矿井定向測量联系三角形法

煤炭工業出版社

內 容 提 要

矿井定向測量是矿山測量工作的一个重要組成部分，其目的是統一地表和井下的座标。定向測量的連接方法的种类很多，但其中比較优越的是联系三角形法。本書专研究了这种方法，对图形布置、測量前的准备工作、观測方法、检核方法、平差和最后成果整理等，作了系統扼要的介紹，并举有实例和計算表格。

1188

礦井定向測量联系三角形法

吳永义編著

*

煤炭工业出版社出版（社址：北京东长安街煤炭工业部）

北京市書刊出版业營业許可証出字第 084 号

煤炭工业出版社印刷厂排印　　新华書店发行

*

开本787×1092公厘 $\frac{1}{32}$　印张 $4\frac{3}{16}$　字数81,000

1959年6月北京第1版　1959年6月北京第1次印刷

統一書号：15035·870　印数：0,001—3,000册　定价：0.55元

前　言

为了保証地下資源大量的合理的采出，并监督采矿工作正确进行，矿山測量工作已經成为采矿企业必不可少的一部分。

在矿山測量工作中，矿井定向測量是一件非常重要的工作。它的任务是把整个矿山地表和井下連成一个整体，以便解决地表和井下以及井下这个部分和那个部分之間的相互位置和关系問題。这在采矿工作进行过程中，具有极其重大的意义。

本書就联系三角形法的图形布置、測量前的准备工作、观測方法和检核方法、平差和最后成果整理等問題，作了系統的扼要的研究。然而，由于編写經驗缺乏，不当之处在所难免，希讀者随时指正。

作者于本溪鋼铁工业学院

1959.6.

目　录

緒　論

在新建、改建和生产的矿山企业的測量工作中，解决地表和井下座标統一而进行的矿井定向測量，是一項非常重要的工作。其任务在于測出：

（1）井下測量基点的座标；

（2）井下測量第一边的座标方位角——方向角。

很明显，只有当确定了上列两个地下巷道測量起始数据后，才能使地表和井下座标統一。从而保証地表及井下測量图紙和数据在同一座标系統中相一致。

定向問題的解决方法，是由矿体开拓方式决定的。利用生产能力較高的豎井开拓，是現在采矿的主要方式。当利用豎井开拓时，通过一个豎井进行定向測量是必需采用的方式。

就目前情况来講，通过一个豎井定向測量，一般是借助于从井筒中垂下两条鋼綫进行的。其内容包括地表連接、投点和井下連接三个部分。

地表和井下的連接方法有許多种，例如联系三角形法、四边形法、对称引綫法和稜鏡法等等。但是，无論从几何方案的布置上，或是从精度以及观測和計算的各个环节上，都可以看出联系三角形法是最为优越的。

苏联矿山測量学者 Д.Н. 奥格罗布林教授在总結对联系三角形的評价时曾經說过："联系三角形是矿山測量实

际工作中最主要的和最普遍的方法”。“当选择連接方法时，首先要考虑在这种情况下是否能采用联系三角形法。只有当矿内不可能构成有利形状的联系三角形时，才可采用其它連接方法”。以上也足以說明联系三角形法在所有連接方法中的地位。

一、联系三角形法的实質

应用联系三角形法进行連接的情况，如图1所示。从井筒中垂下两条鋼綫A和B，在地表及井下定向中段靠近井筒选择两点C和C'，其中每一点和垂下的两条鋼綫A、B构成一个三角形，如果将它投影在水平面上，则成为具有一个公共$\overline{AB}$边的两个相連的三角形，我們称这样的三角形为联系三角形。

地表联系三角形中，如果在C点观测$\angle ACD$和γ角，丈量d边及a、b两边，按三角学公式計算α和β角，就可以根据已知的$\overline{CD}$方向推出$\overline{AB}$方向；从D点座标推出A或B的座标。如果在井下联系三角形中也观测$\angle A'C'D'$和γ'角；丈量d'边及a'、b'两边，同样按三角学公式求得α'、β'角，借助两垂綫在同一鉛垂面内的原理，就可以从$\overline{AB}$的方向确定井下第一边$\overline{C'D'}$的方向；从A或B的座标确定C'或者D'的座标。这样就可完成定向测量的任务。

从測量基本原則来考虑，为了检核測量結果和提高精度，在可能进行多余观測情况下，必須进行必要的多余观測。为此，一般規定，联系三角形法的实測因素是C点一組

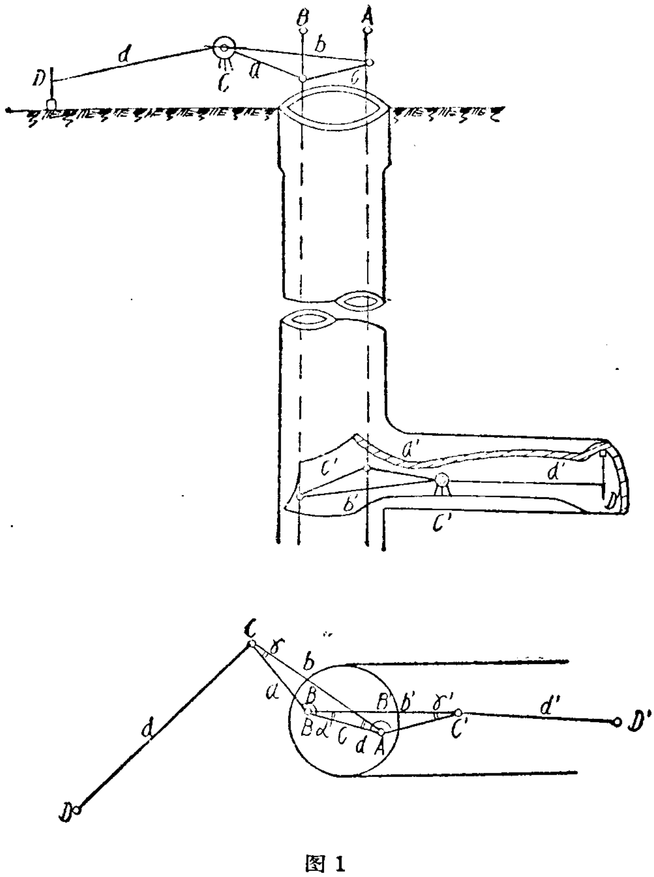

图 1

角和 a、b、c 三边，从而根据多余观测来检核测量結果是否能满足精度要求。在满足精度要求的情况下，按最小二乘法原理消除不符值，也就是平差。最后再依改正后的测量結果，从地表的已知边 $\overline{CD}$ 的方向角及 D 点座标，計算井下定向中段起始边 $\overline{C'D'}$ 的方向角及测量基点 D' 的座标。

二、一般对联系三角形法有关的規定

为了詳細的研究和討論連接方法中最好最普遍的方法——联系三角形法，这里将一般有关的規定归納如下：

（1）总的規定：豎井定向测量至少要独立的进行两次。两次独立定向所得井下起始边方向角之差不得超过 $\pm 3'$。在定向测量之前，必須进行以选择测量方法为主的誤差預計，其中地表或井下連接测量的中誤差不得大于 $\pm 30''$。

（2）对联系三角形形状的規定：联系三角形最合适的形状是两垂綫处角度 α 小于 $2°\sim 3°$；β 大于 $176°\sim 174°$，a 和 c 两边的比值在可能条件下应尽量縮小。当 $\alpha < 20°$；$\beta > 160°$ 和 $\frac{a}{c} < 3$，在主要豎井定向测量时仍可以采用。

（3）对联系三角形法观测因素的規定：在联系三角形 C 点测角，以测 θ_1、θ_2、θ_3 和 γ 角为标准。边长必需丈量 a、b、c 三边。

C 点测角所应用的經緯仪最小讀数 $t'' \leqslant 30''$。要进行三次完全复测。每个角的检驗值和最終值之差不得超过 $1.5t''$。

角度測量完毕必須平差，平差后角值的中誤差不得大于±7″。

丈量联系三角形的 a、b、c 边长时，起碼要用一端具有公厘刻划的、經过检定的普通鋼尺。丈量各边时要施以一定的拉力，讀数讀到公厘小数下一位。丈量次数不得少于四次。任意两次之差不得大于 1.0 公厘。平均值的中誤差不能超过 ±0.4 公厘。

(4)对联系三角形法的計算方法和检核方法的規定：在联系三角形两垂綫处角度 $\alpha<20°$、$\beta>160°$ 时，按正弦公式解算联系三角形；当 $\alpha>20°$、$\beta<160°$ 的情况下，則按边公式——正切公式計算。

应用正弦公式解联系三角形，以对比实測和計算两垂綫距离 c 的方法检核，其差值在一般情况下不得超过± 2 公厘。如果联系三角形的边长在垂綫擺动的情况下丈量，則可放寬到± 4 公厘。

应用边公式解算联系三角形时，以对比 γ 角的实測值和計算值的方法检核，其差不得大于±1′30″。

第一章　联系三角形法的誤差分析

第1节　联系三角形法的角度中誤差和最佳形狀

众所周知，为了保証和提高測量工作的質量，除了在实际观測中注意減少各观測因素的誤差外，还要在几何方案的布置上，尽量滿足最佳图形的要求。在計算时，应根

据由于各个观测因素誤差影响所求値誤差較小的原則，来选择計算路綫和方法。

按一般規定，联系三角形两垂綫处的角度 α 、β 的計算，在 $\alpha<20°$、$\beta>160°$ 时，应用正弦公式求解，即：

$$\left.\begin{aligned}\sin\alpha&=\frac{a}{c}\sin\gamma\\ \sin\beta&=\frac{b}{c}\sin\gamma\end{aligned}\right\}\qquad(1\text{-}1)$$

当 $\alpha>20°$、$\beta<160°$ 时，应用边公式求解，也就是：

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}&=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}\\ \mathrm{tg}\frac{\beta}{2}&=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}\end{aligned}\right\}\qquad(1\text{-}2)$$

式中 $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$。在計算 α 、β 时，(1-1)和(1-2)式中的观測值 a、b、c 和 γ，应为其相应的最或是值。

这里首先分別討論两种計算方法的角度中誤差、最佳形状和計算路綫問題。

一、按正弦公式解联系三角形的角度中誤差和最佳形状

設联系三角形观测因素 a、b、c 三边的中誤差为 m_a、m_b、m_c，γ 角的中誤差为 m_γ。并以 m_α 和 m_β 表示計算角 α 和 β 由各观測因素誤差而引起的中誤差。根据公式(1-1)

从誤差理論得知:

$$m_{\alpha}^{2}=\left(\frac{\partial\alpha}{\partial a}\right)^{2}m_{a}^{2}+\left(\frac{\partial\alpha}{\partial c}\right)^{2}m_{c}^{2}+\left(\frac{\partial\alpha}{\partial\gamma}\right)^{2}m_{\gamma}^{2}. \tag{a}$$

式中对公式(1-1)的偏导数为:

(i) $\frac{\partial\alpha}{\partial a}=+\frac{\sin\gamma}{c\cdot\cos\alpha}$，将$\frac{\sin\alpha}{a}=\frac{\sin\gamma}{c}$代入得:

$$\frac{\partial\alpha}{\partial a}=+\frac{1}{a}\operatorname{tg}\alpha. \tag{b}$$

(ii) $\frac{\partial\alpha}{\partial c}=-\frac{a\sin\gamma}{c^{2}\cdot\cos\alpha}$，将$\frac{\sin\alpha}{a}=\frac{\sin\gamma}{c}$代入得:

$$\frac{\partial\alpha}{\partial c}=-\frac{1}{c}\operatorname{tg}\alpha. \tag{c}$$

(iii) $\frac{\partial\alpha}{\partial\gamma}=+\frac{a\cdot\cos\gamma}{c\cdot\cos\alpha}$，将$\frac{a}{c}=\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$代入得:

$$\frac{\partial\alpha}{\partial\gamma}=+\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\gamma}. \tag{d}$$

将(b)、(c)和(d)式平方代入(a)式，提出公共項为:

$$\left.\begin{aligned}&m_{\alpha}''=\pm\operatorname{tg}\alpha\sqrt{\rho^{2}\left\{\left(\frac{m_{a}}{a}\right)^{2}+\left(\frac{m_{c}}{c}\right)^{2}\right\}+\left(\frac{m_{\gamma}''}{\operatorname{tg}\gamma}\right)^{2}}\\&\text{同理:}\\&m_{\beta}''=\pm\operatorname{tg}\beta\sqrt{\rho^{2}\left\{\left(\frac{m_{b}}{b}\right)^{2}+\left(\frac{m_{c}}{c}\right)^{2}\right\}+\left(\frac{m_{\gamma}''}{\operatorname{tg}\gamma}\right)^{2}}\end{aligned}\right\}\tag{1-3}$$

式中$\rho=206000''$。

很明显，α的中誤差m_{α}随α增大而增大，β角的中誤差随β角趋近180°而减小。如果当$\alpha=0°$、$\beta=180°$,

则联系三角形成为一条直線，α 和 β 不存在而 m_α 和 m_β 亦为該式的极小，但这时也就失掉联系三角形法本来的形状了。

为了使由于各个观测因素誤差影响計算值的誤差为最小，我們不难得出結論：当 α 趋近于 $0°$，β 趋近于 $180°$ 的伸展联系三角形时，是按正弦公式解联系三角形的最佳形状。

对于伸展联系三角形，公式(1-3)右側前两項可以略去不計，即：

$$\left.\begin{aligned} m''_\alpha &= \pm\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\gamma}\,m''_\gamma \\ m''_\beta &= \pm\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\gamma}\,m''_\gamma \end{aligned}\right\} \tag{e}$$

我們知道，当 α 和 γ 很小时，$\sin\alpha\approx\alpha''\sin 1''\approx\frac{1}{\rho''}\alpha''$；$\sin\gamma\approx\gamma''\sin 1''\approx\frac{1}{\rho''}\gamma''$，因而从(1-1)式知伸展联系三角形两垂綫处角度可按下列近似公式計算：

$$\left.\begin{aligned} \alpha'' &= \frac{a}{c}\gamma'' \\ \beta'' &= \frac{b}{c}\gamma'' \end{aligned}\right\} \tag{1-4}$$

同理，如果将近似公式 $\operatorname{tg}\alpha\approx\frac{a}{c}\operatorname{tg}\gamma$ 和 $\operatorname{tg}\beta\approx\frac{b}{c}\operatorname{tg}\gamma$

代入(e)式，則伸展联系三角形α、β角的中誤差可按下列近似公式計算，即：

$$\left.\begin{aligned} m''_\alpha &= \pm \frac{a}{c} m''_\gamma \\ m''_\beta &= \pm \frac{b}{c} m''_\gamma \end{aligned}\right\} \tag{1-5}$$

应用該式計算α、β角的中誤差，在$\alpha<2°$、$\beta>176°$的情况下，虽然計算誤差达1.5″，但还是可允許的。同样从m_α和m_β的計算式中可以看出，随着两投下鋼綫距离c的加大和从C点到两垂下鋼綫的距离的縮短，而α、β的誤差亦減小。

比較公式(1-3)、(1-5)中的m_α和m_β。在伸展联系三角形或銳-鈍角联系三角形中$a<b$、$|\mathrm{tg}\,\alpha|<|\mathrm{tg}\,\beta|$，因而$m_\alpha<m_\beta$。所以从井上起始边、点推算两垂綫的方向和座标，以及在井下定向中段从两垂綫方向和座标推算第一边方向角及測量基点的座标时，都以引入长边和小角α为佳。

二、按边公式解联系三角形的角度中誤差和最佳形状

現在我們研究一下，按正切公式解联系三角形时的角度中誤差及最佳形状。同样設联系三角形观測因素a、b、c三边的中誤差为m_a、m_b、m_c，以m_α和m_β表示計算角α和β由各个观測值而引起的中誤差，从公式(1-2)知：

$$m_\alpha^2=\left(\frac{\partial\alpha}{\partial a}\right)^2 m_a^2+\left(\frac{\partial\alpha}{\partial b}\right)^2 m_b^2+\left(\frac{\partial\alpha}{\partial c}\right)^2 m_c^2. \quad \text{(a)}$$

式中的偏导数如果按公式（1-2）直接推演非常繁瑣，为簡化計，这里根据余弦公式推导，其結果是完全相同的

$$\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}.$$

因而其偏导数为：

（i）$\frac{\partial\alpha}{\partial a}=+\frac{a}{bc\cdot\sin\alpha}$，将$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}$代入得：

$$\frac{\partial\alpha}{\partial a}=+\frac{1}{c\cdot\sin\beta}. \quad \text{(b)}$$

（ii）$\frac{\partial\alpha}{\partial b}=-\frac{a}{bc\cdot\sin\alpha}\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)$，将$\cos\gamma=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$和$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}$代入得：

$$\frac{\partial\alpha}{\partial b}=-\frac{\cos\gamma}{c\cdot\sin\beta}. \quad \text{(c)}$$

（iii）$\frac{\partial\alpha}{\partial c}=-\frac{a}{bc\cdot\sin\alpha}\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\right)$，同理得：

$$\frac{\partial\alpha}{\partial c}=-\frac{\cos\beta}{c\cdot\sin\beta}. \quad \text{(d)}$$

将(b)、(c)和(d)式代入(a)式得：

$$
\left.\begin{aligned}
m''_{\alpha} &= \pm\rho''\frac{1}{c\cdot\sin\beta}\sqrt{m_a^2+m_c^2\cos^2\beta+m_b^2\cos^2\gamma}\\
m''_{\beta} &= \pm\rho''\frac{1}{c\cdot\sin\alpha}\sqrt{m_b^2+m_c^2\cos^2\alpha+m_a^2\cos^2\gamma}
\end{aligned}\right\}\quad(1\text{-}6)
$$

根据一般规定，联系三角形边长丈量的絕对誤差要求一致，即 $m_a=m_b=m_c$ 令为 m_s，则上式为:

$$
\left.\begin{aligned}
m''_{\alpha} &= \pm\rho''\frac{m_s}{c\cdot\sin\beta}\sqrt{1+\cos^2\beta+\cos^2\gamma}\\
m''_{\beta} &= \pm\rho''\frac{m_s}{c\cdot\sin\alpha}\sqrt{1+\cos^2\alpha+\cos^2\gamma}
\end{aligned}\right\}\quad(1\text{-}7)
$$

如令联系三角形的面积为 F，从图 2 知:

$$2F=a\cdot c\cdot\sin\beta=b\cdot c\cdot\sin\alpha\text{.}$$

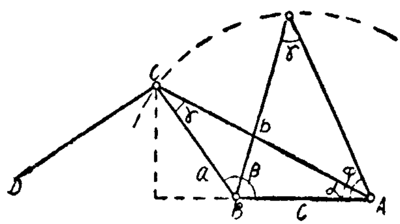

图 2

所以

$$
\left.\begin{aligned}
m''_{\alpha} &= \pm\rho''\frac{a\cdot m_s}{2F}\sqrt{1+\cos^2\beta+\cos^2\gamma}\\
m''_{\beta} &= \pm\rho''\frac{b\cdot m_s}{2F}\sqrt{1+\cos^2\alpha+\cos^2\gamma}
\end{aligned}\right\}\quad(1\text{-}8)
$$

很明显，随着联系三角形面积F的增大而α、β角的中誤差減小。在两垂綫距离c一定的情况下，以c边为底的等腰三角形具有最大面积。但是随着面积的增大，同时a、b和$\cos\beta$、$\cos\gamma$亦发生变化，所以究竟当联系三角形是什么样的等腰三角形时，m_α和m_β为最小，我們要加以研究。

設等腰联系三角形的底角为φ，即$\alpha=\beta=\varphi$，所以

$$m_\varphi^2=\rho^2\frac{m_s^2}{c^2}\left(\frac{1+\cos^2\varphi+\cos^2\gamma}{\sin^2\varphi}\right).$$

式中γ角为等腰三角形的頂角，所以$\gamma=180-2\varphi$，因而

$$\cos\gamma=-\cos2\varphi=2\sin^2\varphi-1.$$

則 $\cos^2\gamma=4\sin^4\varphi-4\sin^2\varphi+1$.代入上式，

$$m_\varphi^2=\rho^2\frac{m^2}{c^2}\left(\frac{4\sin^4\varphi-4\sin^2\varphi+\cos^2\varphi+2}{\sin^2\varphi}\right).$$

亦即 $m_\varphi^2=\rho^2\frac{m_s^2}{c^2}(4\sin^2\varphi+2\sin^{-2}\varphi+\mathrm{ctg}^2\varphi-4).$

令 $f=4\sin^2\varphi+2\sin^{-2}\varphi+\mathrm{ctg}^2\varphi-4.$

則 $$m_\varphi^2=\rho^2\frac{m_s^2}{c^2}f.$$

为了使m_φ为最小，必須令$\frac{d}{d\varphi}f=0$，即

$$\frac{d}{d\varphi}f=8\sin\varphi\cos\varphi-4\sin^{-3}\varphi\cos\varphi-2\,\mathrm{ctg}\,\varphi\sin^{-2}\varphi=0.$$

整理得:

$$\frac{8\sin^4\varphi\cos\varphi-4\cos\varphi-2\cos\varphi}{\sin^3\varphi}=0.$$

从分子中提出 $\cos\varphi$ 得:

$$\frac{(8\sin^4\varphi-6)\cos\varphi}{\sin^3\varphi}=0.$$

这样，必須令 $\cos\varphi=0$ 或者令 $8\sin^4\varphi-6=0$。当 $\cos\varphi=0$ 时，$\varphi=90°$，則不能构成联系三角形，因而必須令;

$$8\sin^4\varphi-6=0.$$

即 $$\sin\varphi=\sqrt[4]{\frac{6}{8}}=\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}\approx 0.93063.$$

則 $$\varphi=68°32'.$$

因而等腰联系三角形的頂角 $\gamma=180-2\varphi$,

即 $$\gamma=42°56'.$$

所以我們得出結論：当应用边公式解联系三角形时，考虑到两計算角具有同样精度，其形状以頂角为42°56′的等腰联系三角形为佳。

在联系三角形为以頂角是42°56′的等腰三角形的情况下，$\sin^2\varphi=0.86608$、$\cos^2\varphi=0.13392$、$\cos^2\gamma=0.53720$，即 $\sqrt{f}=1.388$,

故得 $$m''_\alpha=m''_\beta=\pm\rho''\frac{m_s}{c}\times 1.388. \qquad (1\text{-}9)$$

从公式(1-7)和(1-9)中，可以得出和按正弦公式解联系三角形法时同样的結論：即加大两垂綫距离 c 会使 α、