

计算几何及图形处理 (CAD 基础)

王爱玲 编

国防工业出版社

计算几何及图形处理

(CAD基础)

王爱玲 编

国防工业出版社

内 容 简 介

本书是计算机辅助设计 (CAD) 的基础理论之一, 系统地介绍了从事 CAD 工作所必需掌握的计算几何理论知识及图形显示硬件、软件知识。全书内容分两部分, 共十三章。第一部分 CAD 中的计算几何, 主要介绍几何变换, 插值与逼近, 样条函数, 样条曲线、曲面及数控加工中的拟合方法等; 第二部分图形处理, 主要介绍图形显示硬件设备及软件编制, 图形的窗视变换, 消去隐藏线、隐藏面的算法, 三维物体几何造型理论及典型系统等内容。

本书可作为高等院校机械专业及其他形体 (如飞机、汽车、船舶等) 设计专业本科高年级学生及研究生用教材, 也可供从事计算机辅助设计、制造 (CAD/CAM) 的科技人员学习参考。

计算几何及图形处理

(CAD基础)

王 爱 玲 编

*

国防工业出版社出版、发行

(北京市车公庄西路老虎店七号)

新华书店经售

国防工业出版社印刷厂印刷

*

787×1092 1/16 印张18¹/₄ 424千字

1988年11月第一版 1988年11月第一次印刷 印数: 0,001—2,080册

ISBN 7-118-00351-4/021 定价: 3.65元

前 言

计算机作为一种工具,在科学技术、国民经济各个领域,发挥着越来越大的作用。发展计算机辅助设计和制造(CAD/CAM——Computer Aided Design and Manufacturing)已成为发展科学技术和进行技术改造的重要途径。

计算几何主要研究几何外形信息的计算机表示、分析和综合,具体对象是曲线和曲面。而图形显示学的基本内容是图形显示设备硬件、软件,图形处理的理论计算及实际应用。

几何外形的设计,在航空、汽车、造船业中是必不可少的环节。在机械制造业中,大多数的机械构件是以规则形体为主,但随着数控技术的飞速发展及产品更新换代周期的缩短,机械制造中的模具设计、凸轮设计、刀具设计及机械产品的工业造型设计等方面都迅速向计算机辅助设计方向发展。为结合机制专业的特点,并从应用的角度出发,本教材精选了计算几何的有关内容;对于图形显示则从较高的起点取材,重点放在对于图形的加工和处理,尽量介绍有关的最新知识及正在解决和尚待解决的问题。本教材将计算几何及图形处理两部分内容合起来编写,使读者在较短的时间内能尽快掌握基本理论知识,并迅速应用于CAD的有关课题中去。

本教材分两部分。第一部分CAD中的计算几何,着重介绍坐标变换,图形变换,曲线、曲面构造的数学理论依据和计算方法。考虑到读者的需要,还加入了微分几何预备知识。为了适应目前数控技术的发展,书中编入了数控加工中的几种拟合方法。第二部分图形处理,除介绍交互式图形显示有关基本知识(图形显示硬件、软件,图形的窗口、视区变换等)外,还编入了国内外在三维图形处理,隐藏线、隐藏面的消除及对图形明暗度处理等较新而难度较大的一些内容。

本教材在编写时,力求取材新颖,同时注意了内容的层次由浅入深,着重介绍基本概念、基本算法及解决问题的方法、思路,配合软件设计、上机操作等实践环节,有利于培养学生从事CAD有关科学研究的能力。

本教材作为机制专业和其他形体(如飞机、汽车、船舶等)设计专业高年级学生和研究生的教材,学时数为40~60学时。也可供从事CAD/CAM工作的科技人员学习参考。在授课内容的选取上可根据学时数和学生的基础灵活取舍。本课程的先修课程为微分几何、计算方法、高级语言(如FORTRAN、BASIC等)程序设计、数据结构、微机原理及应用等有关知识。

本书编写过程中得到北京航空学院戴约真、朱心雄、吴骏恒三位同志的指导和帮助,北京工业学院周克绳、周惠定及贺白眉对全书进行了仔细审阅,并提出了许多指导性的意见,教材原稿在本科生和研究生使用过程中许多同志提出了不少宝贵意见和建议,在此谨表示诚挚的感谢。由于时间仓促,编者水平有限,书中的错误和不足之处,殷切希望广大读者批评指正。

编 者

目 录

绪论	1
§ 0.1 计算几何的发展	1
§ 0.2 交互式图形显示的发展	3
§ 0.3 CAD的几个发展趋势	4

第一部分 CAD中的计算几何

第一章 曲线和曲面概述	6
§ 1.1 曲线的基本表达式	6
§ 1.2 矢函数的导矢及其应用	7
§ 1.3 曲线的自然参数方程	9
§ 1.4 曲线论的基本公式	10
§ 1.5 曲率及挠率	12
§ 1.6 曲面概述	15
思考题	21
第二章 坐标变换与图形变换	22
§ 2.1 点变换	22
§ 2.2 齐次坐标	24
§ 2.3 平面图形变换	27
§ 2.4 三维变换	30
思考题	41
第三章 插值与逼近	42
§ 3.1 概述	42
§ 3.2 线性插值与二次插值	43
§ 3.3 拉格朗日 (Lagrange) 插值法	44
§ 3.4 牛顿 (Newton) 插值法	47
§ 3.5 埃尔米特 (Hermite) 插值法	51
§ 3.6 最小二乘逼近	55
思考题	57
第四章 样条函数与样条曲线	58
§ 4.1 概述	58
§ 4.2 插值三次样条函数	58
§ 4.3 三次样条函数	65
§ 4.4 参数三次曲线的表示式	69
§ 4.5 参数三次曲线的几何特征	73
§ 4.6 参数三次样条曲线	82
§ 4.7 二次样条函数	85

思考题	86
第五章 贝齐尔曲线和B样条曲线	87
§ 5.1 概述	87
§ 5.2 贝齐尔曲线	87
§ 5.3 B样条曲线	101
§ 5.4 三次参数曲线段的三种等价表示	128
思考题	130
第六章 样条曲面	131
§ 6.1 双三次样条函数	131
§ 6.2 参数样条曲面	132
§ 6.3 孔斯曲面	134
§ 6.4 双三次曲面与弗格森曲面	138
§ 6.5 贝齐尔曲面	141
§ 6.6 B样条曲面	145
§ 6.7 各种曲面之间的关系	146
思考题	149
第七章 数控加工中的拟合方法	150
§ 7.1 局部坐标系下的分段三次样条拟合方法	150
§ 7.2 圆弧样条拟合法	154
§ 7.3 抛物线拟合	160
§ 7.4 双圆弧逼近	161
思考题	163

第二部分 图形处理

第八章 图形显示硬件	164
§ 8.1 概述	164
§ 8.2 显示器简介	165
§ 8.3 显示技术及其控制	168
§ 8.4 输入装置与输入技术	174
§ 8.5 图形输出设备简介	177
思考题	177
第九章 图形显示处理	178
§ 9.1 窗视变换	178
§ 9.2 二维图形的剪取	180
§ 9.3 三维图形的剪取及窗视变换	184
§ 9.4 三维屏坐标系的特点	189
思考题	193
第十章 消除隐藏线及隐藏面	194
§ 10.1 概述	194
§ 10.2 凸多面体消除隐线算法	194
§ 10.3 曲面图形消除隐线算法	200

§ 10.4 多面体隐藏面的消除	204
思考题	210
第十一章 三维物体几何造型	211
§ 11.1 概述	211
§ 11.2 三维形体的几何表示法	212
§ 11.3 简单节集造型系统	217
§ 11.4 链表结构造型	221
§ 11.5 圆柱面的相贯计算	227
思考题	233
第十二章 图形逼真表示	234
§ 12.1 漫射照明	234
§ 12.2 镜面反射	235
§ 12.3 介绍几种明暗模型	236
§ 12.4 阴影及透明度	238
§ 12.5 亮度与彩色	240
思考题	241
第十三章 图形显示软件	242
§ 13.1 信息输出程序组	243
§ 13.2 支持程序简介	253
§ 13.3 信息输入程序组	255
§ 13.4 图节功能程序组	256
§ 13.5 剖面线程序简介	257
§ 13.6 图形显示软件设计基本原则	261
思考题	264
附录	265
附录 1 坐标综合变换程序	265
附录 2 追赶法解三次样条函数连续性方程程序 - 1	269
附录 3 追赶法解三次样条函数连续性方程程序 - 2	270
附录 4 三次贝齐尔曲线子程序	271
附录 5 三次 B 样条曲线子程序	272
附录 6 双三次曲面片子程序	272
附录 7 分段三次样条拟合程序及其说明	273
附录 8 圆弧样条曲线拟合程序及其说明	280
参考文献	285

绪 论

随着科学技术的飞速发展及计算机在国民经济各个领域中的普遍应用, 计算机辅助设计, 即 CAD(Computer-Aided Design) 越来越为人们所重视。当前的 CAD 工作中, 计算机远远不只是一种高效的计算工具, 它已成为人们进行创造性设计活动的得力助手甚至参谋。计算几何作为 CAD 的基础理论之一, 主要研究内容是几何形体的数学描述和计算机表达, 它同计算机辅助几何设计, 即 CAGD(Computer-Aided Geometric Design) 有着十分密切的关系。而 CAGD 是由微分几何、代数几何、数值计算、逼近论、拓扑学以及数控技术等形成的一门新兴边缘学科, 其主要研究对象和内容是对自由形曲线、曲面的数学描述、设计、分析及图形的显示、处理等。本世纪 60 年代, 适应人机对话式交互设计及其图形显示的需要而产生的计算机图形学发展非常迅速。为此计算几何与计算机图形学的联系也越来越密切。本章着重介绍这两方面的现状及发展趋势。

§ 0.1 计算几何的发展

在第二次世界大战期间, 人们已首次用计算几何的方法解决实际问题。当时尤其是航空工业的发展激励了新的设计方法的形成和发展。计算几何这一术语, 最初是由明斯基(Minsky)和帕伯特(Papert)于 1969 年作为模式识别的代用词而提出的, 到 1972 年, 福雷斯特(A. R. Forrest)给其下了正式定义: “对几何外形信息的计算机表示、分析和综合”。这里几何外形信息是指那些用来确定某些几何外形(如平面曲线、空间曲线、曲面)的离散数据点(或称型值点)或特征多边形。按照给定的信息, 建立一定的数学模型(如曲线、曲面方程), 再通过计算机进行计算, 求得其他所需的信息(如除型值点外的其他点), 这就是计算机表示。之后还需对所建立的数学模型特性及误差等进行分析、综合, 以便逼真地反映出几何形体。这些便是计算几何所要研究的内容。计算几何这门新兴的边缘学科, 近年来发展表现出了以下几方面的显著特征: 几何化、代数化(离散化)、图形化和应用的广泛化^[2]。

0.1.1 几 何 化

计算几何研究的对象是几何图形。早期人们对于图形的研究一般都是先建立坐标系, 把图形转换成函数, 然后用插值和逼近的数学方法, 特别是用样条函数作为工具来分析图形, 取得了可喜的成果。然而, 这些方法过多地依赖于坐标系的选取, 缺乏几何不变性, 特别是用来解决某些大挠度曲线及曲线的奇异点等问题时, 有一定的局限性。

几何图形是实际物体的抽象描述, 几何化是指被研究对象本身的性质所决定的一种必然趋势。1972 年以来, 苏步青教授在计算几何中开创性地运用了代数曲线论的仿射不变量方法, 研究和解决 m 维仿射空间中 n 次参数曲线及有理参数曲线的奇点和拐点分布问题, 取得了一系列重要的理论结果, 逐步形成了以几何不变量方法研究自由形曲

线、曲面的理论体系。这些理论研究成果已成功地用于造船、航空和汽车等工业部门的外形设计,并取得了显著的经济效益。

在其他方面,如研究曲线几何逼近的新方法;证明 n 次贝齐尔(P. Bézier)曲线和 n 次B样条曲线的凸性定理的新方法等专题研究方面,国内外学者都作了大量的工作。据有关专家预测,这种几何化的观点和结果还将对其他领域(如数值分析等)产生影响。

0.1.2 代数化

在国外,计算几何的代数化有一股很强的势头。为了在计算机和图形显示终端表示和处理各种复杂的曲面和几何形体,需进行大量的计算,往往需要将问题代数化、线性化、离散化,特别对于最新式的全色连续色调的图形,必须对显示屏上的光栅网格点逐点进行计算扫描,例如对 1000×1000 个栅格,就有100万个点,每更新一帧画面需作上亿次运算,因此,计算问题直接影响到图形显示的质量和速度。而质量和速度问题对动态显示尤其重要。

目前,B样条曲面在几何外形设计中占有愈来愈重要的地位。里森弗尔德(Riesenfeld)等把离散样条理论应用到CAGD中,给出简单的递推公式和分段技术,以便用松散的形式而不是用严谨的函数形式来定义B样条曲面,这样便于求交、曲面显示和着色等问题的计算。

萨宾(Sabin),卡特莫(Catmull)和克拉克(Clark)等人推广了离散B样条函数思想,把在矩形网格上的B样条曲面推广到一般拓扑网格上的曲面构造,这是很值得注意的研究方向。巴海尔(Barnhill),法林(Farin)等人把孔斯(S. A. Coons)曲面片思想推广到三角形域,解决了曲面片拼接时出现的尖锐棱边问题。

戈登(Gordon)把孔斯曲面片看作两个插值算子的布尔和,不但给出了孔斯方法的严密的数学解释,而且推广了他的思想,以构造符合各种特殊要求的插值算子。这是代数化方面的另一个值得注意的研究方向。

在离散化的有关问题中,往往需要研究一些几何问题的算法和估计其工作量,在此基础上又发展了所谓“几何复杂性”的新分支。目前国内在代数化、三角域插值和几何复杂性方面的研究属薄弱环节。

0.1.3 图形化

随着交互式图形显示系统在CAGD中的广泛应用,计算机图形学作为新兴学科得到迅速发展。其主要研究对象是图形的生成、变换、显示、剪取、隐藏线和隐藏面的消除、阴影色调及相应的光顺处理等。其中剪取问题是计算机图形学的一个基本问题,剪取的关键是速度,尤其是在交互式动态显示和最新式的光栅扫描显示中,剪取的速度直接影响到图形显示的质量。对消除隐藏线(面)的问题,至今已有几百种算法,但是否存在最佳方法?如何找出最佳方法?还有色调、阴影的光顺问题等至今尚未很好解决。这些问题都需用计算几何的理论方法作进一步的探索。目前我国在图形学研究方面与世界先进水平相比差距较大,但正在努力缩短这一差距。例如我国学者梁友栋提出了剪取的新理论和新方法,把高维的剪取归结为一维的剪取,把多边形剪取变成解一元不等式

组问题, 比国际上公认为最好的编码法速度快一倍, 而且简单, 适合于一般的计算机语言。

0.1.4 应用广泛化

从 60 年代起, 计算几何的产生及最初应用, 主要围绕着航空、造船、汽车三大工业部门的几何外形设计。之后, 计算几何向着各部门的辅助设计和辅助制造方面扩展, 国内在这方面已取得了一批达到世界先进水平的应用研究成果。主要表现在船体数学放样、船体曲面设计、飞机外形设计、叶片设计、汽车外形设计、道路线形设计、地图绘制等方面。

在国外, 计算几何的应用, 除了在诸如飞机、船舶、汽车和一般机械部件设计这些传统领域外, 正扩展到越来越多的技术领域。例如: 人体器官(脑、心脏、胃等)X 光断层扫描立体图象重建; 导弹地形匹配; 飞行模拟训练; 石油勘探地层结构图的建立; 鞋、帽、服装外形设计; 动画片和艺术图案设计等等。总之, 计算几何已渗入到各个领域。

§ 0.2 交互式图形显示的发展

交互式计算机图形显示是计算机与显示设备相结合、通过人和机器复杂的交互作用进行的图形显示。交互式图形学是当前发展很快的一个学科分支, 已有 20 多年的历史。其主要研究内容是各种图形显示设备、图形显示软件及图形显示的计算方法。

第一台计算机控制的图形显示器出现于 1950 年, 安装在美国麻省理工学院(MIT)的 Whirlwind-I 计算机上, 只能产生简单的图形。目前的交互式计算机图形显示技术的基本概念是 Ivan E. Sutherland 于 1962 年提出的。60 年代中叶, 美国 MIT、通用汽车公司、贝尔电话实验室以及洛克希德飞机公司联合开创了计算机-图象仪的黄金时代。从此, 交互式图形显示技术应用范围越来越广。不仅用于飞机、船舶、汽车、建筑、机械制造、电子线路等的计算机辅助设计(CAD), 而且利用图形系统辅助编制数控加工程序, 在计算机辅助制造(CAM)领域里发挥了其直观和形象化的特点; 进而用于 CAD/CAM 一体化方面, 使设计、制造、管理密切地衔接起来, 加快了技术和管理信息的传递, 使之形成统一的系统。

目前在硬件方面的发展趋势是使其有较高的分辨率和轻便性。70 年代, 存储管式显示器是通用的显示装置, 图象保留存储在屏幕荧光体内, 由于没有再生, 因此无闪烁问题, 但其屏幕更新速率低, 彩色能力差。而随机扫描显示器(或称画线显示器或刷新式显示器)是靠控制阴极射线管(CRT)的电子束偏转, 使其按照图形轨迹扫描荧光屏, 显示出所需的图形。由于荧光粉发光后不久就会暗淡下去, 这对大型文件或复杂图形, 在图象尚未扫完之前, 部分荧光屏图象已暗淡下去, 故出现图象闪烁现象。但这种显示器的动态性能和交互性能很强。80 年代发展起来的光栅扫描显示器带来了无闪烁和完全彩色的表达能力。这种显示器是将荧光屏分成许多栅格扫描单元, 存储单元的数值相应地代表了扫描单元的亮、暗, 加上彩色效应, 可以逼真地表示物体。目前对光栅显示器公认的标准是具有 1000×1000 象素分辨率、60Hz 无交错再生速率的彩色装置⁽³⁾。作为工程绘图工作站, 除显示设备外, 还必须配置各种光标控制设备。对它们的选用,

受到显示装置使用技术的限制。目前可供选用的设备有：数字化板、跟踪数字化仪 (Tracking digitizers)、鼠标器 (Mouse)、光笔、操纵杆、压轮、跟踪球、触板 (Touchpads)、接触屏幕 (Touchscreens)、和箭头键 (Arrow keys) 及声控装置等。

对于任何计算机、图形显示器，都必须配置相应的软件系统，才能提供用户使用。软件中最基本的部分——图形显示程序包，是用现有的某种高级语言编写的一套子程序系统。60年代初，美国 CALCOMP 公司绘图设备及其图形包问世。60年代后期将该软件进行扩充和标准化，逐渐形成了面向批处理的计算机图形标准软件。其间 MIT 研制的 SKETCHPAD 系统，开辟了交互式计算机图形显示的方向。60年代末，TEKTRONIX 公司研制出直视存储管显示终端及相应的图形程序包 PLOT-10，随后将其不断扩充、修改，目前已有不少版本广泛应用于各个领域。70年代以后，由于分时系统和微型计算机的广泛使用，要求软件不仅要有高级图形功能的用户接口，而且具有独立于设备的重要特征，进而提出了图形软件功能的标准化问题。1974 年成立了国际图形标准规划委员会 (GSPC)，1977 年提出了核心图形系统 CGS (Core Graphics System) 作为讨论图形标准化的基础，1979 年又出了新版本的 CGS。目前以西德为主的西欧等国研制的 GKS (Graphical Kernel System) 核心系统 1983 年版本和以英国剑桥 CAD 中心开发的图形输出系统 GINO-F (Graphical Input/Output-Fortran) 等，经国际标准化协会审定，已同意作为国际标准试用^[1]。

目前国内有条件的高等院校及大型企业配置了部分国际通用的大型软件，如功能较强的 PLOT-10，用于高层建筑设计的 CADPLAN，用于电子线路设计的 PC-CAPS 等软件包，同时组织力量自行研制了不少专用软件。在个人计算机上各种版本的 AutoCAD 软件包广为流行。更简单通用的图形程序包 SGP (Simple Graphics Package) 在 CAD 的普及教学中起了一定作用。

§ 0.3 CAD 的几个发展趋势

0.3.1 CAD/CAM 的一体化系统

60 年代末，70 年代初，国外着手将飞机各设计环节和制造、管理等工作直接沟通，建立统一的应用程序库和全系统公共数据库，逐步形成完整的 CAD/CAM 一体化系统 (Integrated System of Computer Aided Design and Manufacturing)。该一体化系统可包括工程设计 (如飞机总体设计)、几何设计、制造工艺、物资管理、技术资料等分系统。程序员在编程时，首先从统一数据库中调出设计部门所设计并存储在数据库中的零件图 (包括零件图号、结构、材料牌号、热处理种类、工时定额、材料定额等)，显示于屏幕上，然后进行加工程序的编制，以便用于制造，如确定加工路线、加工进度，进行跟踪检查，统计工时，核算成本，控制质量等。同时还可利用计算机辅助管理作业计划、仓库、业务、文件、财务等，形成较完善的一体化系统。

0.3.2 人工智能用于 CAD^[2]

将人工智能的成果用于 CAD 是另一重要动向。传统的交互式 CAD 系统是由使用者负责决策、控制并指导整个系统设计过程的前进方向，而由计算机负责大量数据的存

储并完成全部计算任务。将人工智能的成果引入 CAD 系统软件,从而导致人、机间更好地合作,并对其产生如下的影响:

(1) 人工智能的问题求解技术(如直觉探索、问题简化、定理求证的推断以及学习方法等),可用来扩展 CAD 的资源能力。例如:可用人工智能的学习方法来改进 CAD 问题求解的策略等。

(2) 人工智能的感知技术可用来进一步改进人、机信息交互能力,还可与多种模式识别技术结合起来,加强人、机交互能力。例如,可以将屏幕上进行手写的输入方式和声音输入方式结合起来。

(3) 人工智能的知识表示法可用来改进 CAD 数据库的管理。例如,针对每个问题,在计算机内可设置一个与该问题上下文有关的数据文件,以便尽可能地将数据检索限制在与当前文件有关的信息上。国外在这方面已有一定进展,并将人工智能的知识库系统(Knowledge-based System)引入 CAD,使计算机在 CAD 系统中发挥一种更加积极的“顾问”作用,而不仅是“技术助手”作用。

0.3.3 大系统的CAD

近年来,国外尽了很大努力,把 CAD 技术用于解决大系统的建模与控制上,这些大系统包括各种能量系统、交通运输系统、社会经济系统以及生态系统等,旨在取得巨大的经济效益。其主要性质、特点为:

(1) 规模大。

(2) 描述它们的数学模型往往是非线性偏微分方程(由其分布性质决定的)。

(3) 状态变量(用来表征系统中各重要性质、因素等)的数目非常大(一般 50~1000 左右)。

(4) 反映系统性能的物理学定律、生物学定律或心理学定律等并非十分清楚。

通常的工程系统比这类大系统要简单得多,属于我们所要研究的范围。

0.3.4 CAD的实时应用

在某些控制系统实验室里,主要利用 CAD 进行系统辨认,因为实时数据既可以从过程也可以从仿真系统直接送入计算机,对比在同样输入下过程的响应与模式的响应,即可判断模型的准确性以及观察降低模型的阶数带来的影响。这种实时条件下的实验可以利用终端直接进行控制,所得数据可提供给各种算法使用。在过程控制环境条件下,近年来自寻优适应控制系统越来越受到重视,成为自动控制中最活跃的领域之一,目前已开发了一批专门用于适应控制的 CAD 软件包。

CAD 应用范围极广,在各个领域里发展极快,也就是说计算几何及图形显示技术将在科学技术及社会发展中起巨大作用。

第一部分 CAD中的计算几何

第一章 曲线和曲面概述

§ 1.1 曲线的基本表达式

1.1.1 直角坐标系中的位置矢量

在直角坐标系中, 空间一点 A , 如图 1-1 所示, 从坐标原点 O 到 A 点的连线 OA 所表示的矢量称为位置矢量。 OA 的三个坐标分量 OP 、 OQ 、 OR , 有

$$OA = OP + OQ + OR$$

现用 A 点的坐标值 (x, y, z) 表示 OA , 并引入单位矢量 i, j, k ; 且 $OP = x$, $OQ = y$, $OR = z$; 则矢量 OA 写作

$$OA = xi + yj + zk = [x, y, z] \quad (1-1)$$

OA 的长度即矢量的模

$$|OA| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

矢量的特点是不仅有大小, 还有方向。其大小即矢量的模。模为零的矢量称为零矢量; 大小和方向均不变的矢量称为常矢量; 大小和方向变化的矢量称为变矢量。

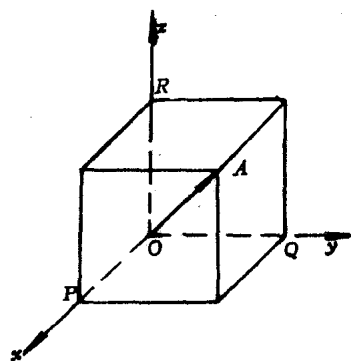


图1-1 位置矢量

1.1.2 曲线的矢量方程和参数方程

对应于闭区间 $t_0 \leq t \leq t_n$ 里的每一个标量 t 值, 有一个确定的矢量 r , 则称 r 为 t 的一个矢函数, 记以 $r(t)$ 。显然矢函数 $r(t)$ 的分量是 t 的标量函数 $x(t), y(t), z(t)$; 在图 1-2 中, 将 $r(t)$ 看作空间点 M 的矢径, $r(t) = OM$, 则当 t 在 $[t_0, t_n]$ 区间变动时, M 点的轨迹一般是一条曲线 Γ 。其矢量方程为

$$r = r(t) = [x(t), y(t), z(t)] \quad (1-2)$$

此式又称单参数 t 的矢函数。它的参数方程为

$$x = x(t) \quad (1-3a)$$

$$y = y(t) \quad (1-3b)$$

$$z = z(t) \quad (1-3c)$$

其中 $t \in [t_0, t_n]$ 。

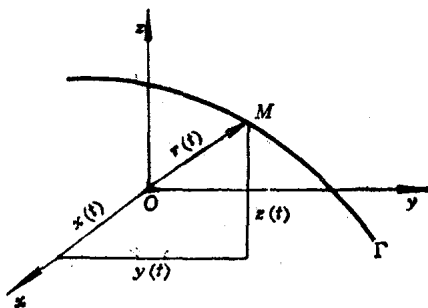


图1-2 矢函数

§ 1.2 矢函数的导矢及其应用

矢函数求导的概念,形式上与标量函数一样。如图 1-3 所示,当参数 t 变到 $t + \Delta t$ 时,矢函数 $\mathbf{r}(t)$ 对应的位置由 OM 变为 OM_1 , 线段 MM_1 对应的矢量差 $\Delta \mathbf{r}$ 为

$$\Delta \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)$$

当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时,若极限

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}$$

存在,则该极限即为 $\mathbf{r}(t)$ 的导数,记以 $\mathbf{r}'(t)$ 或 $\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}$, 表示为

$$\mathbf{r}'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}$$

又设

$$\mathbf{r}(t) = [x(t), y(t), z(t)]$$

故

$$\mathbf{r}'(t) = [x'(t), y'(t), z'(t)] \quad (1-4)$$

矢函数的导数也是一个矢函数,也有方向和模。矢量 $[\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)]/\Delta t$ 的方向平行于割线 MM_1 , 当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, $\Delta \mathbf{r}(t)/\Delta t \rightarrow d\mathbf{r}(t)/dt$, 此即矢端曲线 Γ 在 $M(t)$ 点的切线矢量,称为导矢或切矢。导矢的正向指向曲线参数增长方向。导矢的模为

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} \quad (1-5)$$

以上所述为导矢的几何意义。其物理意义也是明确的,当参数 t 是时间时,一阶导矢就是速度矢,二阶导矢是加速度矢。下面介绍几种导矢在几何上的应用实例:

一 求曲线上任一点 M_0 的切线方程

已知曲线方程 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ (见图 1-4), $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 为曲线上任一点。

前已述及,曲线方程为式 (1-2), 曲线的导矢为式 (1-4), 导矢的模为式 (1-5), 故导矢的方向余弦为

$$\cos \alpha = x'(t) / |\mathbf{r}'(t)|$$

$$\cos \beta = y'(t) / |\mathbf{r}'(t)|$$

$$\cos \gamma = z'(t) / |\mathbf{r}'(t)|$$

导矢的方向数为

$$l = x'(t), \quad m = y'(t), \quad n = z'(t)$$

过 M_0 点的导矢方向数为

$$l_0 = x'(t_0), \quad m_0 = y'(t_0), \quad n_0 = z'(t_0)$$

因此,过 M_0 点的切线方程为

$$\frac{x - x_0}{l_0} = \frac{y - y_0}{m_0} = \frac{z - z_0}{n_0}$$

即

$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)} = \lambda \quad (\lambda \text{ 为实系数})$$

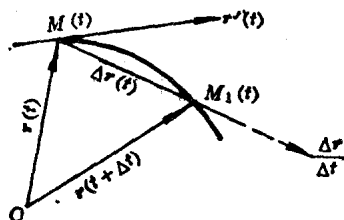


图1-3 导矢

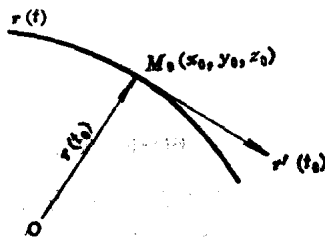


图1-4 曲线上的切线方程

故, 过 M_0 点的切线方程又可写作

$$x = x_0 + \lambda x'(t_0) \quad (1-6a)$$

$$y = y_0 + \lambda y'(t_0) \quad (1-6b)$$

$$z = z_0 + \lambda z'(t_0) \quad (1-6c)$$

二 求曲线上任一点 M_0 的法平面方程

由图 1-4 可知, $\mathbf{r}'(t_0)$ 是曲线在 M_0 点的切矢, $\mathbf{r}'(t_0)$ 又是过 M_0 点法平面的法矢, 如图 1-5 所示。

设 M 是法平面上的一点, 则过 M_0 点法平面的矢量方程

$$\mathbf{r}'(t_0) \cdot \mathbf{M}_0 \mathbf{M} = 0$$

$$[x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)] \cdot [x - x(t_0), y - y(t_0), z - z(t_0)] = 0$$

即

$$x'(t_0)[x - x(t_0)] + y'(t_0)[y - y(t_0)] + z'(t_0)[z - z(t_0)] = 0 \quad (1-7)$$

三 按给定端点条件求解空间曲线方程

按给定端点条件

当已知一条空间曲线首末端点的位置矢量和该两点的导矢分别为 $(\mathbf{R}(0), \mathbf{R}(1))$ 和 $(\mathbf{R}'(0), \mathbf{R}'(1))$ 时, 该曲线可近似地表达为三次矢函数的形式:

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{a} + \mathbf{b}t + \mathbf{c}t^2 + \mathbf{d}t^3 \quad t \in [0, 1]$$

求导得

$$\mathbf{R}'(t) = \mathbf{b} + 2\mathbf{c}t + 3\mathbf{d}t^2$$

将四个已知条件代入以上两个方程式, 即可解得四个待定系数 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$, 从而得出

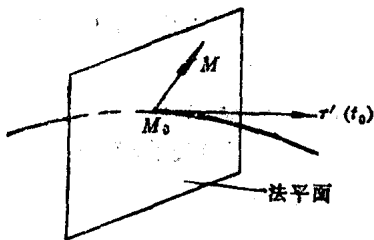


图1-5 法矢

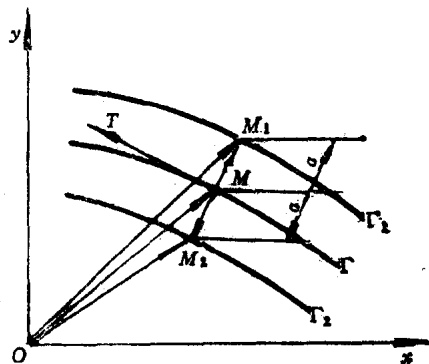


图1-6 等距线

该已知条件下空间曲线的方程式。

四 求平面曲线等距线方程

在机械加工中常遇到等距线问题, 凸轮设计是最典型的例子。又如数控铣床加工零件时, 铣刀中心轨迹和零件外形相差一个铣刀半径的距离, 这是等距线应用的一个实例。

等距线定义为: 已知一条曲线 Γ (如图 1-6 所示), 沿曲线各点法线方向移动一段距离 a , 得到一组新的点。这些新点的轨迹 Γ_1 或 Γ_2 称为 Γ 的等距线。

设已知曲线 Γ 的矢量方程为

$$\mathbf{r}(t) = [x(t), y(t)], \text{ 且 } |\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}, \text{ 曲线上一}$$

M , 沿该点法向移动距离 a 后在等距线上对应点分别为 M_1 、 M_2 , 现求等距线方程。

在矢量起始点 O , 建立坐标系 xOy , 由上图可知

$$OM_1 = OM + MM_1$$

式中 $OM = r(t)$ 。

设 M 点的单位切矢为 T

$$T = \left[\frac{x'(t)}{|r'(t)|}, \frac{y'(t)}{|r'(t)|} \right] \quad (1-8)$$

T 的正向规定为曲线参数 t 增长的方向。

取 x 轴、 y 轴及垂直于 xOy 平面的 z 轴方向的单位矢量分别为 i 、 j 、 k , 则法线方向的单位法矢

$$N = T \times k = \begin{bmatrix} i & j & k \\ \frac{y'(t)}{|r'(t)|} & \frac{x'(t)}{|r'(t)|} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \left[\frac{x'(t)}{|r'(t)|}, \frac{y'(t)}{|r'(t)|}, 0 \right]$$

且 $MM_1 = aN$ 。由 OM_1 式即可得出等距线 Γ_1 的矢量方程为

$$R_1(t) = OM_1 = OM + MM_1 = r(t) + aN \quad (1-9)$$

等距线 Γ_1 的参数方程为

$$x_1 = x(t) + ay'(t)/|r'(t)| \quad (1-10a)$$

$$y_1 = y(t) + ax'(t)/|r'(t)| \quad (1-10b)$$

同理, 可以得出另一条等距线 Γ_2 的矢量方程和参数方程。

§ 1.3 曲线的自然参数方程

以上所讨论的曲线参数方程中, t 是任意参数, 可在不同的坐标系中选取不同的参数, 使曲线具有人为的性质, 这样的参数一般不具有确定的几何意义。而曲线自身的弧长则是曲线的不变量, 它不依赖于坐标系的选取, 通常称之为自然参数。引入自然参数研究曲线时, 许多公式大为简化, 并且容易导出曲线的其他不变量, 对理论分析带来很多方便。

设曲线 Γ 的矢量方程为

$$r = r(t) = [x(t), y(t), z(t)] \quad (a \leq t \leq b)$$

并假设 $r(t)$ 具有连续的一阶导函数 $r'(t)$ 。下面给出弧长的定义。

在曲线 Γ 上对应于 $r(a)$ 和 $r(b)$ 的点 A 和 B 之间, 沿着 t 递增的次序, 取 $n-1$ 个点 $p_1, p_2, \dots, p_{n-1}$, 它们把曲线分为 n 段, 并把 A 记为 p_0 , B 记为 p_n 。如图 1-7 所示。用直线段把相邻点连起来, 即得到一条折线, 其长为

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^n \overline{p_{i-1}p_i}$$

可以证明, 当分点 p_i 无限增加 (即对于每一个 i ,

$t_i - t_{i-1} \rightarrow 0$ 或 $\overline{p_{i-1}p_i} \rightarrow 0$) 时, σ_n 趋于与分点选择

无关的一个确定的极限, 此极限称为曲线段 AB 的弧长。即

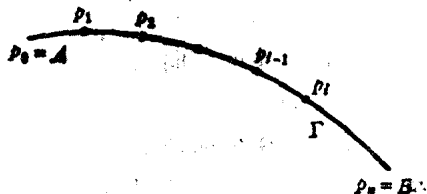


图 1-7 弧长

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)| dt \quad (\text{证明从略})$$

若 $t = t_0$ 为闭区间 $[a, b]$ 中任意固定参数值, $s(t)$ 为从 $\mathbf{r}(t_0)$ 到 $\mathbf{r}(t)$ 的弧长, 且假定 $t > t_0$ 时, $s(t) > 0$; $t < t_0$ 时, $s(t) < 0$, 则可令

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\mathbf{r}'(t)| dt \quad (1-11)$$

这样, t 增加的方向也就是 $s(t)$ 增加的方向。故

$$\begin{aligned} ds &= |\mathbf{r}'(t)| dt \\ ds^2 &= \mathbf{r}'^2 dt^2 = d\mathbf{r}^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \end{aligned} \quad (1-12)$$

可得 $(ds/dt)^2 = (dx/dt)^2 + (dy/dt)^2 + (dz/dt)^2 = |\mathbf{r}'(t)|^2$

由于矢量的模一定为正或零, 不会为负, 故

$$ds/dt = |\mathbf{r}'(t)| > 0$$

可见弧长 $s(t)$ 是 t 的连续单调增函数, 因而其反函数 $t(s)$ 存在且连续。将 $t(s)$ 代入曲线方程 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, 即得以弧长为参数的曲线方程

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t(s)) = \mathbf{r}(s) = [x(s), y(s), z(s)] \quad (1-13)$$

这就是曲线的自然参数方程, 它有一重要性质

$$\dot{\mathbf{r}}(s) = d\mathbf{r}/ds = (d\mathbf{r}/dt) \cdot (dt/ds) = \mathbf{r}'(t) \cdot 1/|\mathbf{r}'(t)|$$

即

$$|\dot{\mathbf{r}}(s)| = 1 \quad (1-14)$$

自然参数方程的导矢为单位矢量。

§ 1.4 曲线论的基本公式

一 活动坐标系

为了更好地研究和表达空间曲线, 我们取一坐标系, 其原点和曲线 Γ 上的动点 M 重合, 整个坐标系随 M 点运动, 该坐标系称为活动坐标系, 如图 1-8 所示。

各坐标轴选取如下:

1 确定坐标轴 I

前已述及空间曲线 Γ 的自然参数方程为 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$, 它有一个重要的性质是曲线的导矢为单位矢量, 记以 $\mathbf{T}$, 亦即曲线 Γ 在 M 点的切矢。

$$\mathbf{T}(s) = \dot{\mathbf{r}}(s) \quad (1-15)$$

将切矢 $\mathbf{T}$ 的方向取为活动坐标系坐标轴 I 的方向。

2 确定坐标轴 II

由 $[\mathbf{T}(s)]^2 = 1$, 求导得

$$2\mathbf{T}(s) \cdot \dot{\mathbf{T}}(s) = 0$$

● 此处约定 $\dot{\mathbf{r}}$ 表示自然参数方程导矢, $\mathbf{r}'$ 表示一般参数方程导矢——编者。

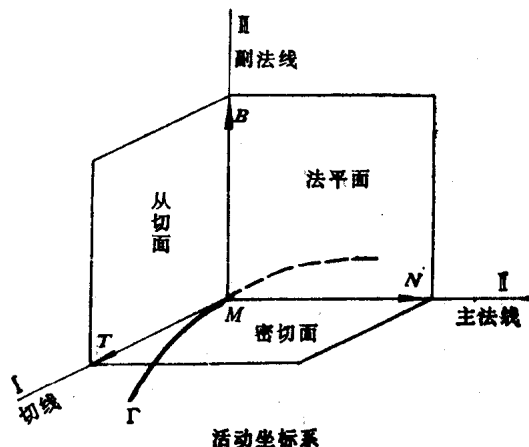


图1-8 活动坐标系与基本三棱形