通向大学之路丛书

高中数学重点与难点精析

刘典权　陆殷豪　孙明祺　编

上海交通大学出版社

GAOZHONG SHUXUE ZHONGDIAN YU NANDIAN JINGXI

·通向大学之路·

高中数学重点与难点精析

刘典权　陆殷豪　孙明祺编

上海交通大学出版社

内 容 介 绍

本书是通向大学之路丛书之一，是根据国家教育委员会制订的数学教学大纲的要求，主要由上海交通大学附属中学数学教研组高级教师编写而成的。

本书共分代数、立体几何、解析几何三大部分。每部分分若干章，每章讨论一个专题。先是简述这个专题在基本知识方面的重点；接着环绕这个专题针对各种类型的题目介绍解题思路、方法和技巧，并以例题示范，这些例题中有一些就是历年高考试题；最后给出适量习题，帮助读者掌握和巩固这些解题方法。这些例题和习题都经精选，并根据"平时训练从难从严"的原则，有些例题和习题的难度稍稍超出历年高考试题的水平，以使学生在正式临场时有"驾轻就熟"的自信感。书末对所有的习题都给出了提示或解答。

本书可供广大高中学生和青年自学者高考复习时使用。

高中数学重点与难点精析

出 版：上海交通大学出版社

（淮海中路1984弄19号）

发 行：新华书店上海发行所

印 刷：江苏太仓印刷厂

开 本：787×1092（毫米） 1/32

印 张：16.25

字 数：362000

版 次：1989年4月 第1版

印 次：1991年4月 第5次

印 数：109501—134500

ISBN 7-313-00321-8/O·1

定 价：5.25 元

编 者 的 话

《通向大学之路》丛书包括《高中数学重点与难点精析》、《高中物理重点与难点精析》、《高中化学复习精编》、《高中语文释疑解难》、《高中英语复习精编》和《数学高考能力题》六种，由上海交通大学附属中学等校具有几十年教学经验的高年资教师经过充分准备和研究后编写而成。

这套丛书以国家教委颁布的高中各课程教学大纲为依据，注意与大学相关课程的衔接，着重论述基础知识，突出剖析重点和难点，力求提高同学们分析问题和解决问题的能力。

这套丛书篇幅适中、简明扼要，可以指导和帮助同学们更好地学习，达到事半功倍的目的。

我们热忱地把这套丛书奉献给即将迎接高考复习的高三同学、在校的其他高中同学，以及自学的青年朋友。衷心地希望它们能成为你们的良师益友，祝愿你们顺利通向大学之路！

前　言

一个具有高中文化程度的青年，当他正在准备系统复习迎考，即将跨入高等学府或走上新的岗位时，是多么迫切地需要有一本具有指导性意义的参考书，为此我们选编了本书以献给广大读者。

我们认为作为一本数学复习参考用书，必须强调数学这门学科的系统性，突出重点、难点，同时选编典型的例题，并加以分析，总结解题的方法、规律和技巧，从而避免搞“题海”战术，以提高能力为主，把学过的知识融会贯通，收到良好的复习效果。

本书共分三部分。第一部分为代数，主要由上海交通大学附属中学数学高级教师陆殿豪编写，其中函数、方程这两章由上海工艺美术公司职工中专孙明祺讲师编写。第二部分为立体几何，第三部分为解析几何，都由上海交通大学附属中学数学高级教师刘典权编写。

本书中选编的例题、习题，大部分都选自以上几位多年从事教学实践的老师的教案和其他有关参考书刊，习题都附有简解或提示，以供读者参考。

由于我们水平有限，在编写中难免有许多缺点和错误，恳请读者提出宝贵意见，我们将不胜感激。

作者

1988.8

目　　录

第一部分

代　　数

第一章　实数和不等式

一、实　　数

1. 实数的分类

$$
\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\\ \text{分数（有限小数或无限循环小数）}\end{cases}\\ \text{无理数（无限不循环小数）}\end{cases}
$$

将数扩充到实数，就数学学科本身来说，是由于运算的需要。在正整数(自然数)范围内，加法和乘法运算是总能实施的，即任意两个正整数的和、积仍是正整数，这个性质就是正整数对加法和乘法的封闭性。但对除法运算来说，正整数除以正整数所得的商不一定是正整数，因此正整数对除法运算是不封闭的。显然在正整数范围内减法运算也是不封闭的。当引进数零、负整数和分数(正分数和负分数)，即将数的范围扩充到有理数范围以后，对加、减、乘、除（除数不为零）这四则运算就封闭了。

但在有理数范围内，开方运算是不封闭的，如$\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$，以及一般的$\sqrt{N}$(N不是完全平方数)，和$\sqrt[3]{2}$、$\sqrt[3]{3}$、$\sqrt[3]{4}$，以及一般的，$\sqrt[p]{N}$（p是正整数，N不是某个整数的p次方）都不是有理数（这将在第三章中予以证明）。但如果我们引进无

理数，即将数的范围扩充到实数范围，那末非负实数的 n 次方根（ n 是自然数）和负实数的奇次方根将仍是实数。

在中学里，我们研究函数、不等式都只限于实数范围；而对代数方程，通常情况下则要求在复数范围内求解。

2. 实数集和数轴

规定了原点、方向和长度单位的直线叫数轴，如图1-1。

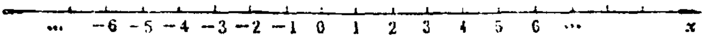

图 1-1

实数集和数轴上的点是一一对应的，即任意一个实数都唯一地对应于数轴上的一个点；反之，数轴上任意一个点都唯一地对应于一个实数。也就是说全体实数占满了整个数轴，这就是实数的连续性。

实数集和数轴上点的一一对应这一最基本最简单的数与形的结合，产生了一系列内容更为生动丰富的数与形的结合（如方程和曲线、曲面，不等式和区域，函数和图像等），而且这种数与形的结合贯穿于整个数学学科之中，从而使抽象的数学内容形象化、直观化，使之便于理解和接受。更为重要的是，这种数与形的结合，反过来又给数学学科的发展和应用产生了极大的促进作用。因此在我们学习数学时，必须注意到这一点。在解题时，数与形的结合也显得十分重要。

3. 实数的大小

实数可以比较大小。在数轴上，点越往右边所对应的实数就越大，越往左边所对应的实数就越小。

设 a、b、c、d 为实数，则有以下基本性质：

i) $a^2 \geqslant 0$;

ii) $a>b \Leftrightarrow a-b>0$;

iii) $a<b \Leftrightarrow a-b<0$;

iv) $a>b \Leftrightarrow b<a$;

v) $a>b,\ b>c \Longrightarrow a>c$;

vi) $a>b \Longrightarrow a+c>b+c$;

vii) $a>b,\ c>d \Longrightarrow a+c>b+d$;

viii) $a>b,\ c>0 \Longrightarrow ac>bc$;

ix) $a>b,\ c<0 \Longrightarrow ac<bc$;

x) $a>b>0,\ c>d>0 \Longrightarrow ac>bd>0$;

xi) $a>b>0,\ c<d<0 \Longrightarrow ac<bd<0$;

xii) $a>b>0 \Longrightarrow a^n>b^n \quad (n\in N)$;

xiii) $a>b>0 \Longrightarrow \sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b} \quad (n\in N)$;

xiv) $a>b>0 \Longrightarrow \frac{a}{b}>1$;

xv) $a>b>0 \Longrightarrow \frac{1}{a}<\frac{1}{b}$。

这里我们可以把性质i)、ii)、iii)作为公理， 性 质iv)～xv)都可以由性质i)、ii)、iii)推出，希望读者自己完成。

利用这些性质，我们可以证明更多的不等式，因此这些性质是证明不等式的基础。其中某些性质也是解不等式时进行同解变形的基础。

4。 实数的绝对值

设a是实数，则a的绝对值记作$|a|$，且

$$|a|=\begin{cases} a & (a\geqslant 0), \\ -a & (a<0)。\end{cases}$$

可见$|a|$是一个非负数。

$|a|$的几何意义是：a在数轴上所对应的点到原点间的距离（图 1-2）。

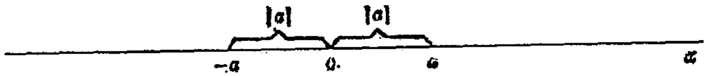

图 1-2

两个实数a_1、a_2的差的绝对值

$$|a_1-a_2|=\begin{cases} a_1-a_2 & (a_1\geqslant a_2), \\ a_2-a_1 & (a_1<a_2)。\end{cases}$$

其几何意义是：数轴上对应于实数a_1、a_2的两个点之间的距离（图 1-3）。

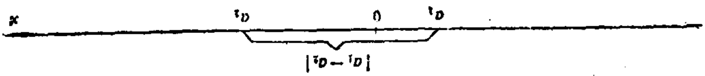

图 1-3

实数的绝对值有以下基本性质：

i) $|a|-|b|\leqslant|a+b|\leqslant|a|+|b|$；

ii) $|a\cdot b|=|a|\cdot|b|$；

iii) $\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}$ $(b\neq 0)$。

二、不等式的证明

不等式的证明是高中数学的一个难点。证明不等式时所用的各种方法几乎涉及了初等数学的全部内容，因此通过不等式这条纽带可以把初等数学中各部分内容有机地联系起来。证明不等式的基本方法有多种，分述如下。

1. 比较法

这种方法根据关于实数大小的基本性质 ii）（$a>b\Leftrightarrow a-b>0$）和 iii）（$a<b\Leftrightarrow a-b<0$），把证明不等式转化为判别一个式子的正负。

例 1 求证下列不等式：

（1）$a^2+b^2\geqslant 2ab$；

（2）若 $a>0$，$b>0$，则 $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$；

（3）若 $a>0$，$b>0$，$c>0$，则 $a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc$；

（4）若 a、b 同号，则 $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant 2$。

证明

（1）$\because a^2+b^2-2ab=(a-b)^2\geqslant 0$，$\therefore a^2+b^2\geqslant 2ab$。

当且仅当 $a=b$ 时等号成立。

（2）$\because a+b-2\sqrt{ab}=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geqslant 0$，

$$\therefore a+b\geqslant 2\sqrt{ab}。$$

当且仅当 $a=b$ 时等号成立。

（3）
$$a^3+b^3+c^3-3abc$$
$$=(a+b)^3-3ab(a+b)+c^3-3abc$$