妥洽之處，亦請讀者隨時指教，俾於再版時更正，幸甚幸甚！

主編者謹識

數學第十七册目錄

上册 數　　微積分學　　頁數

下册 體　　平面解析幾何學

上册　　數

微積分學

在本叢書第十二册，第十四册及第十五册中，我們已提前講 160
過微積分計算的一部分（微分），目的是為了要對數學中的此一領域獲得初步之了解，而各位也跟着我們毫無畏懼地克服了幾個比較容易攀登的矮山峰，由此便可瞭望前面的那山還比此山高；其間路途崎嶇，乃是意料中事。故當我們繼續向此巔巒層疊的無窮境域前進與登高之前，必須暫時再在原處逗留一陣，比以前更為小心謹慎地看一看四週的情況。好比那些樹立在路旁的警告牌，我們從前只是很隨便的瞧了一瞧；好比阻塞於途中的懸崖，我們從前亦漫不經心的迂迴而過；又好比遇到絕壁時，我們從前也是毫不介意的從旁走過去了。因此，我們現在面臨的課題是得把以往學過的一切弄得更清楚更有把握些；同時還希望求得可靠之工具，以便很安全的繼續攀登數學之高峰。

I.　自然科學與數學之關係

假如人們要對自然界的任何現象（好比盛開之花）有所形容 11
時，自非借助於款式之數字和概念（亦即數學）不可。譬如說：櫻花具有**五個**雄蕊；花冠之輪廓是一**正五角形**。各位描寫自然界任一事物或一種現象時，倘不用數學的概念，結果必將成為非常枯燥乏味的一種叙述。由此可見，數學對於**自然科學**及控制自然之各種**工程知識**，實為一種最重要之輔助科學。

古代自然科學之主要任務是在積年累月的記載**恆久不變的**事實，因此那時候幾何學所研討的對象總是不動的圖形和剛體；而在計算方面則多半是包含固定數字之方程式。

一直等到**十七世紀**，自然科學才着重於**可變狀態**之觀察，並且從事研究這種變化之原因何在，所以它為了獲得許多問題之解答

，殆非借助于一種活動的數學不可。而所謂活動的數學，乃指已將過去的呆板性予以克服的一種數學而言，它所研討的對象已一變而爲活動的幾何圖形，以及第八册〔752〕節所講之**函數方程式**了。

自然界有許多現象之形成，並非由於一斷一續的躍進方式，却是**有連貫性的**，例如一個自由落體之速度就是如此。因此，現代自然科學對其輔助科學性之數學所要求的，是希望它在幾何學以及算術雙方都把“連續性”當作最重要概念之一來研究。

我們在第一册中曾經講過，縱使讀者諸君把本書用小一號所排印之各節忽略過去，亦不致影響以後各册內容之理解。這種說法雖亦適用於本册，但此次却要奉勸各位，仍以加以研讀爲宜。

II. 關於連續性

1） 連續性＝無間隙性

α） 幾何連續性

162 “連續”一詞的德文爲 *stetig*，和“始終” (*stets*) 一詞有聯帶關係；不論“始終”也好，“連續”也好，總是代表“時常”，“不中止”，“不間斷”，“沒有時間空隙”之意。由此可見，所謂連續云云乃與一種在**時間上繼續不斷的**動作或過程有關。譬如說：各位在兩小時之內連續不斷的研讀，意即各位在兩小時內毫不間斷的在用功讀書，並無片刻中輟。又好比一種音調會持續相當長久的時間，只要吹奏樂器或唱歌時不將產生聲音的氣流予以中斷，或拉四弦提琴時不斷的拉動樂弓，不使它離開樂弦。

假如畫圖的鉛筆尖在繪圖平面上繼續不斷的滑行，而無片刻之停歇的話，就會畫出無間斷的一條線來。

162 a

162 b

現在我們要問：就以上說明的所謂短暫的無間隙性而論，在〔162 *a*〕圖所畫之線段是否有連續不斷之意？對〔162 *b*〕圖而言，這是無法加以證實的，因爲繪圖筆尖之運動可在線段的任何一點，暫時的完全處於停止狀態，過了一段時間才從原來的地點繼續滑向前去。由此可見，〔162 *a*〕圖所示之線段**在時間上**可能並非毫無間歇地畫出來的；但此線段在我們看來，至少**在空間上是無間隙的**，而〔162 *b*〕圖所示却有六個間隙或裂縫。

時間概念是屬於物理，而不屬于幾何的範疇。參閱第五册中之〔478〕節！因此，一條線是否由于不斷的運動（即在時間上無間隙的情形下）形成的，幾何學是不管的。幾何學認爲重要的祇是**空間上的無間隙性**；假如一條線中沒有空隙或裂縫的話，幾何學就稱此線是具有連續性的。

這種幾何學上認爲非常重要的連續性，我們簡單稱之爲**無間隙性**；我們所以略去其前面的形容詞“空間上的”數字者，實因所謂“時間上的無間隙性”並不屬於幾何學的範圍之故。

據此，所謂一條連續不斷的＝沒有空隙的線，乃指“一氣呵成”所畫出來之線而言，亦即指繪圖鉛筆不應該在一處停留下來，另從其他一處從新向前滑行而言。例如一個圓圈是連續的＝無空隙的，又如一條直線，一種拋物線，一條正弦曲線，双曲線二枝之一等等，亦是如此；但第十册〔906〕節所講的一種完整的双曲線，第十五册〔99〕節所講的正切線，第十五册〔101〕節所講的餘切線等等，却都是不連續的＝有空隙的。

在此必須加以注意的，即一條虛線沒有一處是有連續性的。所有其他一處或多處顯示有空隙（或稱裂縫）之線，亦只能說有些地方是連續的＝無間隙的；但就整條線而言，却是不連續的。所以假如人們對於一條線（好比正切曲線）說它是不連續的，有空隙的，那末這句話的意思並非指該曲線根本是不連續，或是由許許多多孤立之點所組成的，而是指該曲線在一處或好幾處是不連續的而言。

在連續的＝無間隙的直線和曲線當中，又可分爲**閉塞的**和**開口的**兩種：好比圓是一種閉塞線，因爲我們用鉛筆畫圓的時候，是要回到原出發處的；但直線，拋物線以及正弦曲線等，却是開口線，因爲我們用鉛筆畫這些線之時，決不會回到開始作圖之處的。

習　題：

163

1）設用橡皮將一全圓擦去一小段，由此便形成一個缺口。試問此圓是否就變成一種不連續之曲線？

2）一段圓弧是否屬於開口曲線之一種？

一種有規律的，即決定於函數方程式的曲線，究竟有無缺口或裂縫，人們對此問題不妨暫且如此予以解答，即將該曲線好比畫於坐標系之內，看圖中何處是曲線之缺口；可是描繪曲線時，總是先根據函數方程式求出各個曲線點，然後按照我們的感覺將各點聯成順其勢而彎曲的曲線的。所以各位一定會表示懷疑，我們依此方法進行觀察，似乎還不能十分有把握地解答曲線

是否具有連續性的這個問題，因爲在任何先經計算，然後描繪出來的兩點之間，明明是有一個缺口的啊！何況每一張圖在空間上都是受有限制的，所以一條可不受限制繼續畫下去的曲線（例如正弦曲線），或者是一條超越繪圖紙之外的閉塞線，其不包括在那張圖中的部分曲線之是否具有連續性，是無法看得出來的。

因此，圖解法是不能解決一條曲線之是否有缺口或間隙這個問題的。因此，讓我們來研究一下，看看計算法（卽分析法）能不能令我們獲得較爲肯定的，最好是絕對可靠的答案。

但事先我們必須弄個明白，究竟在算術方面連續性＝無間隙性這一概念究竟有無成立可能。

β) 算術連續性

算術能否構成一序列無間隙性之數字？

164 我們倘欲表示一條直線（好比直角坐標系之 X 軸）是有連續性＝無間隙性的，這在幾何學上實爲輕而易舉之事，只要畫一條不間斷的直線，就可立卽指出它是不同於間斷的直線，因爲它沒有一處顯示間隙的。但算術能不能用簡單符號把這種無間隙性表達出來呢？

在算術中，最主要的表達方法是利用數字和方程式。到目前爲止，我們已使數字與一條直線發生了聯帶關係，卽在直線上任意假定一個零點，並將任意假定的一種長度單位既無間隙又不重叠地自零點向左右兩邊量取，而連續不斷的對這些分劃點配以相當之量度數。直線之無窮性，原則上是不難加以克服的，因爲數字的級數亦可不受限制的繼續排列下去的。

但算術對於連續性＝無間隙性能不能也加以支配呢？答案是正面的，假如一個數字（好比 2）是代表一種量，而可連續不斷的增大爲下面任何一個數字的話。但事實則不然！我們可以這樣來弄個一淸二楚：當我們一面用米突尺（卽具有 cm 分劃之規尺）引繪一條線段之時，一面就說出引至某分劃點之量度數。倘所畫線段之長爲 $5cm$ ，則我們首先讀出整數的厘米數：$0;1;2;3;4;5cm$ 。跟着再將該同一線段量一下，但讀出十分之一的厘米數： $0;1;2;\cdots\cdots 50mm$；隨後又量一下，再數一數百分之一的厘米數，卽自 1 數至 500 ，依此類推。爲使這種計算工作更臻確實可靠起見，不妨把所畫之線段加長，這樣一來，線段中間之分劃也就較前加大了。

我們對此計算工作可在腦海中無止境的繼續下去，卽可選用愈來愈小的度量單位。但我們卽使一再放大所量的線段，然而我們讀數時仍舊得以跳遠

的方式，從某一數跳到下一數，而決不會由某一數一滑就滑到下一數的，這也就等於說一個數字是不會連續增大的。所以數字的情形不同於直線，是談不上有連續性的。

但我們要問：倘於有理數之間插入無理數（好比於 3 與 4 之間插進 π）時，上述情形是否會略有不同呢？參閱第十三冊中之〔29〕節！譬如拉計算尺，由此數拉到另一數時可以說，現在我們到達分劃點 3，接着又到達 3.1 了等等；但就 π 之一數而言，就無法以一固定數的分劃點來表示它了（意即原則上是無法將 π 以一固定數來表示的）。故在算術方面既不能說，**就在此時我們**正好量到表示 π 的某某尺度數，亦不能把 π **看作除得盡的有限數字的。**

π 是如此，其他無理數（好比由 2 開平方所得之 1.414……）亦是如此。在計算方面，任何一個無理數只能決定於**兩個**數字（此二數字在數字直線上係相當於兩個分劃點，亦即必須將無理數包括於**兩個**極限**之內**，才能把它求出來。此二分劃固然可以使之非常接近，但還是彼此隔開的，只能一躍而過。欲從一個有理極限一走就走到另一極限（在此二極限之間有無理數存在），那是不可能之事。縱使在兩個有理數中間有無限多的無理數，亦非例外。

由此可見，我們就是引用無理數亦不能從一數促成到達另一數的連續進行。故數字之連續性和一線段之連續性相較，二者之意義是不大相同的；無論如何，幾何連續性和算術連續性是不能混爲一談的。**但所謂算術連續性（即數字之連續性），其意義究竟安在乎？**

我們還是拿 X 軸之例作爲研究幾何連續性之對象；我們知道，在 X 軸上繼續量度時，一定可以量到有限線段內任何一個有理數之點，並且亦可將每一個無理數之點任意包括在內，而不致有所遺漏。假如對這些無窮多的每一個點都可能配以一個量度數的話，我們便可求得一連串數不盡的實數，這些實數都是介於所假定的兩個極限之間，其中沒有一個實數是非被略去不可的。**此種排列法的確是行得通的！**

因此，我們對於數字的連續性，雖然不能說一個數本身會連續的增大，但由於數字與數字間的無窮盡連帶關係，却可對一條連續延長的線段中之每一個點都配以適當的量度數，或用任何兩個數字準確地給予它以一定之界限。

算術也可用同樣的方法支配 Y 軸之無間隙性：即它亦可用一個有理數或一個無理數來決定 Y 軸上任何一點之位置。所以說，任何一個假想可以

大至無窮盡的繪圖平面上必有無限多的點，而這些點中沒有一個是不能利用兩個方程式〔其形式爲 $P(x=\cdots;\ y=\cdots)$〕之排列，將其位置予以確定的，祇要先把直角坐標系決定了，並且將其二軸予以適當之劃分就行。由此可見，就固定函數 $y=f(x)$ 而言，凡能利用坐標系予以決定之任何一點，一定也能用計算法準確求出來的。

不但此也，算術在這方面還能比幾何學達成更多的任務哩！

第一，算術可以絕對不受限制的精度來表示 x 值和 y 值之大小，而畫法幾何學（即投影幾何）則否。第二，算術可以利用普通數字將一大套的函數包括於一個單獨的方程式之內（例如所有一次函數均可以唯一的方程式 $y=mx+b$ 表示之），可是幾何學就無法畫出一條具有一般性的直線，卻只能畫出一條直線來代表某種函數而已。

總而言之：一個數本身雖然是不能連續增大的，但在繪圖平面上卻沒有一個點不能利用數字和方程式確定其位置的。所以數字的連續性乃指可用數字來決定位置的無間隙性而言。

又就角來說，也適用上述的一般想法。我們只要注意任何車輪之轉動，便可看出輪上每一根直木（或稱輻）從原始位置開始轉動，形成任何大小之角而決不會有所遺漏的情形（即每一轉動必形成一個角之意）。可是當一個角如此連續的，不間斷的增大之時，所謂角之量度數並不隨之作連續的增大；它根本就不會增大的。但對任何一個角的大小，卻都可以配以一定的量度數。這一點等到我們以後討論連續的方向變動時，是極具重要性的。

γ) 曲線連續性之算術特徵

165 討論至此，我們既已看出，算術在原則上是有方法掌握幾何上的連續性的，故要回到原來的問題上去了：即相當於函數方程式 $y=f(x)$ 的曲線上究竟有無缺口或間隙，這個問題單靠算術是否能够得到答案呢？只要算術不依賴作圖，其本身就具有能力對函數方程式加以分析，從而判斷該曲線是否具有連續性，或必要時說明何處無連續性，便可正面的答復這個問題。

習　題：

1) 凡在直角坐標系中能够畫出的有規律之直線或曲線，試問能用具有 $y=f(x)$ 型之函數方程式表示出來否？

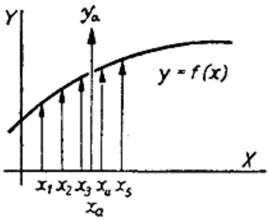
2) 各位既已否定了上題的答案，那末就以上所述的情況而論，爲什末就能對此一否定感到滿意呢？（解釋見下文）

我們在下面還要用到許多圖解，目的是爲了要借助于這些輔助圖形，

幫助各位對於算術方面應有之認識獲得迅速之了解 ，而並非有意要把最初提出之計算問題再使之轉變爲幾何作圖的問題。

爲了有把握地討論下去起見，讓我們首先來引用一個新名詞 **“跳板”**。所謂跳板者， 乃指想像中之線段而言 ， 由此線段可使曲線之缺口閉塞起來。

跳板可以平行於 X 軸，或平行於 Y 軸，或取任何一種傾斜的位置。我們暫不討論與 Y 軸成平行之跳板。



165 a

在〔165 a〕圖中我們畫了很小的一個缺口 ，其跳板的位置係與直角坐標系的兩個軸互成傾斜狀態 。我們假定曲線的構成是有規律的 ，與其相應的函數方程式則爲 $y=f(x)$ 。至於事實上有沒有這種含有缺口的曲線 ，隨後再加研究。目前我們祇作一般性的觀察如下：

在〔165 a〕圖中，除了曲線之外，我們還畫了許多縱標箭矢，由 X 軸一直畫到曲線的邊緣；那些箭頭乃是屬於橫標 x_1，x_2，x_3，x_4 及 x_5 的縱標 y_1，y_2，y_3，y_4 及 y_5 的。每一縱標都有**一定的**長度；其所屬之每一量度數亦有一定之數目，例如 $y_1=f(x_1)=1.1$； $y_4=f(x_4)=1.6$ 。可是其中有一條縱標箭矢 $y_a=f(x_a)$ 不與任何曲線點相遇，却正好通過曲線的缺口，以致無法配以一定的量度數。

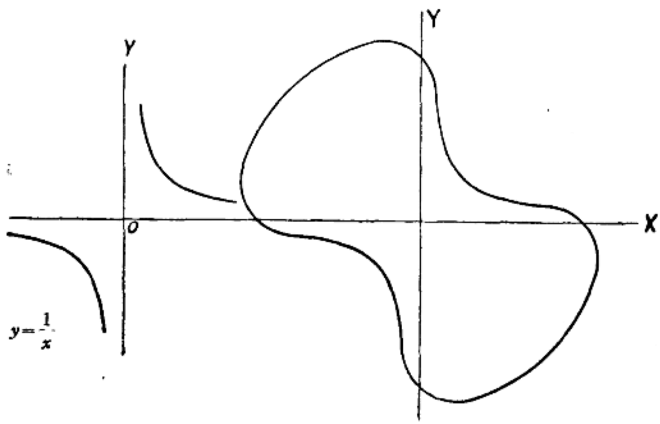
倘將此結論倒過來，並使之一般化的話，便爲：假如屬於一定橫標 x_a 的縱標 $y_a=f(x_a)$ 不具任何可予決定之値時，則縱標箭頭 y_a 必穿越曲線缺口而過。故對此等式

$$y_a=f(x_a)=\text{不能決定}$$

我們可作如是觀，卽在 x_a 處之曲線必有一個不連續的缺口，縱令不把曲線畫出來，我們都可如此推想。

現在，讓我們來尋求若干具有這種缺口的例子，其曲線方程式是我們 166
知道的。

$$\mathbf{y}=\frac{1}{\mathbf{x}}$$



166 a　　　　166 b

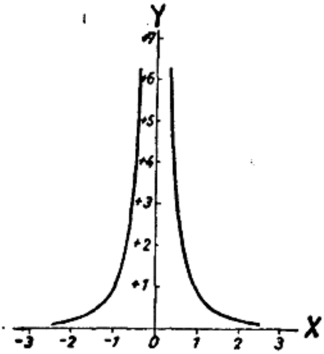
我們可否一氣呵成的把等邊双曲線（如〔166 *a*〕圖所示）畫出來？以往我們曾經假定不是這種情形，却認爲双曲線是由不相連繫之二枝所組成的。但這種假定是有充分理由的嗎？其實我們只要將双曲線之二枝予以相當的延長，亦可畫成如〔166 *b*〕圖所示之連續曲線。再從算術方面加以觀察：

不論分數 $\frac{1}{x}$ 之分母 x 其數值大小如何，分數本身總是一個可以寫出來的數值，——唯一例外是 $x=0$，因爲 $\frac{1}{0}$ 是不定式，我們已經講過好幾次了。就是寫成 $\frac{1}{0}\to\infty$（參閱第二册中之〔192〕節及第十二册中之〔954〕節），也不能求得一定的數值，因爲 ∞ 不是一個可予決定之數。至此當已證明曲線 $y=\frac{1}{x}$ 只在 $x_a=0$ 之處才會顯示一個缺口。

但我們要問：然則此處是不是有一缺口，其跳板是平行於 Y 軸的呢？亦即：此處是不是有一個缺口，其跳板並非屬於上面所講第一類的曲線的呢？請各位暫且獨立的先把這個問題弄個明白！——假如我們從双曲線負枝上接近於 Y 軸之一點經此缺口一躍而過，便到達正枝上同樣接近於 Y 軸之點，那末這是由左下方經過坐標中心到了右上方的一種斜式跳躍，並不與 Y 軸成平行。假如我們選擇的二點愈益接近於 Y 軸，則由跳躍方向與 Y 軸二者所夾之角必將愈來愈小，而趨近於 0；但此極限是永遠無法達到的。

習　題：雙曲線設從 $-\infty$ 跳到 $+\infty$，試問這種曲線缺口之大小如何？

$$y=\frac{1}{x^2}$$ 167



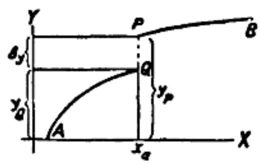
167 a

習　題：〔167 a〕圖所示之曲線，爲何只在 $x=0$ 之處才有一個缺口？

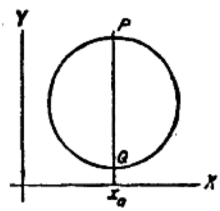
此曲線之性質和〔166 a〕圖所示曲線之性質完全不同：曲線 $y=\frac{1}{x^2}$ 所屬二枝與 X 軸相去愈遠，則二枝本身之距離（亦即二枝之間隙）必愈趨近於極限值 0，即使永遠到達不了零。故在 $x_a=0$ 的附近，永遠是一個缺口。讓我們來作一回顧：

凡縱標之一有不定值，而相鄰兩邊之縱標却有一定值之處，此曲線必是不連續的。

我們現在要轉而研究第二類的曲線缺口了；這種缺口的跳板是與 Y 軸平行的。 168



168 a



168 b

設將〔168 a〕圖中之 $AQPB$ 視爲一條曲線，其位於 Q 和 P 二點之間的缺口是垂直的；則顯而易見，以虛線表示的聯絡直線 QP 並非屬於曲線本身，乃是代表縱標 y_P 和 y_Q 之差 *) 的（即缺口之高）：$\Delta y=y_P-y_Q$。而這兩個縱標 y_P 和 y_Q 是可以求得的。此一特徵乃任何具有垂直

附註：

*) 所謂縱標差，嚴格言之，應爲縱標線段之差。假如因此不致引起誤解的話，亦可將"縱標線段"簡稱爲"縱標"。但我們要記取：照定義來說，所謂縱標乃指純粹數字，即不附任何單位之量度數而言，並不代表線段或量。

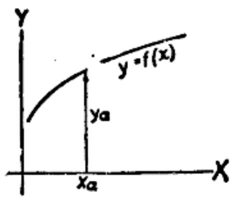
跳板之缺口所具有。

我們現在可否倒過來說：就曲線 $y=f(x)$ 而言，假如有兩個不相等的縱標屬於一定之橫標 x_a 時，則此曲線是不是非在此處有一缺口不可？只要一望〔168 b〕圖，便可否定這個問題。因此，我們對於具有垂直跳板之缺口，必須採取另外一種計算方法才行。這個問題我們不要忽視，但答案留待下文再行討論。

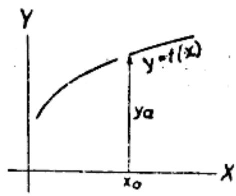
169 到目前爲止，我們只學過**間隙性**的計算法，並且只對含有水平或傾斜跳板之缺口已有充分之認識，但對含有垂直跳板的缺口却還不知道其十分明確之特徵何在。

但在算術上什麼才是無間隙性的特徵呢？

一條曲線是不是因爲 x_a 所屬之縱標具有可以決定之值，就不會在橫標等於 x_a 之處有一間隙呢？此一問題，可讓〔169 *a* 及 *b*〕二圖來給各位以

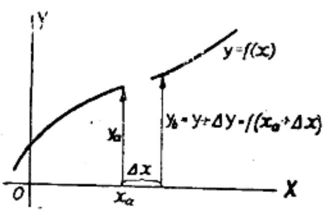


169 a



169 b

正確的答復！在此二圖所示之曲線中，縱標 y_a 係與曲線點相遇，故 y_a 必有一個可以測定之值；但此曲線點不是位於缺口開始之處（參看〔169 *a*〕圖），便是位于缺口之末尾（參看〔169 *b*〕圖）。假如我們僅僅注意對 y_a 所求得的可以測定之值時，那末對此缺口就可能忽略過去了。基於這個理由，我們始非採取另外一種方法以確定曲線之無間隙性不可。讓我們來根據〔169 *c*〕圖，加以研究：圖中之 y_a 正好位於缺口左面開始之處。我們另外選擇一個縱標 y_b，它是靠右邊與 y_a 相距 Δx 而與曲線相遇於一點。



169 c

依據曲線方程式，可知 y_b 之長乃與所屬橫標有關，即 $y_b=f(x_a+\Delta x)$。按照曲線之形狀，y_b 可能大於 y_a，或小於 y_a，亦可能等於 y_a。（請各位對

此情形舉幾個例子，並且畫出圖來看！）

倘令 Δx 逐漸變小，以致縱標 y_b 向左移動，則此遊移之縱標仍可具有可以測定之值（因爲它還是與曲線會合的）；但最後 y_b 必將到達缺口之右邊，而闖入無窮無盡之處，從此至缺口開始之處，y_b 就不再有一個可以測定之值了。

可是假如 x_a 的右方**沒有缺口**的話，則遊移之縱標 y_b 必保持若干可以測定之值，**一直等到它與縱標 y_a 合併爲一**（即 $\Delta x=0$）時而後止；在此情形下，y_b 之長恰好等於 y_a，亦即等於 $f(x_a)$。

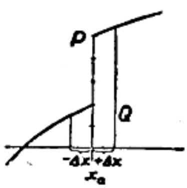
結論：函數 $y=f(x)$ 在横標 $=x_a$ 之處是連續的＝無間隙的，假如 $y_a=f(x_a)$ 具有一個可以測定之值，以及假如

$$\lim_{\Delta x\to 0} f(x_a+\Delta x)=f(x_a)$$ 的話。

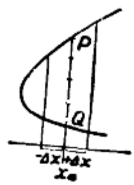
各位務必弄個明白，上式實可代表我們對於遊移縱標所作觀察的簡單說法！

上式中 *limes* 下面的假定 $\Delta x\to 0$，其意義與增量比略有不同：在增量比中，分數 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 之分母（即 Δx）應該趨近於極限值 0，**雖然事實上是永遠無法達到的**。而在上面求曲線連續性之算式中，却將此極限包括在內。

我們根據含有水平或傾斜跳板的缺口所展成之算式，是否也可用以排斥含有垂直跳板之缺口呢？。



169 d



169 e

在「169 *d*」圖中，有兩個不相等的縱標是屬於横標 x_a 的，例如 +5 和 +2；屬於 $x+\Delta x$ 者是一個稍爲大一點的縱標，約爲 +5.3；屬于 $x-\Delta x$ 者是一個比 +2 小一點的縱標。當 $|\Delta x|$ 逐漸變小而接近於極限值 0 時，則從右邊而來的游移縱標可達 +5，從左邊而來者可達 +2 之值。故由算式 $\lim\limits_{\Delta x\to 0} f(x_a\pm\Delta x)=f(x_a)$ 所求得的 $f(x_a)$ 並非**一個**却是兩個不同的可以測定之值。倒過來也可以說：假如由此極限算式只能爲 $f(x_a)$ 求得一個一定值，則在横標 x 之處即無垂直跳板存在可能。因此可以總括如

下：

> 函數 $y=f(x)$ 在橫標 x_a 之處是連續的＝無間隙的，只要 (α) $y_a=f(x_a)$ 有一個可以決定之值，又 (β)
>
> $$\lim_{\Delta x\to 0} f(x_a\pm \Delta x)=f(x_a)$$

我們還要研究一下如〔169 e〕圖所示之情形：屬於橫標 x_a 者是兩個不等長的縱標 $+5$ 及 $+1$；但曲線依然是無間隙的。假如我們對於每一個屬於 x_a 的縱標分別進行 *limes* 之研究，則可求得二列縱標；其中之一列是由兩邊連續前進而到達 $+5$，另一列縱標則由兩邊連續進行而到達 $+1$。因此，這條曲線至少在此處 (x_a) 是無缺口的。由此可知，極限公式 $\lim\limits_{\Delta x\to 0} f(x_a\pm \Delta x)=f(x_a)$ 對于此等曲線之有連續性，也可提供保證，祇不過對於每一部分曲線必須分別加以探討而已。

在其他數學書中，連續性算式的寫法略有不同。一般都是以 x 代表橫標 x_a，即將該算式寫成 $\lim\limits_{\Delta x\to 0} f(x+\Delta x)=f(x)$；尤其當人們確認一條曲線在任何地方（即不論 x 之大小）都無缺口時，就是如此寫法。又在極限算式內如以單純之正號（+）代替 Δx 前面之双符號（±），也是有其意義的。

最後我們還要說明從 Rothe 氏所著"高等數學"中摘錄而來之最簡單式子：

$$\text{“}\Delta y\to 0，\ 如令\ \Delta x\to 0\text{”}$$

"假如在所有地方函數之變動（即因變數之變動）隨幅角之變動（即自變數之變動）變爲無限小（意即趨近於零）並包括零在內時，則此函數是連續的（即就無限制的曲線而言，其連續性是在 x 之有限範圍內；就閉塞之曲線而言，其連續性乃在曲線本身所在之範圍內"）。

170 現在，讓我們來利用上面所求得之極限方程式，進而研究幾條固定曲線之連續性＝無間隙性。

$$y=mx+b$$

各位也許會提出異議來說：這一函數方程式是我們早就學過的，它是第八册〔755〕節所講的直線方程式；而直線在任何情形之下都是沒有間隙的，實在用不着再用計算法來證明其連續性。雖然如此，但各位的理由並