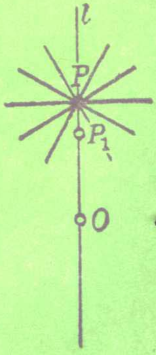
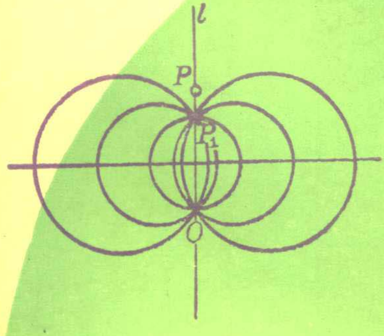
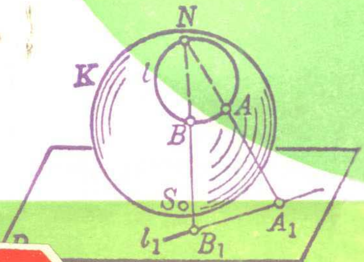
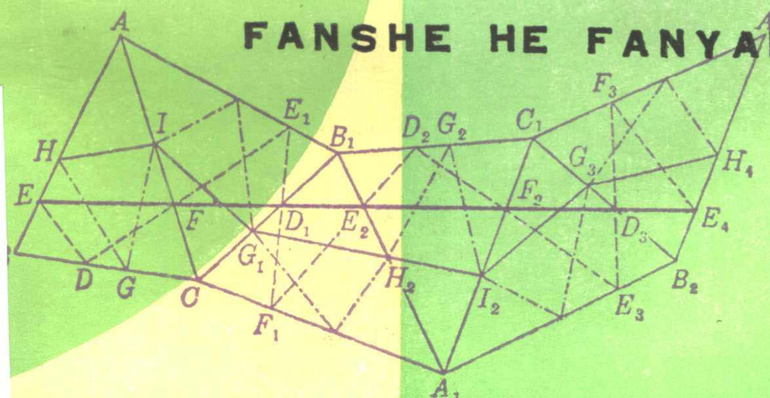






反射和反演

FANSHE HE FANYAN



中学生文库

反射和反演

严镇军

上海教育出版社

中 学 生 文 库　　　反 射 和 反 演

严　镇　军　　上海教育出版社出版
（上海永福路123号）
江苏启东印刷厂印刷　新华书店上海发行所发行
开本787×1092 1/32　印张3.25　字数65,000
1981年9月第1版　1986年8月第4次印刷
印数　63,101—103,100本

统一书号：7150·2470　　定价：0.41元

内 容 提 要

本书从平面几何对称的知识出发，介绍了反射变换的概念、性质和它在几何极值问题、等周问题、光的传播原理等方面的有趣的应用；在此基础上引出了一般的平面变换的概念，介绍平移变换、旋转变换和相似变换在证明几何题方面的应用；然后介绍一种尚未纳入国内中学数学教材的反演变换及其应用；最后把代数和几何联系起来，介绍平面变换和复数的关系，利用复数作出各种平面变换的表达式，并介绍更为一般的平面变换。书中还配备少量的习题和解答概要，供选用。本书有助于读者更好地理解、掌握平面几何的某些知识和它的应用。

目录

ZHONG XUE SHENG WENKU

一、反射变换的概念和性质

我们在日常生活和生产实际中，常会遇到各种轴对称的图形，如等腰三角形、等腰梯形、六角螺帽及七星瓢虫等(图1).这些图形都有这么一个特点,如果沿着某条直线(对称轴)把图形折过来，在直线两侧的图形是完全重合的. 利用这种

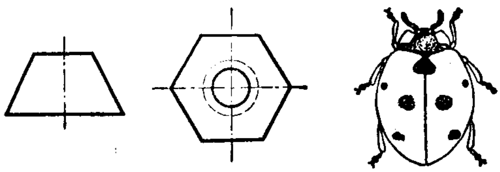


图 1

沿某条直线把平面对折的方法，可以得到一种平面上的点的对应关系. 设 l 是平面上的一条定直线，如果绕 l 把这平面在空中旋转 $180°$，这时平面上位于 l 一侧的任一点 A，将变换成这平面上位于 l 另一侧的 A_1 点; l 上的任一点 O，则变成自己; 平面上任一图形 F，也随之变成这平面上的另一图形 F_1

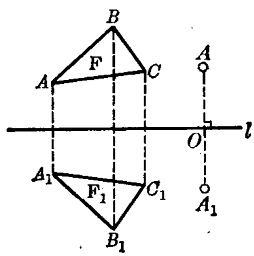


图 2

(图2). 具体地说，设 A 是平面上的任一点，过 A 引 l 的垂线，交 l 于 O，并延长 AO 至 A_1，使 $AO=A_1O$，我们把 A_1 点叫

做 A 点关于直线 l 的反射象，而 A 点叫做 A_1 点的原象．同时我们规定 l 上任一点 A 的反射象就是自己．这里原象 A 和反射象 A_1 的关系，就好比是读者所熟悉的函数概念中的自变量 x 和函数 y 的关系．按照上述方式将平面上一象点 A 作关于直线 l 的反射象点 A_1 的变换，叫做关于直线 l 的反射变换或对称变换，而直线 l 叫做反射轴或对称轴．如果设 F 是某个平面图形（直线，多边形及圆等等），将 F 上的每一个点，作关于直线 l 的反射象点，这些象点组成了这平面上的另一个图形 F_1，F_1 叫做平面图形 F 关于直线 l 的反射象图形．在不致引起混淆的情况下，以后也简称为反射象．

大家都知道，当我们要证明某些稍微复杂一点的几何题时，往往要添辅助线才能解决．添辅助线的主要方法是将某些图形位置进行适当的变换，使已知条件和要证明的结论建立起明显的关系，以便于运用定理、公理，经过逻辑推理去解决．在证题过程中，反射变换是一种常用的证明方法．这里，先举一简单的问题来说明．

例如，证明三角形大边上的高小于小边上的高．

证明　如图 3(1)、(2)，在 $\triangle ABC$ 中，$CD\perp AB$，$BE\perp AC$，且 $AB>AC$．分别作 B 点和 C 点关于直线 AC 和 AB 的反

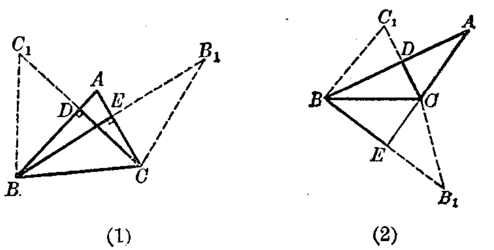


图 3

射象点 B_1 和 C_1，则

$$BC=B_1C,\ BC=BC_1. \tag{1}$$

（按通常的说法就是，分别延长 BE 和 CD 到 B_1 和 C_1 点，使 $BE=B_1E$，$CD=C_1D$. 易见 $\triangle BCE\cong\triangle B_1CE$，$\triangle BCD\cong\triangle BC_1D$，因而有 $BC=B_1C$，$BC=BC_1$.）

如图 3(1) 的情形，在 $\triangle ABC$ 中，$AB>AC$，

$$\therefore\quad \angle ACB>\angle ABC,$$

$$\therefore\quad \angle BCB_1>\angle CBC_1. \tag{2}$$

又如图 3 (2) 的情形，由于 $\angle BCE>\angle ABC$，所以不等式(2)仍成立. 因此，不论哪种情形，由(1)式知，$\triangle BCB_1$ 和 $\triangle CBC_1$ 都是等腰三角形，且它们的腰相等. 而由不等式(2)知，$\triangle BCB_1$ 的顶角大于 $\triangle CBC_1$ 的顶角，所以前者的底边大于后者的底边，即

$$BB_1>CC_1,$$

$$\therefore\quad BE>CD.$$

为了后面叙述的需要，现将反射变换的几何性质列出，证明是比较容易的，这里从略，请读者自己完成.

1. 设 A、B 是平面上的任意两点，它们关于直线 l 的反射象分别是 A_1 和 B_1，那末线段 AB 的反射象是线段 A_1B_1（图 4），并且

$$AB=A_1B_1.$$

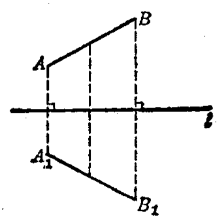


图 4

简单地说就是：反射变换把线段变成等长的线段. 特别地，由反射轴上任一点，到任何两个互为对称的点的距离相等.

2. 任一直线 m 经反射变换变成直线 m_1，并且：

1）若m平行于反射轴l，则m_1也平行于l，并且直线m和直线l的距离等于直线m_1和直线l的距离；

2）若m垂直于反射轴l，则m_1就是原来的直线m，但方向相反．这里所谓方向相反，是指m上的任意两点A、B，从A到B的方向，而它们相应的象点是从A_1到B_1的方向，所以方向相反(图5)，同样从C到D的方向与它们的象点从C_1到D_1的方向也相反；

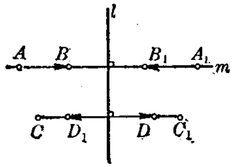


图 5

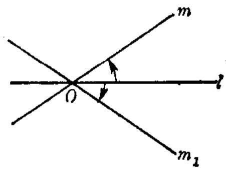


图 6

3）若直线m与反射轴l相交于O点，则m_1与l也相交于O点．并且l与m的夹角(以后我们约定相交两直线的夹角是指较小的那个角)等于l与m_1的夹角，但这两个角的方向相反(图6)．这里所说的方向，是指相应的方向，即从l到m的方向和从l到m_1的方向．

3．任一圆周经反射变换变成另一圆周，并且这两圆周的半径相同，象圆周的圆心就是原象圆周的圆心的象点，即两圆心对称于反射轴．

4．设m、n是两条相交于O点的直线，经反射变换变成两条相交于反射象点O_1的直线m_1、n_1，且m、n的交角和m_1、n_1的交角大小相等，但方向相反(图7)．

设一直线和一圆周相交，我们规定它们的夹角是指这条直线和圆周在交点处的切线的夹角[图8(1)]；若两圆周相交，

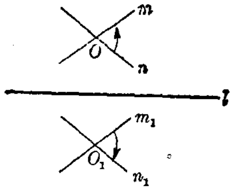
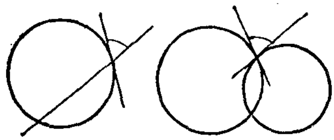


图 7



(1) (2)

图 8

它们的夹角是指在交点处的切线的夹角[图 8(2)]. 显然，一直线和圆相切时，或者两圆相切时，它们的夹角都为零. 如果一直线和圆周的夹角为直角，则称直线和圆周直交或正交. 由平面几何知道，通过圆心的直线而且也只有通过圆心的直线和该圆周直交. 同样，如果两圆周的夹角是直角，则称这两圆周直交或正交.

5. 设直线 m 和圆周 K 相交，经反射变换，m 的象直线 m_1 和 K 的象圆周 K_1 仍相交，而且 m 与 K 的夹角和 m_1 与 K_1 的夹角相等，但方向相反.

6. 设两圆周相交，经反射变换，它们的象圆周仍然相交，而且夹角相等，但方向相反.

以后我们把性质 4、5、6 统称为反射变换的反向保角性.

7. 任一图形 F，经反射变换，象图形 F_1 是图形 F 关于反射轴的对称图形，所以两图形全等，但 F、F_1 周界的环绕方向相反. 如图 2 中，原象 F——$\triangle ABC$ 的周界依字母 A、B、C 的顺序为顺时针方向，而象图形——$\triangle A_1B_1C_1$ 的周界依字母 A_1、B_1、C_1 的顺序为逆时针方向. 这个情况与你自己在镜子里的象有点相似，当你举起右手时，在镜子里的象则是举起左手，当你用右手在空中按顺时针方向画一圈，你的象就相应地用左手在空中按逆时针方向画一圈，所以反射变换也叫镜

象反射.

上述性质为我们提供了作已知平面图形——直线形和圆关于直线 l 的反射象的方法. 这就使我们在证明几何题时，可把一些添辅助线的过程说得更简单明了. 例如，过已知圆的圆心 O 作直线 l 的垂线，交 l 于 A 点，并延长使 $OA=O_1A$，再以 O_1 为圆心，作与已知圆同样大小的圆. 这一段叙述现在可以简单地说成，作圆 O 关于直线 l 的反射象圆 O_1.

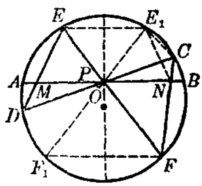


图 9

［例 1］ 如图 9，过圆 O 一弦 AB 的中点 P，任作两弦 CD 和 EF，连结 DE、CF 分别交 AB 于点 M、N，求证 P 点是线段 MN 的中点.（蝴蝶定理）

分析 要证明线段 PM 和 PN 相等，从图 9 中的实线部分看不出有直接的关系，为此必须将图形进行适当的变换. 现在假设 $PM=PN$ 成立，那末 M 点和 N 点关于直线 OP 对称. 如果作出 E 点关于直线 OP 的反射象点 E_1，由反射性质，应有

$$\triangle EMP \cong \triangle E_1NP.$$

这就提供了证题的途径：作出 E_1 点，再设法证明 $\triangle EMP$ 与 $\triangle E_1NP$ 全等.

证明 作线段 EF 关于直线 OP 的反射象 E_1F_1，显然 E_1 和 F_1 都在圆周 O 上，并且

$$EP=E_1P,\ \angle EPM=\angle E_1PN.$$

连结 CE_1，因为 C、E_1、F_1、F 四点共圆，

$$\therefore\quad \angle FCE_1+\angle E_1F_1F=180^\circ.$$

又

$$F_1F \parallel AB,$$

$$\therefore\quad \angle E_1F_1F=\angle E_1PN.$$

从而 $$\angle E_1PN+\angle NCE_1=180^\circ.$$

由此可知 N、C、E_1、P 四点共圆,

$$\therefore\quad \angle NCP=\angle NE_1P.$$

又 $\angle FCD=\angle DEF$, 即 $\angle NCP=\angle MEP$,

$$\therefore\quad \angle MEP=\angle NE_1P,$$

$$\triangle MEP\cong\triangle NE_1P,$$

$$\therefore\quad PM=PN.$$

[例 2] 如图 10, 设定直线 AB 的同侧有两个不与 AB 相交的定圆 O_1、O_2, 在直线 AB 上求一点 C, 使由 C 点向这两圆所作的切线中各有一条与 AB 成相等的角.

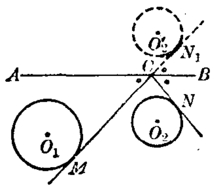


图 10

分析 假设 C 点已作出, CM、CN 分别是 $\odot O_1$、$\odot O_2$ 的切线, 那末 $\angle ACM=\angle BCN$.

要使 $\angle ACM=\angle BCN$, 作 $\odot O_2$ 关于直线 AB 的反射象 $\odot O_2'$, $\odot O_2$ 的切线 CN 相应地反射成 $\odot O_2'$ 的切线 CN_1, 由反射变换的性质 2 的 3) 可知

$$\angle NCB=\angle N_1CB,$$

所以 $$\angle N_1CB=\angle ACM.$$

由此必须 M、C、N_1 三点共线, 并且 MN_1 是 $\odot O_1$、$\odot O_2'$ 的公切线, 所以点 C 必须是公切线 MN_1 与直线 AB 的交点.

作法 (1) 作 $\odot O_2$ 关于直线 AB 的象 $\odot O_2'$;

(2) 作 $\odot O_1$ 及 $\odot O_2'$ 的公切线 MN_1, MN_1 与 AB 相交于点 C, 则 C 点即为所求.

证明请读者自己写出.

本例由于圆 O_1 和圆 O_2' 的公切线有四条, 所以有四解.

［例 3］ 在平行线 AB 和 CD 的外侧有两定点 P、Q，试在 AB 和 CD 之间作一垂线 EF，使得 $PE=QF$.（图 11）

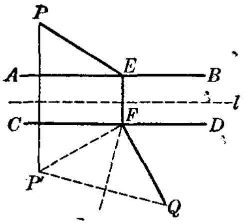


图 11

分析 假设垂线 EF 已作出，那末 $PE=QF$. 如果在平行线 AB 与 CD 之间作直线 l 平行于 AB、CD 且与 AB、CD 等距离，那末 E 点和 F 点关于直线 l 成反射象点，要使 $PE=QF$，可以作出 P 点关于直线 l 的反射象 P' 点. 由反射变换的性质知 $PE=P'F$，又 $PE=QF$，所以

$$P'F=QF.$$

由此可知，F 点就是线段 $P'Q$ 的中垂线和直线 CD 的交点.

作法和证明都留给读者自己完成.

本例如果当 Q 点位于直线 PP' 上，而且不与 P' 点重合时无解；当 Q 点与 P' 点重合时，有无穷多解；其他情形都只有一解.

二、反射变换的应用

上一章介绍了反射变换的概念和它的一些性质，并且举例说明了反射变换对几何证题和几何作图的应用．这一章继续讲反射变换对其它问题的有趣应用．

1．几何极值问题

我们知道，求出或证明适合某种条件的一切几何图形中，使某个确定的几何量（如长度、面积等）达到最大值或最小值的问题，叫做几何极值问题．

在讨论几何极值问题时，常用到以下两条定理：

(1) 两点间的线以直线之长为最短；

(2) 从一点到一直线所引的直线中，以垂线为最短．

下面我们应用反射变换来研究几个几何极值问题．

1．三角形周长问题

设 A、B 是不在直线 l 上的两定点，在 l 上求一点 C，使 $\triangle ABC$ 周长最短．

分析　由于点 A、B 可能位于直线 l 的同侧，也可能位于 l 的两侧，所以应分两种情形考虑：

i）设 A、B 位于直线 l 的同侧，而 C 点已经求出（图 12）．

由于线段 AB 为定长，要使 $\triangle ABC$ 的周长最短，只要 $AC+BC$ 最短.

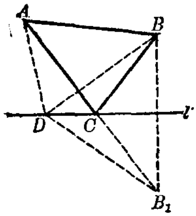


图 12

要使 $AC+BC$ 为最短，只要将 BC 变成 B_1C 的位置，使 ACB_1 成一直线，并且使 $B_1C=BC$. 要使 $BC=B_1C$，只要作 B 点关于直线 l 的反射象点 B_1 就可以了.

作法 作 B 点关于直线 l 的反射象点 B_1，连结 AB_1 交直线 l 于 C 点，则 C 点就是所求的点.

证明 因点 A、B 在直线 l 的同一侧，点 B_1 是点 B 关于直线 l 的反射象. 所以 A、B_1 位于直线 l 的两侧. 线段 AB_1 必与 l 相交. 设 D 是 l 上异于 C 的任一点，由反射的性质，有

$$BD=B_1D,$$

$$\because \quad AD+BD=AD+B_1D,$$

而 $$AD+B_1D>AB_1=AC+B_1C=AC+BC,$$

$$\therefore \quad AD+BD>AC+BC.$$

即证得 $\triangle ABC$ 的周长最短.

ii) 设 A、B 位于直线 l 的两侧(图 13)，连结 AB 与 l 相交于 O，因 AOB 不能构成三角形，所以 O 点不是所求的点. 如果设 C 点为所求的点，它使 $\triangle ABC$ 的周长最小，就是 $AC+BC$ 有最小值. 现在线段 CO 上任取一点 D，则不难证明

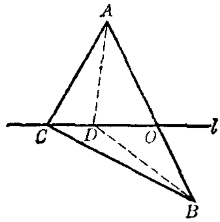


图 13

$$AD+BD<AC+BC,$$

这样与假设矛盾. 也就是说，在这种情形下，本题无解.

2. 波利亚(G. Polya)问题

试证明两端点在定圆周上，并且将这个圆分成面积相等的两块的曲线中，以该圆的直径长最短。(图 14)

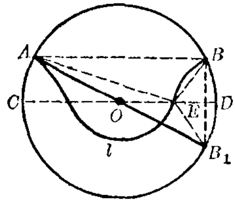


图 14

证明

i) 设 AB 是圆的直径，因为两定点 A、B 的连线中以直线段 AB 为最短，所以曲线 l 之长必大于直径.

ii) 设 AB 不是圆 O 的直径. 作直径 $CD \parallel AB$，由于 l 把圆分成面积相等的两块，则直径 CD 必与曲线 l 相交，且至少有两个交点. 设交点之一为 E，而且 E 不是圆心 O，作 B 点关于直径 CD 的反射象点 B_1，

$$\because \quad BB_1 \perp CD,\ B_1B \perp AB,$$

$\therefore \quad AB_1$ 为直径.

在 $\triangle AEB_1$ 中，

$$AE+EB_1>AB_1.$$

又 $BE=B_1E$，

$$\therefore \quad AE+BE>AB_1.$$

又　曲线 $AE \geqslant AE$，曲线 $BE \geqslant BE$，

$\therefore$　曲线 $l \geqslant AE+BE>AB_1$.

3. 法格勒洛(Fagnano)问题

在 $\triangle ABC$ 的三边上分别取 D、E、F 三点，所成 $\triangle DEF$ 称为 $\triangle ABC$ 的内接三角形. 试在锐角三角形 ABC 的所有内接三角形中，求出周长最短的三角形.

这个问题有两个著名的解法.

费叶尔(Fejer)解法分三步讨论:

i) 设 D 点是 BC 边上任意一定点，在 AB 及 AC 边上分别求 E 点及 F 点，使 $\triangle DEF$ 是 $\triangle ABC$ 中以 D 点为顶点的所有内接三角形中周长最短的.

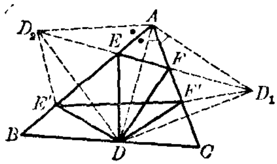


图 15

为此，分别作 D 点关于直线 AC 和 AB 的反射象 D_1 点和 D_2 点(图 15). 连结 D_1D_2，分别交 AB、AC 于 E、F，则 $\triangle DEF$ 即为所求的三角形.

为了证明这一结论，再任作一 $\triangle ABC$ 的内接 $\triangle DE'F'$，由反射变换的性质，有

$$DF = D_1F,\ DE = D_2E;$$

及

$$DF' = D_1F',\ DE' = D_2E'.$$

$$\therefore\quad \triangle DEF \text{ 的周长} = DE + EF + FD$$

$$= D_2E + EF + FD_1 = D_1D_2.$$

$$\triangle DE'F' \text{ 的周长} = DE' + E'F' + F'D$$

$$= D_2E' + E'F' + F'D_1$$

$$= \text{折线 } D_2E'F'D_1 \text{ 的长}.$$

而折线 $D_2E'F'D_1$ 的长大于线段 D_2D_1 的长，所以，$\triangle DEF$ 的周长较 $\triangle DE'F'$ 的周长为短.

ii) 为了解决原来的问题，就只要在线段 BC 上找出 D 点，使得按 i)中所述方法作出的 $\triangle DEF$ 的周长，比以 BC 上其他点按同样的方法作出的三角形周长为短就可以了. 由 i)的讨论可知，所求 D 点，应使线段 D_1D_2 的长为最短. 由反射的性质，有

$$AD_1 = AD = AD_2;$$