高等数学

（物理类）

第二册

文丽 吴良大 编

北京大学出版社

北京大学教材

高等数学

（物理类）

第二册

文丽　吴良大　编

北京大学出版社

内 容 提 要

本书是高等数学(物理类)第二册(全书共三册).内容包括空间解析几何,多元函数微分学,多重积分,曲线积分与曲面积分,场论初步.它总结了作者长期讲授物理类高等数学的教学经验,注意用典型而简单的物理、几何实例为背景引进概念,并注重物理应用.本书内容丰富,叙述清晰,难点分散,既保持了数学理论的严谨性,又重视对学生基本计算和分析、解决物理问题能力的培养.书末附有习题答案,便于教师和学生使用.

本书可作为综合性大学、师范院校物理类各专业的本科生和工科大学相近专业的本科生的教材或参考书.

北京大学教材
高等数学(物理类)第二册
文 丽 吴良大 编
责任编辑:刘 勇
*
北京大学出版社出版
(北京大学校内)
中国科学院印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
*
850×1168毫米 32开本 12.5印张 320千字
1990年2月第一版 1990年2月第一次印刷
印数:00001—12,000册
ISBN 7-301-01048-6/O·177
定价:3.05元

目　录

第九章　空间解析几何

空间解析几何与平面解析几何类似，其基本思想也是首先建立坐标系，用有序实数组表示点的位置，然后用代数方程表示几何图形。这样，便可用代数方法来研究几何问题。这种讨论问题的方法就是我们常说的**坐标法**.

为了更方便地讨论空间中的平面与直线，除了要采用坐标法以外，还要用到向量的概念、向量的代数运算及其基本性质，这些知识称为**向量代数**. 向量代数是空间解析几何的一个组成部分。此外，向量代数在力学、物理学和工程技术中也起着很重要的作用。本章第二节专门介绍有关向量代数的基本知识。

§1　空间直角坐标系

我们知道，直线上一个点的位置可以用一个实数来刻划，办法是在此直线上建立数轴，这个点在数轴上的坐标——实数便可用来表示该点的位置。平面上一个点的位置则可用平面坐标系上该点的坐标——一对有序实数来刻划。同样，空间中一个点的位置也可以用空间坐标系中该点的坐标——三个有序实数来刻划。

1.1　空间直角坐标系

在空间中选取一定点 O，过点 O 引三条互相垂直且有相同单位的数轴 Ox, Oy, Oz，这样就构成了**空间直角坐标系**，记作 $Oxyz$（图9.1）。其中 O 称为**坐标原点**，Ox 轴、Oy 轴、Oz 轴分别称为**横轴**、**纵轴**和**立轴**，统称**坐标轴**，每两个坐标轴所决定的平面称为

坐标平面，分别称为 xy 平面、yz 平面和 zx 平面。这三个平面把整个空间分成了八个部分，每一部分称为一个**卦限**(图 9.1)。

对于空间直角坐标系，我们作如下规定：将右手沿 Ox 轴正向到 Oy 轴正向握住 Oz 轴(如图 9.2所示)，若姆指伸开正对 Oz 轴正向，则称此坐标系为**右手系**. 通常，我们都采用右手系。

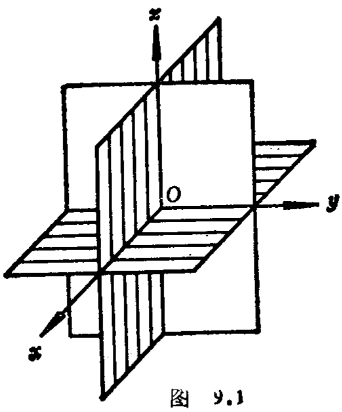

图 9.1

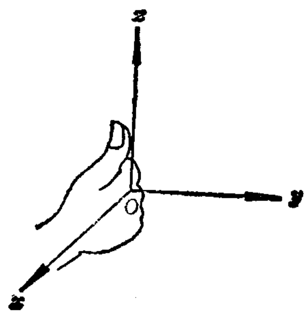

图 9.2

1.2 点的坐标

在空间建立了直角坐标系后，空间中的任一点就可用它的三个坐标来表示。设 P 为空间一点，过点 P 分别作垂直于 x 轴、y 轴

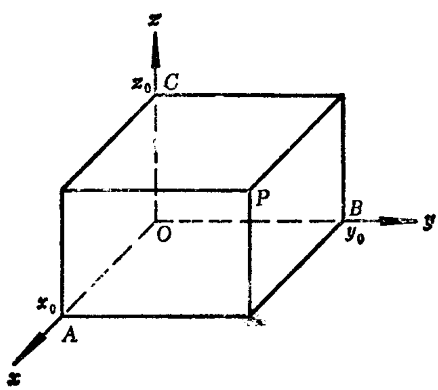

图 9.3

和 z 轴的三个平面，分别交三坐标轴于 A,B,C 三点(图 9.3)。若这三点在 x,y,z 轴上的坐标分别为 x_0,y_0,z_0，则称有序数组 (x_0,y_0,z_0) 为点 P 在直角坐标系 $Oxyz$ 中的**坐标**。反过来，任意给定一个由三个实数组成的数组 (x_0,y_0,z_0)，都可以唯一确定空间中一点。事实上，在 x,y,z 轴上分别取坐标为 x_0,y_0,z_0 的三个点 A,B,C，过这三点分别作垂直于三坐标轴的三个平面，显然，它们只有一个交点，这个点恰好以 (x_0,y_0,z_0) 为其坐标。这样，空间中的点就与三个实数所组成的有序数组之间建立了一一对应关系。

易知，在八个卦限中的点，其坐标的符号分别为

$$\text{I}(+,+,+),\quad \text{II}(-,+,+),\quad \text{III}(-,-,+),$$
$$\text{IV}(+,-,+),\quad \text{V}(+,+,-),\quad \text{VI}(-,+,-),$$
$$\text{VII}(-,-,-),\quad \text{VIII}(+,-,-).$$

例1 在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中，画出其坐标为 $(2,3,-1)$ 的点 P。

解 画图时，先在正 x 轴上截取两个单位，在正 y 轴上截取三个单位，于是可画出点 P 在 xy 平面上的垂足 Q，连结 OQ。然后，在负 z 轴上再截取一个单位，得到点 R，过点 R 引 OQ 的平行线，且过点 Q 作 xy 平面的垂线，这两条直线的交点就是点 $P(2,3,-1)$(图 9.4)。

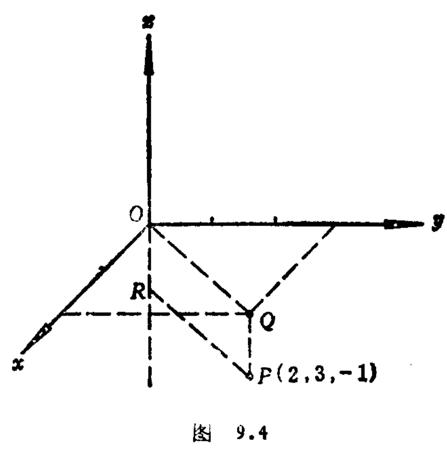

图 9.4

1.3 两点间的距离

若 $P_1(x_1,y_1,z_1)$，$P_2(x_2,y_2,z_2)$ 为空间中两点，则 P_1 与 P_2 之

间的距离为

$$d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}.$$

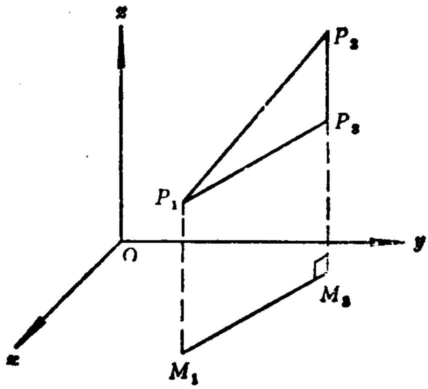

图 9.5

证 过点 P_1 和 P_2 作垂直于 xy 平面的直线，分别交 xy 平面于点 M_1 和 M_2(图9.5)。易知 M_1,M_2 的坐标分别为 $(x_1,y_1,0)$，$(x_2,y_2,0)$。由平面解析几何知，M_1 与 M_2 的距离为

$$\overline{M_1M_2}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}.$$

过点 P_1 作平行于 xy 平面的平面，交直线 P_2M_2 于点 P_3。显然，P_3 的坐标为 (x_2,y_2,z_1)。因为 $P_2P_3\perp P_1P_3$，所以 P_1P_3 与 M_1M_2 平行且相等，从而

$$\overline{P_1P_3}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}.$$

在直角三角形$\triangle P_1P_2P_3$ 中，$\overline{P_2P_3}=|z_1-z_2|$，于是由勾股定理得

$$\begin{aligned}d&=\sqrt{\overline{P_1P_3}^2+\overline{P_2P_3}^2}\\&=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}.\end{aligned}$$

例2 设 $A(a_1,a_2,a_3)$ 与 $B(b_1,b_2,b_3)$ 为空间中不相同的两点，求与 A,B 两点距离相等的动点的轨迹方程。

解 设轨迹上动点 P 的坐标为 (x,y,z)，由条件 $\overline{PA}=\overline{PB}$ 得

$$\sqrt{(x-a_1)^2+(y-a_2)^2+(z-a_3)^2}$$
$$=\sqrt{(x-b_1)^2+(y-b_2)^2+(z-b_3)^2},$$

两边平方再化简，得

$$2(a_1-b_1)x+2(a_2-b_2)y+2(a_3-b_3)z$$
$$+b_1^2+b_2^2+b_3^2-a_1^2-a_2^2-a_3^2=0.$$

下面将会知道，这正是平面的方程。

习　题　一

1. 坐标原点的坐标是什么？设 A,B,C 分别在 x,y,z 轴上，其坐标有何特点？设 A',B',C' 分别在 xy,yz,zx 坐标平面上，其坐标有何特点？

2. 设空间任意一点 P 的坐标为 (x,y,z)，求由 P 点引至各坐标平面的垂足的坐标，和由 P 点引至各坐标轴的垂足的坐标。并求点 P 到各坐标平面和坐标轴的距离。

3. 求点 $P(x,y,z)$ 相对于各坐标平面的对称点的坐标。

4. 求点 $P(x,y,z)$ 相对于各坐标轴的对称点的坐标。

5. 给定空间直角坐标系 $Oxyz$，试在图上标出下列各点的位置：

$(3,-1,0)$，$(-1,2,1)$，$(0,-2,3)$

6. 已知一个四面体的四个顶点坐标为：

$(1,-2,1)$，$(2,3,-2)$，$(-1,3,1)$，$(1,2,3)$

作这四面体的图形。

7. 求到 xz 平面和 yz 平面距离相等的点的轨迹。

8. 求点到 z 轴的距离与到 xy 平面的距离之比为 a 的轨迹方程。

§2 向量代数

2.1 向量的概念

在实际问题中，有些量只有大小，没有方向，例如时间、长度、质量等，它们在取定一个单位后，可以用一个数来表示．这种量称为**数量**(或**标量**)．还有一些量既有大小，又有方向，例如力、位移、速度、加速度、电场强度等．这种既有大小又有方向的量称为**向量**(或**矢量**)．我们通常用一个有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 来表示向量，A 称为**起点**，B 称为**终点**．向量 $\overrightarrow{AB}$ 也可记作 $\boldsymbol{a}$(图 9.6)．向量的大小或

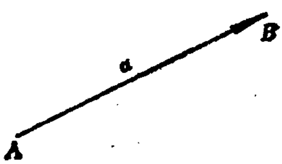

图 9.6

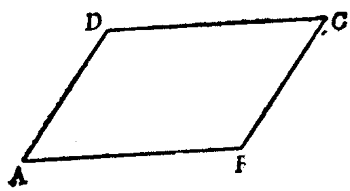

图 9.7

长度称为向量的**模**．$\overrightarrow{AB}$的模记作 $|\overrightarrow{AB}|$ 或 $|\boldsymbol{a}|$．

我们只考虑自由向量，也就是只考虑向量的大小和方向，而不考虑起点在哪里．因此，凡是大小相等、方向相同的向量，我们都认为是**相等**的．例如图 9.7，$ABCD$ 为一平行四边形，我们认为 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$．因此，一个向量在保持大小、方向都不变的条件下可以自由地平移．以后，为了方便，我们常把向量平移到同一起点来考虑．

与向量 $\boldsymbol{a}$ 大小相等、方向相反的向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的**反向量**，记作 $-\boldsymbol{a}$．模等于 1 的向量称为**单位向量**．模等于 0 的向量称为**零向量**，记作$\mathbf{0}$．零向量没有确定的方向．为了今后讨论问题方便起见，我们规定零向量的方向是任意的．

2.2 向量的加减法

1. 加法

力是向量的物理原型. 我们知道，力的合成可按**平行四边形法则**或**三角形法则**进行. 因此,向量的加法也应遵循同样的法则.

若将向量 $\boldsymbol{b}$ 平移,使其起点与 $\boldsymbol{a}$ 的终点重合(图 9.8),则以 $\boldsymbol{a}$ 的起点为起点、以 $\boldsymbol{b}$ 的终点为终点的向量 $\boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与$\boldsymbol{b}$的和,记作

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}.$$

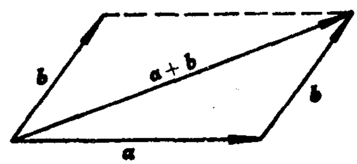

图 9.8

两个向量的加法可以推广到任意有限个向量的情形. 这只需将第一个向量放置好,然后将其余向量依次首尾相接，最后，从第一个向量的起点至最末一个向量的终点的向量就是这些向量的和(图 9.9). 这种求和法称为**多边形法则**或**折线法则**.

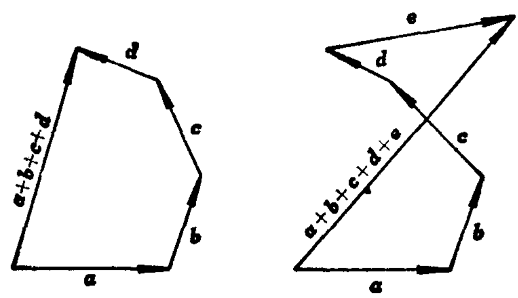

图 9.9

容易验证,向量的加法遵循下列运算规则:

(1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$ (交换律);

(2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$ (结合律);

(3) $\boldsymbol{a}+\mathbf{0}=\boldsymbol{a}$;

(4) $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\mathbf{0}$.

我们看到，向量加法的运算规则与实数加法的运算规则是相同的。

2. 减法

向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的反向量之和称为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差，记作 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，即

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}).$$

由 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})=(-\boldsymbol{b})+\boldsymbol{a}$ 及加法的三角形法则,容易作出向量 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$. 从图 9.10看出,若将 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的起点放在一起,则以 $\boldsymbol{b}$ 的终点为起点、以 $\boldsymbol{a}$ 的终点为终点的向量就是$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

任意两个向量之间,满足**三角形不等式**,即有

定理 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为任意二向量,则

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|. \tag{1}$$

证 若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向或它们之中至少有一个为零向量时,则显然有

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|.$$

若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向,则有

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|,$$

若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不平行,如图 9.10所示,则由三角形两边之和大于第三边得

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|.$$

将以上情形综合起来,得到三角形不等式

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|. \blacksquare$$

推论1 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为任意两向量,则

$$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|. \tag{2}$$

证

$$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|. \blacksquare$$