

610509

317
3213.1

纯粹数学与应用数学专著 第7号

哥德巴赫猜想

潘承洞 潘承彪 著

科学出版社

内 容 简 介

本书系统介绍有关著名数学难题——Goldbach 猜想的研究成果,特别是我国数学家的重大贡献,同时介绍研究这一问题所要用到的一些重要方法。

纯粹数学与应用数学专著 第7号

哥 德 巴 赫 猜 想

潘承洞 潘承彪 著

*

科 学 出 版 社 出 版

北京朝阳门内大街137号

中 国 科 学 院 印 刷 厂 印 刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1981年2月第 一 版 开本: 850×1168 1/32

1981年2月第一次印刷 印张: 10 5/8

印数: 精 1—3,600 插页: 2

平 1—5,000 字数: 277,000

统一书号: 15031·1479

本社书号: 2038·13—1

定 价: 精 装 本 2.50 元
平 装 本 1.65 元

科技新书目: 182-精 21 平 22

序

Goldbach (哥德巴赫)猜想是 1742 年提出来的,它是解析数论的中心问题之一。二百多年来,许多数学家为之付出了艰苦的劳动。然而,仅在最近六十年,对这个著名数学难题的研究才取得了一系列成果,并大大推动了整个解析数论的发展,但是,这一猜想迄今仍然没有被证明。看来,离到达这一问题的最终解决还有一段漫长的路。或许可以认为,目前对 Goldbach 猜想乃至整个解析数论的研究,正处于一个期待着新突破的相对停滞阶段。Goldbach 猜想的研究差不多涉及了解析数论中所有的重要方法。因此,对过去的工作做一个阶段性的总结以利于今后的研究,是十分必要的。当然,这一重要的工作不是我们力所能及的。但基于上述原因,并抱着抛砖引玉的愿望,我们写了这一本书。希望能把有关 Goldbach 猜想的最重要的研究成果,特别是研究这一问题的最重要的方法做一尽可能系统的介绍,以供有志于研究 Goldbach 猜想和解析数论的数学工作者参考。

早在三十年代,华罗庚教授就开始了对于这一猜想及其它著名解析数论问题的研究,并得到了许多重要成果;解放后不久,他就在中国科学院数学研究所组织了一批青年数学工作者继续从事这方面的研究。稍后,我的导师闵嗣鹤教授在北京大学数学力学系开设了解析数论专门化课程。在他们的热情指导和精心培养下,我国年轻的数学工作者对解析数论中许多著名问题的研究做出了重要贡献。可以认为,解析数论是迄今为止我国在近代数学中取得重大进展的最突出的分支之一,其中对 Goldbach 猜想的研究所取得的成就尤其引人瞩目。总结我国数学工作者的这些成就,正是本书的主要目的之一。

在本书的写作过程中,始终得到了山东大学党组织的热情关

怀和大力支持,我们谨致以深切的谢意。

我们衷心感谢华罗庚教授对撰写本书所给予的宝贵指导;衷心感谢陈景润教授,王元教授和丁夏畦教授,他们对本书的写作提供了极为有益的帮助和意见。我们还要对裘卓明,楼世拓,姚琦和于秀源等同志所给予的帮助表示诚挚的谢意。最后,我们要感谢科学出版社的同志,他们为本书的编辑出版作了大量的工作,没有他们的帮助,这本小册子是不可能这样快与读者见面的。

由于我们水平所限,书中缺点、错误和遗漏之处在所难免,切望读者不吝指教。

潘承洞

一九七九年三月

符 号 说 明

现将全书常用符号说明如下:

1. a, b, h, l, m, n, q 等表示整数;
 p, p', p_1, p_2, \dots 等表示素数.
2. c, c_1, c_2, \dots 表示正常数. 除第十一章外, 每一章中的正常数 c_1, c_2, c_3, \dots 均按在该章中出现先后的次序各自编号.
3. $e(x) = e^{2\pi i x}$.
4. $a|b$: a 整除 b ; $a \nmid b$: a 不能整除 b ; $p^k || a$: $p^k | a$ 但 $p^{k+1} \nmid a$.
5. (a, b, c, \dots, l) : a, b, c, \dots, l 的最大公约数;
 $[a, b, c, \dots, l]$: a, b, c, \dots, l 的最小公倍数.
6. $a \equiv b (q)$: $q | (a - b)$
7. $[x]$: 不超过 x 的最大整数;
 $\{x\} = x - [x]$; $\langle x \rangle = \min(\{x\}, 1 - \{x\})$.
8. $\chi(n), \chi_q(n), \chi(n) \bmod q$: 均表示模 q 的 Dirichlet 特征函数, 有时可省去 n 不写.

$$9. \sum'_{h=1}^q : \sum_{\substack{h=1 \\ (h, q)=1}}^q .$$

10. \sum_{χ_q} : 对模 q 的所有特征求和, 有时 q 可省去不写.
11. $\sum_{\chi_q}^*$: 对模 q 的所有原特征求和, 有时 q 可省去不写.
12. $\chi_q \iff \chi_q^*$, $\chi \bmod q \iff \chi^* \bmod q^*$, $\chi \iff \chi^*$: 均表示 χ^* 为对应于 χ 的原特征, χ 为由原特征 χ^* 所导出的特征, 见第一章 § 1(6), (6').

$$13. \text{Gauss 和: } G_\chi(m) = \sum_{h=1}^q \chi(h) e\left(\frac{mh}{q}\right), \text{ 特别地, } \tau(\chi) =$$

$G_x(1)$.

14. Ramanujan 和: $C_q(m) = G_{\chi_q^0}(m)$, χ_q^0 为模 q 的主特征.

15. Euler 函数 $\phi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$

16. $\nu_1(n)$: n 的不同的素因子的个数;

$\nu_2(n)$: n 的所有的素因子的个数(按重数计算).

17. Möbius 函数

$$\mu(n) = \begin{cases} (-1)^{\nu_1(n)}, & n \text{ 无平方因子;} \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

18. 除数函数 $d(n)$: $d(n)$ 等于 n 的所有正除数的个数.

19. Mangoldt 函数

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p, & n = p^k, p \text{ 是素数;} \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

20. RH: Riemann 假设; GRH: 广义 Riemann 假设. 见第四章.

21. $N(\alpha, T)$, $N(\alpha, T, \chi)$, $N(\alpha, T, q)$, $N^*(\alpha, T, q)$ 等的定义见第四章(1), (3), (4), (5).

$$22. \pi(x) = \sum_{p \leq x} 1;$$

$$\phi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n).$$

$$23. \pi(x; q, l) = \sum_{\substack{p \leq x \\ p \equiv l(q)}} 1;$$

$$\phi(x; q, l) = \sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv l(q)}} \Lambda(n).$$

$$24. \pi(x; a, q, l) = \sum_{\substack{ap \leq x \\ ap \equiv l(q)}} 1;$$

$$\phi(x; a, q, l) = \sum_{\substack{an \leq x \\ an \equiv l(q)}} \Lambda(n).$$

$$25. S(\alpha, x) = \sum_{p \leq x} c(\alpha p);$$

$$S^{(1)}(\alpha, x) = \sum_{p \leq x} c(\alpha p) \log p;$$

$$S^{(2)}(\alpha, x) = \sum_{n \leq x} c(\alpha n) \Lambda(n).$$

$$26. \phi(x, \chi) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) \chi(n).$$

27. 命题 $\{a, b\}$: 每一个大偶数可以表为一个不超过 a 个素因子的乘积及一个不超过 b 个素因子的乘积之和.

28. 设 $A > 0$, 符号 $B = O(A)$ 或 $B \ll A$, 均表示存在一个正常数 c , 使 $|B| \leq cA$. 在一些问题中, 常数 c 可能依赖于某些参数, 则将它们标注在符号“ O ”或“ \ll ”的右下方, 或另加说明; 当这些参数不重要时, 则不具体指出.

《纯粹数学与应用数学专著》丛书

主 编 华 罗 庚

副 主 编 (以姓氏笔划为序)

齐 民 友	江 泽 涵	吴 文 俊
吴 大 任	苏 步 青	柯 召

目 录

引言	1
第一章 特征与 Gauss 和	19
§ 1. 特征	19
§ 2. Gauss 和	22
第二章 特征和估计与大筛法	32
§ 1. 最简单的特征和估计	32
§ 2. 经典的特征和均值估计	34
§ 3. 大筛法	42
§ 4. 新的特征和均值估计	49
第三章 ζ 函数与 L 函数的中值公式	55
§ 1. 一些引理	55
§ 2. ζ 函数的四次中值公式	63
§ 3. L 函数的四次中值公式	67
§ 4. L 函数的二次中值公式	71
第四章 零点分布 (一)	74
§ 1. ζ 函数与 L 函数的零点密度估计	76
§ 2. ζ 函数零点密度估计的改进	82
第五章 线性素变数三角和估计	91
§ 1. Виноградов 方法	91
§ 2. 零点密度估计方法	103
§ 3. 复变积分法	109
§ 4. 对小 q 的线性素变数三角和估计	115
第六章 三素数定理	119
§ 1. Goldbach 问题中的圆法	119
§ 2. 非实效方法	122
§ 3. 实效方法	128
§ 4. 奇数表为三个几乎相等的奇素数之和	133

§ 5. $N = p_1 + p_2 + p_3^4$	136
第七章 SELBERG 筛法	148
§ 1. 筛函数	148
§ 2. 最简单的 Selberg 上界筛法	154
§ 3. 函数 $G_1(\xi, x)$ 和 $G_1(x)$	159
§ 4. 筛函数估计的两个基本定理	170
§ 5. 函数 $F(u)$ 和 $f(u)$	175
§ 6. Jurkat-Richert 定理	183
第八章 算术数列中素数分布的均值定理	200
§ 1. Vombieri-Виноградов 定理	206
§ 2. 一类新的均值定理	209
第九章 陈景润定理	225
§ 1. 命题 $\{1, 2\}$	225
§ 2. $D(N)$ 上界估计的改进	238
第十章 零点分布 (二)	253
§ 1. L 函数的若干引理	253
§ 2. Turán 方法	257
§ 3. L 函数非零区域的扩展	262
§ 4. L 函数在直线 $\sigma = 1$ 附近的零点密度估计	273
第十一章 Goldbach 数 (一)	279
§ 1. $E(x)$ 的初步估计	279
§ 2. $E(x)$ 的进一步估计	287
§ 3. 小区间上的 Goldbach 数	306
第十二章 Goldbach 数 (二)	313
§ 1. 一些引理	314
§ 2. 定理的证明	320
参考文献	324

引 言

1742年，德国数学家 Christian Goldbach (1690—1764) 在他的好朋友、大数学家 Leonhard Euler (1707—1783) 的几次通信中，提出了关于正整数和素数之间关系的两个推测，用现在确切的话来说，就是：

(A) 每一个不小于6的偶数都是两个奇素数之和；

(B) 每一个不小于9的奇数都是三个奇素数之和。

这就是著名的 Goldbach 猜想。我们把猜想(A)称为“关于偶数的 Goldbach 猜想”，把猜想(B)称为“关于奇数的 Goldbach 猜想”。由于

$$2n + 1 = 2(n - 1) + 3,$$

所以，从猜想(A)的正确性就立即推出猜想(B)亦是正确的。Euler 虽然没有能够证明这两个猜想，但是对它们的正确性是深信不疑的。1742年6月30日，在给 Goldbach 的一封信中他写道：我认为这是一个肯定的定理，尽管我还不能证明出来。

Goldbach 猜想提出到今天已经有 237 年了，可是至今还不能最后地肯定它们的真伪。人们积累了许多宝贵的数值资料¹⁾，都表明这两个猜想是合理的。这种合理性以及猜想本身所具有的极其简单、明确的形式，使人们和 Euler 一样，也不由得不相信它们是正确的。因而，二百多年来这两个猜想一直吸引了许许多多数学工作者和数学爱好者，特别是不少著名数学家的注意和兴趣，并为此作出了艰巨的努力。但是，直至本世纪，对这两个猜想的研究才取得了一系列引人瞩目的重大进展。迄今得到的最好结果是，(1) 1937年，苏联数学家 И. М. Виноградов^[132] 证明了：每一个

1) 例如，Shen Mok Kong 验证了猜想(A)对于所有不超过 33×10^6 的偶数都是正确的。

充分大的奇数都是三个奇素数之和；(2) 1966年，我国数学家陈景润^[8]证明了：每一个充分大的偶数都可以表为一个素数与一个不超过两个素数的乘积之和。这是两个十分杰出的成就。Виноградов的结果基本上证明了猜想(B)是正确的¹⁾。所以，现在说到Goldbach猜想时，总是只指猜想(A)，即关于偶数的Goldbach猜想。

下面我们简要地谈一谈研究Goldbach猜想的历史。

从提出Goldbach猜想到十九世纪结束这一百六十年中，虽然许多数学家对它进行了研究，但并没有得到任何实质性的结果和提出有效的研究方法。这些研究大多是对猜想进行数值的验证，提出一些简单的关系式或一些新的推测(见L. E. Dickson: *History of the Theory of Numbers*, I, 421—425)。总之，数学家们还想不出如何着手来对这两个猜想进行哪怕是有条件的极初步的有意义的探讨。但我们也应该指出：古老的筛法，以及在此期间内Euler, Gauss, Dirichlet, Riemann, Hadamard等在数论和函数论方面所取得的辉煌成就，为二十世纪的数学家们对猜想的研究提供了强有力的工具和奠定了不可缺少的坚实基础。

1900年，在巴黎召开的第二届国际数学会上，德国数学家D. Hilbert在其展望二十世纪数学发展前景的著名演讲中，提出了二十三个他认为是最重要的没有解决的数学问题，作为今后数学研究的主要方向，并期待在这新的一个世纪里，数学家们能够解决这些难题。Goldbach猜想就是Hilbert所提出的第八问题的一部分。但是，在此以后的一段时间里，对Goldbach猜想的研究并未取得什么进展。1912年，德国数学家E. Landau在英国剑桥召开的第五届国际数学会上十分悲观地说：即使要证明下面较弱的命题(C)，也是当代数学家所力不能及的：

1) 后来，Бороздкий^[9]具体计算出，当奇数 $N \geq e^{e^{16.038}}$ 时，就一定可以表为三个奇素数之和。 $e^{e^{16.038}}$ 是一个比10的400万次方还要大的数(目前知道的最大素数是Mersenne素数 $2^{21701}-1$ ，这只是一个6533位数)。而对于如此巨大的数字，我们根本没有可能来一一验证对所有小于它的每一个奇数来说，猜想(B)是否一定成立。所以，Виноградов是基本上解决了猜想(B)。

(C) 存在一个正整数 k , 使每一个 ≥ 2 的整数都是不超过 k 个素数之和.

1921 年, 英国数学家 G. H. Hardy 在哥本哈根数学会作的一次讲演中认为: Goldbach 猜想可能是没有解决的数学问题中的最困难的一个.

就在一些著名数学家作出悲观预言和感到无能为力的时候, 他们没有料到, 或者没有意识到对 Goldbach 猜想的研究正在开始从几个不同方向取得了为以后证明是重大的突破, 这就是: 1920 年前后, 英国数学家 Hardy, Littlewood 和印度数学家 Ramanujan 所提出的“圆法”^{[41], [42]}; 1920 年前后, 挪威数学家 Brun^[9] 所提出的“筛法”; 以及 1930 年前后, 苏联数学家 Шнирельман^[109] 所提出的“密率”. 在不到 50 年的时间里, 沿着这几个方向对 Goldbach 猜想的研究取得了十分惊人的丰硕成果, 同时也有力地推进了数论和其它一些数学分支的发展.

(一) 圆 法

首先我们来谈谈圆法. 从 1920 年开始, Hardy 和 Littlewood 以总标题为《Some problems of “Partitio numerorum”》发表了七篇论文. 在这些文章中, 他们系统地开创与发展了堆垒素数论中的一个崭新的分析方法. 其中 1923 年发表的第 III, V 二篇文章就是专门讨论 Goldbach 猜想的^[42]. 这个新方法的思想在 1918 年 Hardy 和 Ramanujan^[41] 的文章中已经出现过. 后来人们就称这个新方法为 Hardy-Littlewood-Ramanujan 圆法. 对于 Goldbach 猜想来说, 圆法的思想是这样的: 设 m 为整数, 由于积分

$$\int_0^1 e(m\alpha) d\alpha = \begin{cases} 1, & m = 0; \\ 0, & m \neq 0, \end{cases} \quad (1)$$

其中 $e(x) = e^{2\pi i x}$, 所以方程

$$N = p_1 + p_2, \quad p_1, p_2 \geq 3 \quad (2)$$

的解数

$$D(N) = \int_0^1 S^2(\alpha, N) e(-N\alpha) d\alpha; \quad (3)$$

方程

$$N = p_1 + p_2 + p_3, \quad p_1, p_2, p_3 \geq 3 \quad (4)$$

的解数

$$T(N) = \int_0^1 S^3(\alpha, N) e(-N\alpha) d\alpha, \quad (5)$$

其中

$$S(\alpha, N) = \sum_{2 < p < N} e(\alpha p). \quad (6)$$

这样, 猜想 (A) 就是要证明: 对于偶数 $N \geq 6$ 有

$$D(N) > 0; \quad (7)$$

猜想 (B) 就是要证明: 对于奇数 $N \geq 9$ 有

$$T(N) > 0. \quad (8)$$

因此, Goldbach 猜想就被归结为讨论关系式 (3) 及 (5) 中的积分了. 显然, 为此就需要研究由 (6) 所确定的以素数为变数的三角和. 他们猜测三角和 (6) 有如下的性质: 当 α 和分母“较小”的既约分数“较近”时, $S(\alpha, N)$ 就取“较大”的值; 而当 α 和分母“较大”的既约分数“接近”时, $S(\alpha, N)$ 就取“较小”的值 (这里的“较小”、“较大”、“较近”的确切含义将在下面作进一步的说明). 进而他们认为, 关系式 (3) 及 (5) 中积分的主要部分是在以分母“较小”的既约分数为中心的一些“小区间” (即那些和它距离“较近”的点组成的区间) 上, 而在其余部分上的积分可作为次要部分而忽略. 这就是圆法的主要思想. 为了实现这一方法, 首先就要把积分区间分为上述的二部分, 其次把主要部分上的积分计算出来, 最后要证明在次要部分上的积分相对于前者来说可以忽略不计. 下面我们更具体地来加以说明.

设 Q, τ 为二个正数,

$$1 \leq Q \leq \tau \leq N. \quad (9)$$

考虑 Farey 数列

$$\frac{a}{q}, \quad (a, q) = 1, \quad 0 \leq a < q, \quad q \leq Q. \quad (10)$$

并设¹⁾

$$E(q, a) = \left[\frac{a}{q} - \frac{1}{\tau}, \frac{a}{q} + \frac{1}{\tau} \right] \quad (11)$$

以及²⁾

$$E_1 = \bigcup_{1 \leq q \leq Q} \bigcup_{\substack{0 \leq a < q \\ (a, q) = 1}} E(q, a), \quad (12)$$

$$E_2 = \left[-\frac{1}{\tau}, 1 - \frac{1}{\tau} \right] \setminus E_1. \quad (13)$$

容易证明, 满足条件

$$2Q^2 < \tau \quad (14)$$

时, 所有的小区间 $E(q, a)$ 是两两不相交的(第六章 § 1). 我们称 E_1 为基本区间 (Major arcs), E_2 为余区间 (Minor arcs). 如果一个既约分数的分母不超过 Q , 我们就说它的分母是“较小”的, 反之就说是“较大”的. 如果两个点之间的距离不超过 τ^{-1} , 我们就说是“较近”的. 显然, 当 $\alpha \in E_1$ 时, 它就和一个分母“较小”的既约分数“接近”. 可以证明(见第六章 § 1 引理 2), 当 $\alpha \in E_2$ 时, 它一定和一个分母“较大”的既约分数“接近”. 这样, 利用 Farey 数列就把积分区间 $\left[-\frac{1}{\tau}, 1 - \frac{1}{\tau} \right]$ 分成了圆法所要求的二部分 E_1 和 E_2 ³⁾.

因而, 我们有

$$D(N) = \int_{-\frac{1}{\tau}}^{1-\frac{1}{\tau}} S^2(\alpha, N) e(-N\alpha) d\alpha = D_1(N) + D_2(N), \quad (15)$$

其中

$$D_i(N) = \int_{E_i} S^2(\alpha, N) e(-N\alpha) d\alpha, \quad i = 1, 2;$$

以及

1) 有时亦取 $E(q, a) = \left[\frac{a}{q} - \frac{1}{q\tau}, \frac{a}{q} + \frac{1}{q\tau} \right]$.

2) \cup 与 \setminus 是集合的和与差的符号. 由于被积函数的周期为 1, 为方便起见, 我们把积分区间 $[0, 1]$ 改为 $\left[-\frac{1}{\tau}, 1 - \frac{1}{\tau} \right]$.

3) 这种方法通常称为 Farey 分割

$$T(N) = \int_{-\frac{1}{4}}^{1-\frac{1}{4}} S^3(\alpha, N) e(-N\alpha) d\alpha = T_1(N) + T_2(N), \quad (16)$$

其中

$$T_i(N) = \int_{E_i} S^3(\alpha, N) e(-N\alpha) d\alpha, \quad i = 1, 2.$$

圆法就是要计算出 $D_1(N)$ 及 $T_1(N)$, 并证明它们分别为 $D(N)$ 及 $T(N)$ 的主要项, 而 $D_2(N)$ 及 $T_2(N)$ 分别可作为次要项而忽略不计.

Hardy-Littlewood^[42, III] 首先证明了一个重要的假设性结果: 如果存在一个正数 $\theta < \frac{3}{4}$, 使得所有的 Dirichlet L 函数的全体零点都在半平面 $\sigma \leq \theta$ 上, 则充分大的奇数一定可以表为三个奇素数之和, 且有渐近公式

$$T(N) \sim \frac{1}{2} \mathfrak{S}_3(N) \frac{N^2}{\log^3 N}, \quad N \rightarrow \infty, \quad (17)$$

其中

$$\mathfrak{S}_3(N) = \prod_{p|N} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) \prod_{p \nmid N} \left(1 + \frac{1}{(p-1)^3}\right). \quad (18)$$

同时他们猜测^[42, III], 对于偶数 N 应该有

$$D(N) \sim \mathfrak{S}_2(N) \frac{N}{\log^2 N}, \quad N \rightarrow \infty, \quad (19)$$

其中

$$\mathfrak{S}_2(N) = 2 \prod_{p>2} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) \prod_{\substack{p|N \\ p>2}} \frac{p-1}{p-2}. \quad (20)$$

Hardy-Littlewood^[42, V] 还证明了一个假设性结果: 如果广义 Riemann 猜测成立, 那末几乎所有的偶数都能表为二个奇素数之和. 更精确的说, 若以 $E(x)$ 表示不超过 x 且不能表为二个奇素数之和的偶数个数, 他们在 GRH 下证明了

$$E(x) \ll x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}, \quad (21)$$

其中 ε 为一任意小的正数.

可以看出, 圆法如果成功的话, 是十分强有力的. 因为它不但

证明了猜想的正确性，而且进一步得到了表为奇素数之和的表法个数的渐近公式，这是至今别的方法都不可能做到的。虽然 Hardy-Littlewood 没有证明任何无条件的结果，但是他们所创造的圆法及其初步探索是对研究 Goldbach 猜想及解析数论的至为重要的贡献，为人们指出了一个十分有成功希望的研究方向。

1937 年，T. Esterman^[27] 证明：每一个充分大的奇数一定可以表为两个奇素数及一个不超过两个素数的乘积之和。

1937 年，利用 Hardy-Littlewood 圆法，И. М. Виноградов 终于以其独创的三角和估计方法无条件地证明了：每一个充分大的奇数都是三个奇素数之和，且有渐近公式 (17) 成立。这就基本上解决了猜想 (B)，是一个重大的贡献。通常把这一结果称为 Goldbach-Виноградов 定理，简称三素数定理。Page 在 1935 年（见第十章引理 5）及 Siegel 在 1936 年（见第十章引理 9）证明了关于 L 函数例外零点的两个十分重要的结果，由此可推出相应的算术级数中素数分布的重要定理（见第六章 § 2 引理 2 及 § 3 引理 7）。Виноградов 首先利用这两个结果之一（用任意一个结果都可以）证明了：对适当选取的 Q 及 τ ，有

$$T_1(N) \sim \frac{1}{2} \mathfrak{S}_3(N) \frac{N^2}{\log^3 N}, \quad N \rightarrow \infty, \quad (22)$$

（见第六章 § 2 定理 1）。而他的主要贡献是在于利用他自己创造的素变数三角和估计方法，证明了 Hardy-Littlewood 关于三角和 $S(\alpha, N)$ 性质的猜测。简单地说，他证明了：对适当选取的 Q 和 τ ，当 $\alpha \in E_1$ 时有

$$S(\alpha, N) \ll \frac{N}{\log^3 N}, \quad (23)$$

（见第五章 § 1）。由此容易推出

$$T_2(N) \ll \frac{N}{\log^3 N} \int_0^1 |S^2(\alpha, N)| d\alpha \ll \frac{N^2}{\log^4 N} \quad (24)$$

这表明相对于 $T_1(N)$ 来说， $T_2(N)$ 是可以忽略的次要项。这样，由 (16), (22), (24) 就证明了三素数定理（见第六章 § 2，当用 Page 的结果时情况要复杂一些，见第六章 § 3）。