

大学物理实验教程

贾小兵 杨茂田 殷洁 包刚 编著

人民邮电出版社

图书在版编目(CIP)数据

大学物理实验教程/贾小兵等编著. —北京: 人民邮电出版社, 2003.2
ISBN 7-115-11079-4

I. 大... II. 贾... III. 物理学—实验—高等学校—教材 IV. 04-33
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 003406 号

内 容 提 要

本书根据国家教育部制订的《高等院校工科本科物理实验课程教学基本要求》(1995年修订版)中基础实验部分的要求编写。全书共分7章,第1章介绍测量误差、实验结果的不确定度表示及数据处理等基础知识;第2章介绍物理实验中常用的基本仪器;第3章介绍设计性实验的基础知识;第4~7章按力学实验、电磁学实验、光学实验、近代物理和综合性实验分类,由浅入深地介绍具体的实验。

本书可作为高等工科院校的物理实验教材及实验技术人员和其他相关人员的教学参考书。

大学物理实验教程

-
- ◆ 编 著 贾小兵 杨茂田 殷 洁 包 刚
责任编辑 申 苹
 - ◆ 人民邮电出版社出版发行 北京市崇文区夕照寺街14号
邮编 100061 电子函件 315@ptpress.com.cn
网址 <http://www.ptpress.com.cn>
读者热线 010-67129264
北京汉魂图文设计有限公司制作
北京隆昌伟业印刷有限公司印刷
新华书店总店北京发行所经销
 - ◆ 开本: 787×1092 1/16
印张: 11.25
字数: 270 千字 2003年2月第1版
印数: 1-8 000册 2003年2月北京第1次印刷

ISBN 7-115-11079-4/TN · 2034

定价: 16.00 元

本书如有印装质量问题, 请与本社联系 电话: (010) 67129223

前 言

物理实验是高等工科院校一门必修的基础课程，其主要任务是对学生进行实验技能的基本训练，使其掌握进行科学实验所需的基本知识、方法和技巧。作为工科大学生进入大学后的第一门实验课程，它更重要的是培养学生敏锐的观察力和良好的科学实验规范，提高学生理论联系实际、分析问题和解决问题的能力，特别是与当今科学技术发展相适应的综合能力。

本书是根据国家教育部制订的《高等院校工科本科物理实验课程教学基本要求》（1995年修订版）中基础实验部分的要求来编写的。本教程编写本着物理实验教学应该时刻面对时代发展的宗旨，并在此基础上对原有教材和讲义进行重建，使实验教学体系更加切合实际，教材内容与现有设备配合更密切，使物理实验教学更富有成效。

全书共分7章，第1章介绍测量误差、实验结果的不确定度表示及数据处理等基础知识；第2章介绍物理实验中常用的基本仪器；第3章介绍设计性实验的基础知识；第4~7章按力学实验、电磁学实验、光学实验、近代物理和综合性实验分类，由浅入深地介绍具体的实验。各章中分若干实验专题，各专题内的实验按由浅入深，从基本实验到提高型和设计性实验的顺序编排。设计性实验阶段教程中只写出设计要求与提示，让学生在教师的指导下自己设计，独立进行实验。这样，能充分发挥学生在学习中的主观能动性，从而培养和提高学生的综合能力。

实验教材的编写不可能脱离实验室的建设和发展。本书是在学院历届所使用的教材和讲义的基础上，经调整、更新和扩充而成，凝聚了几代人的心血，特别感谢已离开物理实验室的陈鹤鸣教授和施伟华老师为本书编写打了一个好的基础。本书在编写过程中得到物理实验室教师和实验技术人员的大力支持和鼓励，也得到了教务处和应用数理系领导的关心和帮助，并参考了其他兄弟院校的实验教材，编者在此一并表示谢意。

本书的第1章、第7章中的实验二由包刚老师编写，第4章由殷洁老师编写，第5章由杨茂田老师编写，其余全部内容由贾小兵老师编写并负责全书的统稿。刘士英副教授和东南大学物理系吴宗汉教授对本书作了全面审阅，并提出了修改意见。在此我们谨向他们以及对在本书编写过程中提出过宝贵意见的同志一并致以衷心的感谢。

由于成书时间匆忙和编者水平有限，书中的不足之处在所难免，敬请广大读者批评指正。

编 者

目 录

第 1 章 绪论	1
§1.1 物理量的测量	1
一、测量与单位	1
二、直接测量和间接测量	2
§1.2 测量误差及其分类	2
一、系统误差	3
二、随机误差	4
三、精密度、准确度和精确度	5
四、不确定度	6
§1.3 有效数字及其运算	6
一、有效数字的概念	6
二、有效数字的基本性质	7
三、有效数字的规则	7
§1.4 直接测量中真值和测量误差的估算	8
一、真值的估算	9
二、测量误差的估算	9
三、实验中粗差的剔除	12
§1.5 测量结果的表达	13
一、单次测量结果的表达	13
二、多次测量结果的表达	13
三、不确定度、相对不确定度和百分差	14
§1.6 间接测量中真值和测量误差的估算	15
一、真值的估算	15
二、测量误差的估算	16
三、间接测量量不确定度的方差合成	18
四、间接测量量的结果表达	19
§1.7 数据处理的基本方法	20
一、列表法	20
二、作图法	21
三、逐差法	23
§1.8 用计算器进行数据处理	25
第 2 章 物理实验的基本仪器及其使用	29

§2.1 物理实验的基本仪器	29
一、力学实验的基本仪器	29
二、热学实验的基本仪器	34
三、电磁学实验的基本仪器	35
四、光学实验的基本仪器	39
§2.2 仪器的基本调试常识	42
一、实验仪器在使用前的初调	43
二、实验仪器在使用中的调整和操作要求	44
第3章 设计性实验的基础知识及要求	46
一、设计性实验的性质与任务	46
二、系统误差的一般知识	47
三、实验方案的制订	50
四、设计性实验的要求	53
第4章 力学实验	54
一、测定金属杨氏模量	54
二、用三线摆测定物体的转动惯量	59
三、用拉脱法测液体的表面张力系数	63
四、建立弹簧振子的周期公式	67
第5章 电磁学实验	71
§5.1 电磁学实验的一般操作规程	71
§5.2 电学基本量的测量	71
一、测量元器件的伏—安特性	71
二、用惠斯通电桥测电阻	75
三、用电位差计测电动势	81
四、用电流场模拟静电场	85
五、用热敏电阻非平衡电桥测温度(设计)	88
§5.3 电表的研究及应用	90
一、测量灵敏电流计的性能参数	90
二、用冲击电流计测电容和高阻	96
三、改装电表(设计)	101
四、用电位差计校准电表(设计)	104
§5.4 示波器的认识及应用	105
一、调整和使用示波器	105
二、测定声速	114
三、测定铁磁物质的磁滞回线	119

第 6 章 光学实验	124
§6.1 光学实验的操作常规.....	124
§6.2 光的反射、折射和衍射.....	125
一、调整分光计测三棱镜的顶角	125
二、用分光计测三棱镜玻璃的折射率	134
三、用衍射光栅测入射光波长	139
四、分析氢原子光谱验证巴耳末公式(设计).....	143
§6.3 光的干涉.....	144
一、利用等厚干涉测相关物体的几何尺寸	144
二、调整和使用迈克尔逊干涉仪	151
第 7 章 近代物理及综合性实验	156
一、用密立根油滴仪测电子的电荷	156
二、全息照相	160
三、晶体电光调制	164
习题答案	171
参考文献	172

第 1 章 绪 论

在科学技术高度发展的今天，物理学不仅孕育了许多新兴学科，如电子技术、材料学科、半导体技术和光电子技术等，同时物理实验中的非电量的电测方法、传感器技术等也与其他学科相互渗透，形成一些新的边缘学科。

理工类大学生不仅需要掌握坚实的基础理论和专业理论，而且应该具备较强的科学实验能力。物理实验正是为了对学生进行科学实验基本训练而设置的必修课，是使学生系统接受实验技能训练的开端。它对培养学生良好的科学实验素养、掌握基本物理量的测量方法和实验数据处理方法具有重要的作用，因此物理实验是理工科各专业教学计划中的一门重要必修课。

在《高等院校工科本科基础课程教学基本要求》(1995 年修订版)中明确提出了大学物理实验课程的任务：

(1) 通过对实验现象的观察、分析和对物理量的测量，学习物理实验知识，加深对物理学原理的理解。

(2) 培养与提高学生的科学实验能力，其中包括：

- ① 能够通过阅读实验教材或资料，做好实验前的准备；
- ② 能够借助教材或仪器说明书正确使用常用仪器；
- ③ 能够运用物理学理论对实验现象进行初步分析判断；
- ④ 能够正确记录和处理实验数据，绘制曲线，分析实验结果，撰写合格的实验报告；
- ⑤ 能够完成简单的具有设计性内容的实验。

(3) 培养与提高学生的科学实验素养，要求学生具有理论联系实际和实事求是的科学作风，严肃认真的工作态度，主动研究的探索精神，遵守纪律、团结协作和爱护公共财产的良好品德。

§ 1.1 物理量的测量

一、测量与单位

物理学所研究的是自然界中物体的各类基本运动，例如质点的机械运动、分子原子的热运动、电磁场的变化与传播以及原子内微观粒子的运动等。要研究物体运动的规律，需要定量研究描述物体运动的物理量之间的关系或验证理论，而要获得这种定量关系必须对物理量进行精确测量。

测量就是将待测物理量与选做测量单位的同类物理量进行比较，得出待测物理量与单位之间的倍数关系，即测量值。显然测量值的大小与选取的标准有关，在表示一个测量值时数

值与单位缺一不可。例如，要测量一杯水的质量，在天平两侧将这杯水与选做质量单位的砝码进行比较，如果采用 1g 的砝码做计量标准，测得结果为标准 1g 砝码的 100 倍，则表示测得该杯水的质量为 100g。如果采用 1kg 的砝码做计量标准，测得结果为标准 1kg 砝码的 1/10 倍，则表示测得该杯水的质量为 0.1kg。同样一个物理量，其测量值与选用的单位有关。

物理量的单位构成了计量的单位制，但是并非每一个单位都是基本单位。通过对各个物理量的量纲分析可以证明，只有长度、质量、时间、电流强度、热力学温度、物质的量和发光强度是基本单位，其他单位为导出单位。各个国家和民族都有自己的度量衡单位。1960 年第 11 届国际计量大会建议各国采用以米(m)、千克(kg)、秒(s)、安培(A)、开尔文(K)、摩尔(mol)和坎德拉(cd)为 7 个基本计量单位，称作国际单位制(SI)。1984 年 2 月 27 日我国国务院颁布以国际单位制(SI)为基础的单位制为我国的法定单位制。本书采用以国际单位制为基础的我国法定单位制。

二、直接测量和间接测量

测量按其过程可分为直接测量和间接测量。直接测量是指将待测量与定标的测量仪器或量具进行比较，直接读出待测物理量的量值。例如用米尺测量人的身高、用秒表测量单摆的周期、用电流表测量回路的电流强度等。但是有些物理量是无法用仪表或量具直接测量的。例如物体运动的速度、材料的密度和原子的能级等，它们只能通过对一些相关物理量的测量，再通过物理量间的关系间接求出大小。如要测量圆柱体的密度，应首先测出圆柱体的直径 D 、高度 h 和质量 m ，再通过公式 $\rho = \frac{4m}{\pi D^2 h}$ 间接测得圆柱体的密度；又如单摆实验中，通过

对单摆长 L 和摆动周期 T 的测量，利用公式 $g = 4\pi^2 \frac{L}{T^2}$ 可以间接测得当地的重力加速度。

间接测量与直接测量的划分不是绝对的，有些间接测量量经过传感器的转化也可以变为直接测量量。例如通过测量小线圈内的感应电量，可以间接测得小线圈所在磁场的磁感强度，但是当采用霍尔元件作传感头，就可以直接在表盘上读出磁场的磁感强度，这时磁场的磁感强度又成为直接测量量。

在测量某一物理量时，通常要对物理量重复多次测量，但是对该物理量的测量结果往往与测试条件有关。如果同一观察者在相同环境下，用同一种测试方法和同一台仪器进行多次测量，此时可以认为每一次的测量精度都相同，称作等精度测量。如果在测试中有某一条件不同，例如用两台感量不同的天平测量同一物体的质量，则称作不等精度测量。等精度测量与不等精度测量的数据处理方法是不同的，本书在不作特殊说明时，都认为是等精度测量。

§ 1.2 测量误差及其分类

如前所述，测量是指将一个客观存在的物理实体与选作单位的计量标准进行比较，测量值是指物理实体与标准计量单位的倍数。我们所要测量的物理量在一定的条件下客观的真正大小，称为真值，通常用 a 表示。在大多数情况下我们不可能得到待测物理量的真值。在实

际测量过程中由于测量仪器精度的不够，测量原理和方法的不完善，测量者感官能力的限制等，每一次测量的结果和真值之间总存在一定的差异。我们将测量值 x 与真值 a 之差 ε 称为测量误差。

$$\varepsilon = x - a \quad (1-1)$$

对任何测量而言，测量误差是不可避免的。我们可以通过改善实验条件、选择合理的实验方法或精度更高的测量仪器来减少测量误差，但是要完全消除误差是不可能的。由于真值在多数情况下无法确定，测量的误差也不可确定。处理实验数据的目的是估算测量误差的大小，求出在给定条件下真值的最佳估计值，并对实验结果的精确程度做出评估。

测量时并非仪器的精度越高、测量误差越低越好，对物理量的测量也需要考虑测量成本。例如，测量人的体重只需要磅秤而无须用天平。设计实验就是要在一定的允许测量误差下，选用低成本的测量方法和测量仪器，获取最佳的测量结果。

误差产生的原因相当复杂，有些是实验仪器、测量方法和测量环境造成的，也有些是人为因素造成的。根据误差产生的原因，误差可分为系统误差和随机误差。

一、系统误差

在同一条件下对同一物理量进行等精度测量，误差呈现的符号、数值不变或按照一定的规律变化，这类误差称作系统误差。例如用天平测量圆柱体质量时，由于天平两臂不等长使测量值偏大或偏小，与实际真值相比产生定向的偏离。产生系统误差的可能原因有：

(1) 测量仪器本身的缺陷。例如计量标准偏差、零点偏移等。

(2) 实验理论和方法的不完善。在实验时由于忽略了一些次要因素，或由于理论的不完善导致某些要素被忽略。例如测量回路电流时忽略了电流表的内阻，测量霍尔电压时忽略了接触电势差等。

(3) 环境影响或没有在规定条件下使用仪器。例如标准电池在不同的环境温度下电动势不同，测量其电动势时没有根据具体情况对其值进行修正或者标准电池没有在安全电流下工作。

(4) 实验人员读数时的习惯偏差。由于实验人员所受的训练和习惯差异，使读数偏大或偏小。

系统误差的特点是它的确规律性。由于其符号的可确定性，不能通过在相同条件下进行多次重复测量来消除和发现系统误差，但是通过对实验过程的详细分析，可以确定部分系统误差的量值与符号，这部分系统误差称为可定系统误差。对于可定系统误差，可以在测量值中进行修正，修正后的测量值为

$$\text{实际值} = \text{示值} + \text{修正值}$$

例如螺旋测微器有一初读数 0.006mm ，即修正值为 -0.006mm 。现在测得细金属丝直径的示值为 0.215mm ，则金属丝直径 d 的实际值为

$$d = 0.215 - 0.006 = 0.209(\text{mm})$$

对未能确定大小和符号的系统误差，称为未定系统误差。未定系统误差是一个较为复杂的问题，没有普遍规律可以遵循，只能确定误差的范围(极限)。

二、随机误差

在同一条件下对同一物理量进行等精度测量，消除系统误差后剩余的误差符号和数值变化不定，依照随机规律变化，这类误差称作**随机误差**。例如用天平测量圆柱体质量时，由于天平轻微地抖动或观察天平平衡时视线的差异，造成读数与真值相比呈现随机起伏。产生随机误差的主要原因有：

(1) 观察者感觉器官的分辨能力或心理能力的限制。例如在估读某一测量值时多次的估读值会不同。

(2) 实验环境、电源和电信号背景噪声的随机变化。环境温度、电源电压、电源频率和背景噪声的变化是一种随机性波动，例如用数字万用表测量日光灯的工作电流，电流表显示读数的末位不断闪烁变化，表明电流的随机起伏。

随机误差的特点是它出现的随机性，误差的大小和符号以不可预定的方式变化。尽管在一次测量值中，随机误差的数值和符号无法确定，但是当测量次数增加时，随机误差服从一定的统计分布规律。不同的测试仪器统计规律也不同，最常见的是正态分布和均匀分布。根据随机误差服从的统计分布规律，可对随机误差的大小和测量结果的可靠性作出合理的评价。

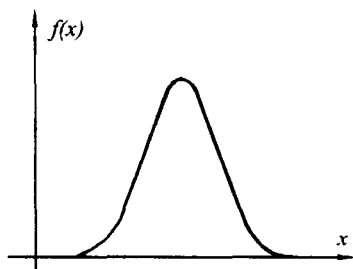


图 1-1 误差的正态分布曲线

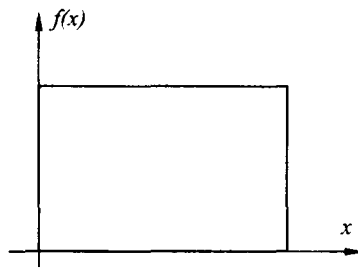


图 1-2 误差的均匀分布曲线

以测量值 x 为变量，正态分布和均匀分布的误差函数 $f(x)$ 的曲线分别如图 1-1 和图 1-2 所示。估读数引起的误差通常呈正态分布，估读数偏大和偏小出现的概率相同；而仪器误差(定义参见§1.4)大多呈均匀分布，不同测量值附近误差值几乎相同。

呈正态分布的误差具有下列特点：

(1) **单峰性** 在多次测量中误差绝对值小的测量量出现的概率比误差绝对值大的出现的概率大。

(2) **对称性** 在多次测量中测量值大于或小于真值的概率相等。

(3) **有界性** 在多次测量中测量值远大于或远小于真值的概率趋于零。

由于呈正态分布的随机误差正负出现的概率相同，而小误差出现的概率又较大，因而当消除系统误差后多次测量的算术平均可以减小随机误差。但是在大多数情况下，需要通过随机误差的统计规律对测量值的误差和真实性做出判断。

三、精密度、准确度和精确度

由于真值不可确定，为了判断一组测量值的准确性和精确性，我们可以引入精密度、准确度和精确度的概念。

以打靶为例。将打靶比作测量，每一次的弹着点表示一次测量值，而靶心为真值。当我们瞄准靶心射击时，子弹实际的弹着点与枪的质量、射手的射击技能和风速等因素有关。如果射手是一名高水平的狙击手，遗憾的是当时遇到侧风或枪支瞄准具不准，靶面上的弹着点如图 1-3(a)所示。这表明弹着点的离散程度较小，但子弹弹着点总体偏离了靶心。如果射手是一名业余射手，在风和日丽的环境下用一支精确校准过的枪支射击，靶面上的弹着点如图 1-3(b)所示。这表明弹着点的离散程度较大，子弹弹着点均匀散布在靶心四周。如果射手是一名高水平的狙击手，在风和日丽的环境下用一支精确校准过的枪支射击，靶面上的弹着点如图 1-3(c)所示。这表明弹着点的离散程度较小，子弹弹着点总体集中在靶心四周。

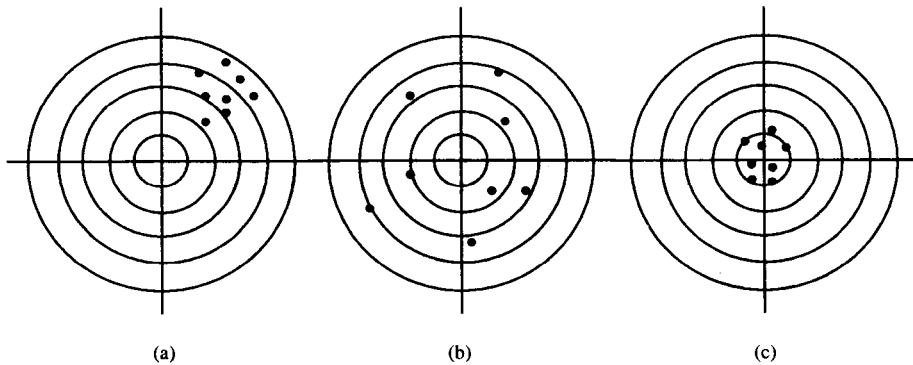


图 1-3 靶面弹着点与精密度、准确度、精确度的关系示意图

上述三张图实际反映了对测量数据三种评价的描述：

(1) **精密度**：重复测量所得测量结果的离散程度。测量结果彼此非常接近，则精密度高；反之测量结果彼此差异较大，则精密度低。

(2) **准确度**：测量结果接近真值的程度。测量结果接近真值，准确度高；反之则准确度低。

(3) **精确度**：综合反映离散程度和准确程度。如果一组测量值离散程度小、准确度高则精确度高；反之如果一组测量值离散程度大、准确度低则精确度低。

精密度、准确度、精确度客观地评价了一组测量量，例如图 1-3(a)表示射击精密度高，但准确度欠佳；图 1-3(b)表示准确度高，但精密度较差；图 1-3(c)则表示精密度、准确度均较高，即精确度高。

要定量地对一组测量值进行评价，给出测量的最终结果，仅仅用精确度评价还是不够的，需要结合各类误差的分布特点，估算出待测物理量的真值和误差。

四、不确定度

在实际测量过程中，影响测量结果精确度的既有测量的系统误差，也有测量的随机误差，我们需要分别估算它们的大小，然后进行误差的综合，用测量的精确度全面评价测量结果。

1981年10月第17届国际计量委员会大会通过决议，建议采用“不确定度”作为测量结果正确程度的评价。1991年8月国家计量监督局颁布的关于《测量误差及数据处理》技术规范中也明确提出“对标准差以及系统误差中不可掌握的部分的估计，是测量不确定度评定的主要对象。”所谓**不确定度**，就是由于测量误差的存在而对被测量不能肯定的程度，即具有一定置信概率的误差估值的绝对值。不确定度 u 应该包含两个方面：

(1) 多次重复测量中用统计方法计算的 A 类不确定度，用 u_A 表示。

(2) 用其他非统计方法估算的 B 类不确定度，例如仪器误差、未定系统误差的估值等，用 u_B 表示。

最后将 A、B 两类不确定度合成后，用合成不确定度作为测量值正确程度的评价。

应该指出，将误差分为 A 类、B 类不确定度与将误差分为系统误差和随机误差，两者之间并不存在简单的对应关系。前者着重是否用统计方法计算来划分，后者则从误差产生的原因来区分。

§ 1.3 有效数字及其运算

一、有效数字的概念

测量值是将待测物理量与标准量比较，但是比较值总是包含了系统误差、估读造成的随机误差和其他一些误差，因而测量值包含了准确数字和欠准数字。我们将准确数字和欠准数字总称为**有效数字**。

在大学物理实验和其他测量中，通常只取 1 位欠准数字，特殊情况下不超过 2 位欠准数字。在本书中我们采取只取 1 位欠准数字，因此有效数字由若干位准确数字和 1 位欠准数字组成。有效数字不仅反映了待测量的大小，正确书写的有效数字还可以粗略地反映测量的精确程度。例如测量小于 1cm 物体的长度，采用不同的量具分别得到下列不同结果：

米尺： $L=0.32\text{cm}$ 2 位有效数字

游标卡尺： $L=0.320\text{cm}$ 3 位有效数字

螺旋测微计： $L=0.3202\text{cm}$ 4 位有效数字

有效数字与数学上的数字具有不同的含义，只有最高一位非零数字后的数字才是有效数字。例如 0.0345m 与 3.45cm 是一回事，都是 3 位有效数字；0.20m 不等于 200mm，因为前者准确到 0.1m 为 2 位有效数字，后者准确到 10mm 为 3 位有效数字。

二、有效数字的基本性质

1. 十进制中有效数字的位数与单位换算无关

单位的换算并不会改变测量值的准确程度,例如 $4.63\text{cm}=46.3\text{mm}=0.0463\text{m}$ 都是 3 位有效数字。

2. 最高位非零数字前的“0”不是有效数字,而非零数字后的“0”都是有效数字

0.286 为 3 位有效数字, 0.2860 为 4 位有效数字。末位的“0”反映了测量值的大小与精度,例如 1.26cm 表示测量量具的最小分度值为 0.1cm(准确位), 估读到 0.01cm(误差位); 1.260cm 表示测量量具的最小分度值为 0.01cm(准确位), 估读到 0.001cm(误差位), 显然 1.260cm 的精度要比 1.26cm 的精度高。

3. 数量较大或较小的数字采用科学记数法, 以方便单位换算

$$1.260\text{cm}=1.260\times 10^{-2}\text{m}=1.260\times 10^1\text{mm}=1.260\times 10^4\mu\text{m}$$

科学记数法中一般小数点前只保留 1 位数字。例如

$$4.600\text{s}=4.600\times 10^3\text{ms}$$

三、有效数字的规则

1. 直接测量的读数规则

测量值的有效数字能够反映测量的精度, 通常测量仪器的最小分度值与仪器的精度有一定的关联。对于可估读的仪器或量具应估读到最小分度的 1/10, 也可根据刻度的细密程度估读到最小分度的 1/5~1/2; 对于不可估读的量具如游标, 应读到最小分度值。现在广泛使用的数字仪表, 误差一般反映在末位的示值上, 因而仪表上所显示的数字均为有效数字。

2. 有效数字的修约规则

过去数字的修约采用“四舍五入法则”, 但是这种修约规则在数字末位恰好等于 5 时进一位, 这就使得数字修约时“进”的概率大于“舍”的概率, 在数据处理时增加了截尾误差。因此现改用国家标准 GB8017-87 规定的数值修约法则“四舍六入五凑偶”。即小于 5 的数字舍, 大于 5 的数字进, 等于 5 则将尾数凑成偶数。例如:

2.375	取 3 位有效数字为 2.38
3.645	取 2 位有效数字为 3.6
3.645	取 3 位有效数字为 3.64
3.64502	取 3 位有效数字为 3.65

3. 有效数字的运算法则

(1) 有效数字的加减运算

不同有效位数的数相加减时，欠准数字与准确数字加减后仍然是欠准数字，最后结果只保留 1 位欠准数字。通常简化运算可以将参与运算的数字修约到与欠准数字末位数最高的数对齐，然后再运算。在加法运算时，运算结果有时会增加 1 位有效数字，而在减法运算时，运算结果有时会减少 1 位有效数字。

(2) 有效数字的乘除运算

不同有效位数的数相乘除时，欠准数字与准确数字乘除后仍然是欠准数字，最后结果只保留 1 位欠准数字。通常简化运算可以将参与运算的数字修约到与有效数字位数最少的数相同，然后再运算。运算结果在数字相乘时，运算结果有时会增加 1 位有效数字；相除时，运算结果有时会减少 1 位有效数字。

(3) 有效数字的乘方、开方运算

有效数字的乘方、开方运算，在乘方、开方次数不太高时，其结果的有效数字位数不变。但当乘方、开方次数增大时，开方运算的结果有效数字位数会减小，乘方运算的有效数字位数会增大。

(4) 函数运算

对数函数运算后的有效数字看小数点后的位数，它的位数与真数位数相同。

$$\lg 1.855 = 0.2753$$

$$\lg 1855 = 3.2753$$

指数函数运算后的有效数字位数与指数小数部分的位数(包含零)相同。

$$10^{6.25} = 1.8 \times 10^6$$

$$10^{0.0045} = 1.010$$

三角函数的有效数字位数与角度有关。当 θ 估读到 1'，三角函数取 4 位有效数字；当 θ 估读到 1"，三角函数取 5 位有效数字。

(5) 其他

常数的有效数字位数通常比测量值多取 1 位。

运算中间结果的有效数字应多保留 1 位。

有效数字的简化运算可以在手工计算时节约时间，但同时也会增加截位误差。实际上实验的数值运算通常由计算机完成，因此往往将数字不经修约地直接由计算机求得最终结果。因为根据约定最终结果只包含 1 位欠准数字，误差(或不确定度)也只取 1 位有效数字的原则，由末位对齐原则可确定最终结果的欠准位(参见 § 1.5)。

§ 1.4 直接测量中真值和测量误差的估算

由于在大多数情况下无法求得待测物理量的真值，由(1-1)式定义的测量误差也就无法确定。下面我们将利用不确定度的概念，通过对误差的合理估算，得出待测物理量的真值和误

差，并对这种估算的可信程度做出评价。

一、真值的估算

对物理量的测量可分为单次测量和多次测量。

1. 单次测量

在外界条件不允许对一个物理量多次重复测量时，或者在某些情况下随机误差对测量的总误差影响不大，不必进行多次测量时，往往只作单次测量。例如测量一个作变加速运动质点的速度和加速度，测量气体节流膨胀过程中温度的变化等，这时单次测量值就作为真值的最佳估值。

2. 多次测量

大部分测量值的随机误差服从正态分布。基于正态分布的对称性，对同一物理量多次重复测量时，测量值的平均能使正负误差相互抵消。当忽略系统误差或对测量值修正后，算术平均值就趋于真值。假设测量中对物理量 x 测量了 n 次，其测量值分别为 x_1, x_2, x_3, \dots ，可以证明此时算术平均值 \bar{x} 是待测物理量真值的最佳估值(数学期望值)，即

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (1-2)$$

应该强调的是待测量的最佳估值并非就是真值 a ，仅仅是比测量值更加接近真值。只有修正了系统误差后无数次测量值的平均才等于真值，即

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (1-3)$$

二、测量误差的估算

1. A 类不确定度的估算

多次测量量往往呈现一定的离散性，A 类不确定度就是对这类离散性做出评价。主要包含了随机误差、可以用统计规律估算的系统误差等。

当 A 类不确定度为正态分布时，测量值的离散程度可以用标准差 σ 表示，根据标准差的定义

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - a)^2}{n}} \quad (1-4)$$

由于在有限多次测量中，上式中的真值 a 无法确定。我们取多次测量得到的一组物理量 x_1, x_2, x_3, \dots 为一组抽样值，在样本空间内可用算术平均值代替真值，则根据统计理论标准

差 σ 的无偏估值 s (简称标准偏差) 为

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \quad (1-5)$$

标准偏差 s 是评估测量值离散程度的特征量。对一组测量值而言，标准偏差小表示该组测量值的离散程度低，测量值的精密度高；标准偏差大表示该组测量值的离散程度高，测量值的精密度低，如图 1-4 所示。但是应该注意，标准偏差 s 并不表示测量值与平均值的偏差，而只是对测量值离散程度的一种评估。从统计意义上讲，测量值落在 $(\bar{x} - s, \bar{x} + s)$ 区间内的概率 $P=0.683$ ，即测量值在算术平均值附近 $\pm s$ 范围内的可能性为 68.3%；落在 $(\bar{x} - 3s, \bar{x} + 3s)$ 区间内的概率 $P=0.9973$ ，因此常常将 $3s$ 称为 **A 类极限误差**。几乎所有测量值都不会超出真值最佳估值附近 $\pm 3s$ 范围。我们将标准偏差所表示的区间称为**置信区间**，相应的概率 P_α 称为**置信度**。

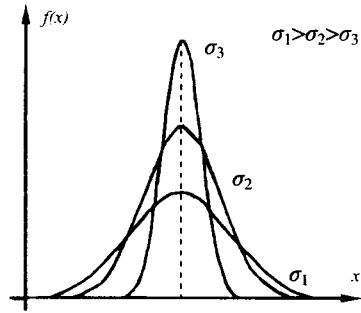


图 1-4 标准差与数据离散程度的关系示意图

算术平均值作为真值的最佳估值依然有一定的离散性，由于在计算待测量的算术平均值时，各测量量的随机误差相互抵消，因而算术平均值的离散程度要比测量值的离散程度小得多。为了研究算术平均值的离散程度，我们将算术平均值与真值的差称作**残差**。由于真值的不可确定，残差无法直接计算，只能根据正态分布的统计理论对残差进行估算。理论分析可以证明算术平均值残差的无偏估值 $s_{\bar{x}}$ 为

$$s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}} \quad (1-6)$$

$s_{\bar{x}}$ 又称为算术平均值的标准偏差，算术平均值的标准偏差是测量值标准差的 $\frac{1}{\sqrt{n}}$ ，这表明增加测量次数 n 可以提高测量值的精度。如图 1-5 所示随着 n 的增大，标准偏差 $s_{\bar{x}}$ 减小。当 $n > 10$ 时标准偏差 $s_{\bar{x}}$ 的减小变得十分缓慢，因此通常取 6~10 次测量次数为佳。测量次数过多，将会延长测量时间，增大环境或电源波动造成实验误差的机会，而这时随机误差的减小已不明显。当然测量次数不同，将会得到不同的近似结果。

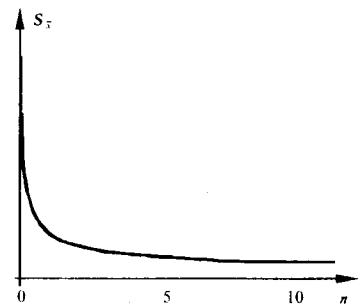


图 1-5 $s_{\bar{x}}$ 与测量次数 n 的关系

当随机误差服从正态分布时，取 A 类不确定度为

$$u_A = s_{\bar{x}} (P = 0.683)$$

$$u_A = 3s_{\bar{x}} (P=0.997) \quad (1-7)$$

$$u_A = t_\alpha s_{\bar{x}} (P = P_\alpha)$$

t_α 是与分布律和置信度相关的参数。A 类不确定度并不表示测量值与真值的差，标准偏差 $s_{\bar{x}}$ 也不是测量值与平均值的偏差，它已不是原来意义上的误差，而是对算术平均值偏离真值的一种评估，是不确定的程度。

根据 A 类不确定度(1-7)式可将测量结果表达为

$$x = \bar{x} \pm t_\alpha s_{\bar{x}} \quad (1-8)$$

(1-8)式中的 t_α 与误差的分布律和置信度有关。当测量次数较多时，随机误差呈正态分布。 $t_\alpha=1$ 时的置信度 $P=0.683$ ，表示待测物理量算术平均值 \bar{x} 偏离真值的范围不超过 $\pm s_{\bar{x}}$ 的可能性为 68.3%； $t_\alpha \approx 3$ 时的置信度 $P=0.9973$ ，表示待测物理量算术平均值 \bar{x} 偏离真值的范围不超过 $\pm 3 s_{\bar{x}}$ 的可能性为 99.73%。

对于不同的置信度 P_α 和测量次数 n ，可以通过查阅附表 1-1 求得参数 t_α 。

表 1-1 不同置信度下参数 t_α 与测量次数的关系

$n \backslash P_\alpha$	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20
0.683	1.20	1.20	1.14	1.11	1.09	1.08	1.07	1.06	1.04	1.03
0.90	2.92	2.35	2.13	2.02	1.94	1.90	1.86	1.83	1.76	1.73
0.95	4.30	3.18	2.78	2.57	2.46	2.37	2.31	2.26	2.15	2.09
0.99	9.93	5.84	4.60	4.03	3.71	3.50	3.36	3.25	2.98	2.86

2. B 类不确定度的估算

B 类不确定度是指用非统计方法计算的误差分量，它通常是指仪器误差和一些特殊估测的极限误差。

所谓仪器误差是指正确使用的前提下仪器示值的最大误差，通常用 Δ 表示。仪器误差包含随机误差和系统误差，它由仪表制造厂商采用精确度更高的测量仪表检测并考虑一定的误差余量后给出，它是仪表的一个重要指标。仪器误差通常用级别表示为

$$\text{仪器误差} = \text{级别} \times \text{量程}$$

仪器误差的具体计算可查阅所用仪器量具的使用说明。对于精度级别较低的仪表(0.5 级以下)，仪器误差主要表现为系统误差；对于精度级别较高的仪表(0.2 级以上)，仪器误差主要表现为接近随机误差。仪器误差是可能出现误差的极限值，无法确定误差的真实大小与符号，仍属于 B 类不确定度范畴。

在实验中由于实验条件的限制，或者由于没有在规定条件下使用仪器，无法保证仪器误差不大于出厂时给定的误差限值，例如弯曲的卷尺、电极的接触电势等，这时需要根据实际情况估计其误差限。对于一些低精度仪器无法确切地给出仪器误差，也常常取仪表量具的最小分度值或感量作为误差限。