



高級中学課本平面几何 教学参考书

人 民 教 育 出 版 社

高级中学课本平面几何 教学参考书

(高级中学一年级及二年级
第一学期教师适用)

刘 牧 吕学礼 编

刘 燕 宇 校订

于金陵 高婉茹 绘图

人民教育出版社出版(北京景山东街)

上海人民出版社重印(上海新兴路 54 号)

上海市书刊出版业营业许可证出 001 号

发行 新华书店上海发行所 印订 (见正文最后页)

统一书号: 7012·1481 字数: 137 千

开本: 787×1092公厘 1/32 印张: 7 1/16

1957 年第 1 版

1957 年 8 月第 1 版第 1 次印刷

上海: 1—18,470 册

定价(5) 0.46 元

统一书号: 7012·1481

定 价 (5) 0.46 元

目 录

总說明	1
第一章 相似形	3
I 綫段的度量	6
II 三角形的相似	27
III 多边形的相似	52
IV 关于比例綫段的定理	77
第二章 銳角三角函数	90
第三章 三角形中及圓中各綫段間的相互关系	108
I 三角形中各綫段間的相互关系	110
II 圓中各綫段間的相互关系	129
III 用代数法解作图題	135
第四章 多边形的面积	152
第五章 正多边形	178
第六章 圓的周长和面积	195
I 圓的周长	196
II 圓的面积	209
高中一年級实习作业	216

总 說 明

I 高中平面几何的教学目的

高中平面几何的教学,应当贯彻中学数学教学大纲(修订草案)中所规定的一般目的,即“教给学生有关算术、代数、几何和三角的基础知识,培养他们应用这种知识解决各种实际问题的技能和技巧,发展他们的逻辑思维和空间想象力”,以及“教师在教数学的过程中,要以社会主义思想教育学生:注意适当地联系我国社会主义建设中各方面的情况和成就,以培养他们成为积极参加社会主义建设和保卫祖国的全面发展的新人;注意培养学生的辩证唯物主义的世界观;注意培养学生的爱国主义思想和民族自尊心,以及爱科学、爱劳动、爱集体、守纪律的美德;并且锻炼学生的坚强意志和性格”。

由于几何是数学的一个分科,具有它自己的特点,所以几何教学还应当贯彻它的特殊的教学目的,这就是大纲中所指出的:“几何教学的目的,在于系统地研究平面图形和空间图形的性质,并且应用这些性质解计算题和作图题;在于发展学生的逻辑思维和空间想象力;并且使他们能够运用所学到的知识来解决实际问题;进行实地测量,测定各种建筑物的表面积和容积等等。”

中学里要在五个学年连续讲授几何(初二到高三)。大纲中规定:高级中学的平面几何课程研究平面几何中的相似形、~~解角~~~~的三角函数~~三角形中和圆中各线段间的相互关系、多边

形的面积、正多边形、圆的周长和面积等部分。

II 課本編排的系統和教学的进度

課本的編排系統，基本上是和大纲一致的，全书共分六章。

第一章相似形，研究綫段的度量，相似三角形的性質，相似多边形的性質，相似变换以及关于比例綫段的一些定理。

第二章銳角三角函数，初步研究銳角三角函数的一些性質以及利用三角函数表来解直角三角形的方法。

第三章三角形中及圓中各綫段間的相互关系，研究三角形中成比例的綫段，勾股定理和它的推广，圓中成比例的綫段，以及用代数法解作图題。

第四章多边形的面积，研究面积的概念，几种重要的多边形的面积求法，多边形的等积变换，三斜求积公式，勾股定理的面积証法以及相似多边形的面积的比。

第五章正多边形，研究正多边形的一些重要性質，几种正多边形的作图和边长的計算，以及倍边公式。

第六章圓的周长和面积，借助于极限概念来研究圓的周长和面积的求法。

根据大纲的規定，各章的教学时数是：

第一章	相似形	33課时
第二章	銳角三角函数	10課时
第三章	三角形中及圓中各綫段間的相互关系	20課时
第四章	多边形的面积	12課时

第五章 正多边形……………12課时

第六章 圓的周长和面积……………11課时

此外,根据大綱的规定:高中一年級有实习作业6个課时,复习3个課时(高中二年級的实习作业6个課时,要在三角課中来作,几何复习2課时主要复习立体几何部分)。

III 教学中应当注意的事项

高中平面几何教学,仍旧应当注意在初級中学課本平面几何教学参考书的总說明中提出的注意事项,其中要特別注意体现出教学大綱中指出的“几何課程的教学,应当和学生的年齡特征相适合,和他們几何观念的发展相适合,即和他們的空間想象力以及作邏輯推理的能力相适合”这一精神。例如,高中平面几何的教学应当基本上按照演繹方法进行教学,但是仍然应当广泛地应用直觀性;对于較复杂的作图題,应当要求学生熟悉解題的各个步驟:分析、作图、証明和討論;对于軌迹題,要求学生能够較严密地加以論証等等。

其他需要注意的地方参考各章中提出的注意事项。

第一章 相似形

說 明

一 教学目的

(1)使學生了解綫段的公度、有公度綫段和无公度綫

段、線段的度量以及線段的比的概念,为学习相似形打好基础。

(2)使学生掌握相似三角形的性質和它們的判定定理,并且能够熟练地应用它們解决有关的实际問題。

(3)使学生熟悉相似變換的性質,掌握相似變換的方法,并且能够运用相似變換的知識解作圖題。

(4)使学生熟悉关于比例線段的定理,并且能够应用它們解决有关的作圖題、計算題和証明題。

二 教材編排的系統和教学的进度

第一章的內容,主要是介紹度量線段的概念、相似形的概念、相似三角形的判定定理、相似變換和它在作圖上的应用以及关于比例線段的定理。

这一章教材共分四大节:第一大节介紹線段长度的概念和線段的比的知識;第二大节在学生掌握線段的比的概念的基础上研究相似三角形的性質和它的判定定理;第三大节研究相似多边形的性質和圖形的相似變換;第四大节研究有关比例線段的若干定理。

根据大綱的規定,这一章教材的教学時間是33个課时。各大节的教学時間,可以分配如下:

I	線段的度量	8 課时
II	三角形的相似	9 課时
III	多边形的相似	9 課时
IV	关于比例線段的定理	7 課时

三 教学时应当注意的事项

(1)发展学生的邏輯思維和培养他們的独立思考能力,是几何教学的重要目的之一。在教学这一章的时候,要进一步培养学生的邏輯推理的能力,使他們能够根据所給的条件,独立地、自觉地运用有关的理論知識,通过邏輯推理得出結論。这里要特別注意培养学生的分析問題和解決問題的能力,在教学利用相似形性質来解計算題、作圖題和証明題的时候,要教会学生解題的原則,指導他們思考問題的方法,以进一步提高他們独立思考的能力。

(2)在講解概念的时候,必須清晰明确,多加綜合比較,并且要和初中平面几何的知識联系起来,使学生获得系統的几何知識。例如在講到位似形的情形,可以举出种种情形,說明它的本質,然后指出一些实际例子(詳見后文);又如在教学相似三角形的三个判定定理的时候,可以和全等三角形的三个判定定理联系比較。这样就能够有效地保証学生自觉地掌握教材,提高他們的学习兴趣。

(3)这一章教材在实际应用方面提供了丰富的材料。例如相似变换不仅在日常生活中有着广泛的应用(如图形的放大縮小、电影等),而在生产建設上也有很大用处(如平板測量等)。教师在教这一章教材中要多联系实际,使学生掌握实际应用的技能和技巧。

(4)为了使學生能够熟練地运用所学过的几何知識,解决实际問題,必須解答相当数量的习題。在課堂中也要留出一

些時間进行課堂練習。此外，可以多进行一些短時間的書面小測驗，以檢查學生學習的質量。

I 綫段的度量

一 教學目的

使學生在獲得了下面一些概念的基礎上，掌握比例綫段的概念，為學習相似形理論打好基礎：

(1)了解兩條綫段的公度的意義，學會兩條綫段的最大公度的求法，從而理解有公度綫段和無公度綫段的意義；

(2)了解綫段的長度的概念（綫段的長度總可以用有理數或者無理數來表示）；

(3)了解兩條綫段的比的意義。

二 教材編排的系統和教學的進度

這一大節教材的編排次序是：在§1的引言中指出這一大節的學習目的以後，介紹了綫段度量的根據——亞兒默得公理。

由於研究綫段的度量，首先必須具備有公度綫段和無公度綫段的概念，而有公度綫段和無公度綫段的概念是建立在公度的概念的基礎上的，因此在§2里介紹公度的定義；在§3和§4里研究了求兩條綫段的最大公度所根據的定理和它的求法；接着在§5里給出有公度綫段和無公度綫段的定義，並且在§6里通過正方形的對角綫和邊長關係的實例，指出無公度綫段是存在的。

其次,由于学生具备了有公度綫段和无公度綫段的概念,所以在 §7 里研究了关于綫段的度量的概念,到这里就得出一条綫段用某一个长度单位来量,所得的量数必定是一个有理数或者是一个无理数。

在 §8 里引出两条綫段的比的概念。在 §9 里研究比例綫段,指出比例綫段具有数的比例的性质,因而在这一小节里列出了一些在比例綫段中常常用到的比例性质,以便利学生复习和引用。

这一大节教材可以用 8 个课时进行教学(第 1 课到第 8 课)。

第 1 课

课题 亚几默得公理(§1)。

注意事项 (1)在这节课开始的时候,可以告诉学生:在这一学期里几何课教学哪些内容,另外可以根据本班学生的具体情况,向学生提出这一学期学习上应当注意的事项,例如对学习和作业的要求等等。

(2)綫段长度的观念,实际上学生在日常生活中是早已具备着的并且经常使用着的,例如一条綫段如果用某一个单位长度(或者用单位长度的若干分之一)連續截取几次,学生会說这条綫段含有几个单位长度(或者单位长度的几分之几)。因此教师在教学 §1 的引言的时候,可以从总结学生所具备的关于綫段长度的观念开始。例如, §1 的引言开头部分的教学,可以这样进行:

1) 在黑板上画出綫段 AB , 然后問学生: 如果用米做长度单位来量綫段 AB , 量了 2 次恰好量尽, 那末 AB 的长度是多少米? 学生回答: 2 米。

2) 再在黑板上画綫段 CD , 然后問学生: 如果把 1 米分成 3 等分, 用一个等分来量綫段 CD , 量了 5 次恰好量尽, 那末 CD 的长度是多少米? 学生回答: $\frac{5}{3}$ 米也就是 $1\frac{2}{3}$ 米。

3) 然后指出: 在上面两种情况, 用米做长度单位来度量綫段 AB 所得的数是整数, 来度量綫段 CD 所得的数是分数, 但是用米来度量任何一条綫段, 所得的数是不是都一定是整数或者分数呢? 研究这个问题, 就是我们学习这一大节的目的。

(3) 亚几默得公理是度量綫段的理論根据, 在教学亚几默得公理的时候, 要注意下面的几点:

1) 在說明公理的内容的时候, 可以在黑板上作出綫段, 用实地連續截取的方法加以解释(图 1)。

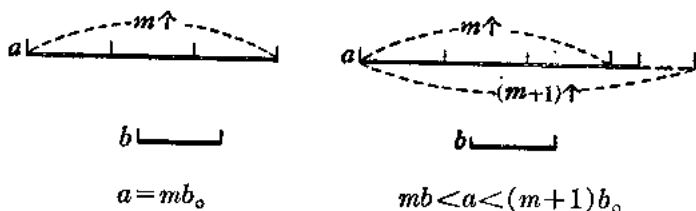


图 1

2) 要叫学生注意: 亚几默得公理是从人类实践(量东西的长度)中总结出来的, 作为綫段度量的理論上的根据。这公理指明用較短的綫段在較长的綫段上連續截取(算术中的連

加)总是可能的。同时指明在用較短的綫段在較长的綫段上截取的时候,必然有两种情况:沒有剩余和有剩余。在沒有剩余的时候,就是 $mb=a$; 在有剩余的时候,就是 $mb < a$, 而 $(m+1)b > a$ 。

3) 在介紹亞几默得的生平事迹的时候,可以补充下面的一些事实: 亞几默得(公元前 287—212)是古希腊偉大的数学家和力学家,他生活和工作在西西里島的塞拉庫薩城。他发现了杠杆平衡的条件、物体在液体中失去一部分重量的性質(亞几默得原理),求出了各种几何体的表面积和体积的計算公式,給出了圓周长和直徑的比的計算方法等等。当羅馬軍隊占領塞拉庫薩城的时候被杀害(參閱数学通报 1957 年第 1 期)。

(4) 作业 复习 §1 的亞几默得公理,要求学生能够用自己的話說出它的内容。

(5) 类似下面的問題可以作为复习巩固的材料:

1) 取任意一条綫段 a , 作出綫段 AB , 使 $AB=3a$; $2\frac{1}{4}a$; $1.5a$ 。

2) 綫段 $AB=12.4$ 分米,說明这是怎样量得的。

3) 在綫段 a 上連續截取綫段 b ($a > b$), 截取 7 次以后, 剩余小于 b 的一段綫段。怎样表示綫段 a 和 b 的关系?

第 2 課

課題 两条綫段的公度和最大公度的性質 (§2—3)。

注意事項 (1) 在这节課开始的时候,可以简单地复习上

节課所講的教材,例如举例說出亞几默得公理的内容;一条綫段的长等于5米, $3\frac{1}{2}$ 分米, 40.2厘米, 这是怎样量得的等等。

(2) §2—3的教材是介紹公度的概念和求两条綫段的最大公度所根据的定理, 为以后学习有公度綫段和无公度綫段打下基础。

在介紹两条綫段的公度的定义以后, 可以直观地让学生看出如果两条綫段有一个公度, 那末它們就有无数个公度, 例如 $AB=5MN$, $CD=4MN$, 那末 MN 就是 AB 和 CD 的公度, 而 MN 的任何一个等分, 例如 MN 的 $\frac{1}{3}$, 也是 AB 和 CD 的公度(图2)。



(3) 在教学两条綫段的最大公度的时候, MN

图 2

可以提問下面的一些問題, 只让学生直观地了解两条綫段如果有公度, 那末它們的无数个公度之中, 必有最大的一个, 而这个最大的公度叫做最大公度就可以了, 对于最大公度的存在不必加以証明。*

1) 两条綫段 $AB=24cm$, $CD=6cm$, 指出这两条綫段的一些公度, 哪个是最大公度?

2) $AB=5MN$, $CD=1.5MN$, 說出它們的一些公度, 哪个是最大公度?

3) 两条綫段 a 和 b 各含綫段 c 的整倍数, 綫段 c 是不是綫段 a 和 b 的最大公度?

(4) 在学生回答上面的一些問題以后, 讓他們自己来发现这样的事实: 从算术上看, 几何中綫段的公度类似于算术中

两个或者两个以上的数的公約数,最大公度类似于最大公約数(但是需要注意:两个整数即使互質也有公約数1,但是两条綫段却不一定有公度)。

(5)在教学 §3 的定理 1 的时候,可以通过一些問題,使学生了解定理 1 的内容,例如:

- 1) 綫段 AB 是綫段 CD 的 2 倍,求它們的最大公度。
- 2) 綫段 AB 和綫段 CD 等长,求它們的最大公度。
- 3) 綫段 a 是綫段 b 的 5 倍, $\frac{1}{2}b$ 是不是 a 和 b 的公度? 是不是它們的最大公度?

在証明定理 1 的时候,要注意下面的几点(課本中的图 2): 1) 綫段 b 是綫段 a 和 b 的公度(因为 a 含 b 的若干倍, b 含 b 的 1 倍); 2) 而且 b 是 a 和 b 的最大公度(因为 b 不可能再含有比它本身更长的綫段的整数倍)。

(6)在教学 §3 的定理 2 的时候,可以通过具体的例子來說明定理的内容,例如綫段 $a=26cm$, 綫段 $b=6cm$, 用 b 在 a 上截取 4 次, 剩余綫段 $r=2cm$, 让学生指出 a 和 b 、 b 和 r 的最大公度各是什么(最大公度都是 $2cm$)。然后再介紹这个定理。

定理 2 的証明要点是: 1) 綫段 a 和 b 、 b 和 r 如果有公度, 那末 a 和 b 、 b 和 r 所有的公度都是相同的, 就是說, b 和 r 的公度都是 a 和 b 的公度, 反过来, a 和 b 的公度都是 b 和 r 的公度(如果綫段 d 是 b 和 r 的公度, $r=md$, $b=sd$, 那末

* 最大公度存在的証明可以參看安特列也夫著的初等几何学教程上册(高教出版社出版)。

$a = nb + r = n \cdot sd + md = (ns + m)d$, 所以 d 是 a 和 b 的公度; 反过来, 如果綫段 d 是 a 和 b 的公度, $a = pd$, $b = sd$, 那末由于 $a = nb + r$, 即 $pd = nsd + r$, $r = (p - ns)d$, 所以 d 也是 b 和 r 的公度; 由此看来, 在 a 和 b 、 b 和 r 中, 如果有公度存在, 所有的公度都是相同的); 2) 当然其中的最大公度也是相同的。

在实际教学的时候, 不必作一般性的証明, 只要采用数字例子来说明就可以了。

(7) 在教学定理 2 以后, 可以指出:

1) §3 中的两个定理是求两条綫段的最大公度的根据, 为了求出綫段 a 和 b 的最大公度, 可以用較短的綫段 b 在較长的綫段 a 上截取, 如果恰好截完, 沒有剩余, 那末, 較短綫段 b 就是綫段 a 和 b 的最大公度; 如果有剩余 r , 那末我們可以求 b 和 r 的最大公度来代替求 a 和 b 的最大公度。

2) 求两个数的最大公約数也有类似 §3 中定理 2 所說的性質。例如求 204 和 85 的最大公約数。因为 $204 = 2 \times 85 + 34$, 显然 85 和 34 的最大公約数 17 就是 204 和 85 的最大公約数。

(8) 作业 作习题一中的 1(1, 3, 4 小題)、2, 3 題。学生在作題的时候, 只要画出图来, 在图旁写出答案就可以了。

(9) 类似下面的問題可以作为复习巩固的材料:

1) 举例說明什么叫做两条綫段的公度、两条綫段的最大公度。两条綫段有沒有最小公度?

2) l 是一条已知綫段, 綫段 a 含 l 的 8 倍, 綫段 b 含 l 的 4 倍, 那末 a 和 b 的最大公度是 l 的几倍?

3) 綫段 $a = 3\frac{1}{2}b$, 求 a 和 b 的最大公度。

第 3 課

課題 两条綫段的最大公度的求法(§4)。

注意事項 (1)在这节课开始的时候,可以提問类似下面的問題,来复习上节课所講过的教材:

1) 綫段 $a=24$ 个长度单位, 綫段 $b=18$ 个长度单位, 指出綫段 a, b 的几个公度。最大公度是什么?

2) 举例說明求最大公度的两个定理的内容。

3) 如果用綫段 b 量綫段 a ($a > b$), 截取 2 次后得剩余 r , 再用 r 量 b , 截取 5 次, 恰好截完而沒有剩余, 綫段 a 和 b 的最大公度是什么? a 和 b 各含有这个最大公度的多少倍?

(2) §4 的教材是研究两条綫段的最大公度的求法。在学生掌握了亚几默得公理和求两条綫段的最大公度所根据的两个定理以后, 两条綫段的最大公度的求法是比较容易为他们所理解的。在課堂上可以用提出問題解決問題的方式, 来进行教学。例如: 这里有綫段 AB 和 CD ($AB > CD$), 我們来求它們的最大公度, 这应当怎样做呢? 我們可以用較短的綫段 CD 在較长的綫段 AB 上連續截取几次, 根据亚几默得公理, 这是可能的; 并且可能有下面两种情形中的一种: 截到某一次(例如 3 次)恰好截完, 或者还有剩余等等。(以下依照課本进行教学。)

輾轉相截的第一种情形的証明, 在掌握了 §3 两个定理的基础上是很容易理解的, 可以让学生自己說出。

(3)在教学两条綫段的最大公度求法中輾轉相截的第二