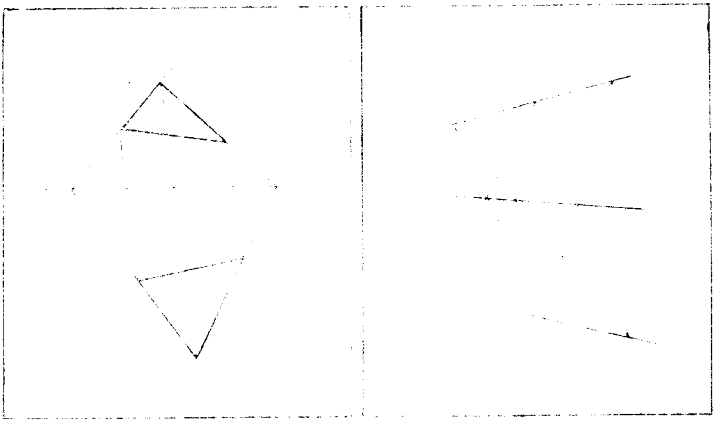
龙泽斌编著

Geometric Transformation

几何变换



几何变换

几 何 变 换

龙 泽 斌 编 著

责任编辑：何信嫒

*

湖南科学技术出版社出版

（长沙市展览馆路14号）

湖南省新华书店发行　湖南省新华印刷二厂印刷

*

1984年8月第1版第1次印刷

开本：850×1168毫米 1/32　印张：10.375　插页：平装1 精装5　字数：269,000

印数：1—6,200

统一书号：13204·94　定价：平装：1.80元　精装：2.90元

序

《几何变换》一书，取材丰硕，持论通侃，叙述明简，图例精当，是一本理论和应用结合得良好而又深湛的佳著。

此书对仿射变换、射影变换、矩阵运算以及配极、反演、拓扑、平方、保角等多种变换，分别演述其切要内容，并在几何学、力学、画法几何学、曲线曲面作图、透视作图、机构设计、航空摄影测量、电路网络等方面，列举应用上的特例，以作佐证。编纂既合理成章，又文义通畅扼要，尚未见前有此同类型集大成而又明细的著作。

本书以理论分析为主，引入应用为辅，利用解析演算，贯通其窍要；并以若干图象阐明其论证，颇见透沏而又缜密的行文结构。本书之出，必将获得从事工程技术者的欢迎，工程界正迫切需要这样一本书的出版，使工作中能有可资遵循的捷径。

本书作者于一九六三年首届全国工程图学学术报告会中宣读了一篇有深邃学理的文章，复被选入《论文选编》内。此后屡有佳构宣读或发表在学术刊物上，颇蒙赞赏。近又将他数十年来所积累的教学和科研经验，从事于几何图形无穷多变化的研究，概括成本书，写出了自己的新见解和新方法，使阅者开卷有左右逢源之乐。非特为工程技术丛书弥补了一个空白，也在祖国四化建设中注入了微妙

的激素，起到不同凡响的作用。正因工业为振兴中华的主力，图件则是推进各种工程设施的枢纽，而图件的兴革，又维系在几何变换学理的推陈出新之中。祥获悉此讯，感奋异常，特撮数语如上以为序。

上海交通大学 莫善祥

1983—11—24

目　次

导 论

（一）

在日常工作和生活中，我们经常遇到某些几何形状变化的现象，例如：茶杯里的水面，在茶杯立着时是圆形的；但茶杯一倾斜则成了椭圆形；当台灯的圆锥形灯罩倾斜成各种不同角度时，灯光在墙壁或地板上就形成了椭圆、抛物线或双曲线的亮区；工人将玻璃管加热吹成各种形状的灯泡等。产生这些形状变换的原因，或是由于力的作用，或是由于光线投射的结果。不论由于什么原因，它们有一个共同之处，就是一个几何图形的每个点都变成另一个图形的确定的点。

在解决工程技术的空间几何问题时，经常需要实行从一个几何图形到另一个几何图形的变换。这就首先需要知道已知图形的点变成新图形的点时所依据的法则；也就是需要知道对已知图形的每个点，如何求得与它对应的新图形的点。

这种将几何图形按照某种法则或规律变换成另一种几何图形的过程称之为**几何变换**。这种法则或规律，可以采取各种投射方法，如通常用的平行投射或中心投射的方法来建立，也可采取函数来实现。

例如设有空间几何图形$f(x、y、z)=0$，变换规律为$x=\Phi_1(x_1、y_1、z_1)$，$y=\Phi_2(x_1、y_1、z_1)$，$z=\Phi_3(x_1、y_1、z_1)$，将它们代入方程$f(x、y、z)=0$中，得到新的几何图形$F=(x_1、y_1、z_1)=0$，它表示在同一坐标系中与已知几何图形对应的新几何图形。新几何图形

的形式与性质由两个因素确定：

（1）已知的几何图形的形式及性质。

（2）变换法则或规律本身的性质，即投射方法或变换函数 Φ_1、Φ_2及Φ_3的性质。

实行变换时的难易程度由变换的法则或规律决定。如果知道了图形有哪些元素和性质在变换下是不改变的，也就是变换成新图形后保留着它们在原来图形里的性质，则这个变换就会大大地变得容易了。

因此，研究几何变换的基本问题，就是研究各种法则或规律所对应的每一具体变换的性质。在已知变换下不改变图形的性质，叫做对于这种变换的不变性质。在已知图形里和在变换成新的图形里，表示它们特征的是相同的数，则这个数叫做已知变换的不变数或者不变量。查明这些图形的特征和性质的重要性还在于：它们不仅是已知图形有，而且由特定变换得到的所有图形的集合都有。因此，这种性质是深刻的内在的性质，反映了这些图形的亲族关系。例如，在平行投射下，任何图形中的两平行线段仍是平行的，因此，平行是这种变换的不变性质。又两平行线段长度的比值也不改变，所以这种比值是该变换的不变量。

几何学研究的对象，就是图形的性质，因此它的分类与几何变换密切相关。下面我们要讨论到：凡是一种变换，它们的全体能组成一个“群”的，我们对这一变换“群”来研究图形的不变性质，就得到相应的几何学。

所以，由于变换群的不同，我们就有不同的几何学。

在初等几何的范畴里，几何所研究的图形性质，和它们在空间的位置及大小没有关系。因此这里所谓图形的“几何性质”和“几何数量”，是指那些在所有可能的运动和中心相似变换中而不改变的性质和数量。这些变换的集合组成相似变换群或度量群。所有不为度量群的变换而变的性质和数量，就组成所谓度量几何。不为度量群的变换而变的性质和数量有：直线仍为直线，两条直线的平行性，任意两线段之长的比值，两直线的夹角等等。

在仿射变换里，上述性质许多都改变了，但仍有一些性质，例如直线仍为直线，两条直线的平行性，两平行线段长度之比值等仍保持不变。这些变换的集合组成所谓仿射变换群。所有不为仿射变换群的变换而变的性质，就组成仿射几何学。

用同样方法可以规定射影变换群及射影几何学。

由上述可以看出：每一个空间变换群，决定一种几何学的分科，它所研究的所有一切性质，是不为这个群的变换所改变的。

在最广义的几何学科中，有拓扑学，它所研究的是不为连续变换所改变的全部性质。

（二）

我们在研究几何变换时，经常使用综合法，即完全不借助数的概念及代数学的知识，而是专凭人们对图形的直接观察，以称为公理及公设的一些原始命题及定义为依据，利用一定的逻辑推理程序导出一连串的定理，这就是众所周知的初等几何里所用的方法。它的好处是能利用图形的直观形象帮助我们想象，从而觉察出图形间的关系，可是，它有一定的局限性。几何学里有许多问题是不便用图形直观表示的，或不能专凭图形的直接观察而能严格说明的，例如，对于有关虚元素问题的处理，对于多维空间射影几何学的处理等。因此，从几何发展的角度来看，单纯利用这种方法不能满足几何的广泛性或抽象性的要求。所以，兼用综合法与解析法来处理几何变换的问题，应该是最有前途的研究方法了。

此外，利用解析法研究射影几何，还有助于射影微分几何学的研究。

（三）

目前几何变换的应用，大致有如下几个方面：

应用几何变换，一方面有可能解决一些用初等方法所不能或不易解决的问题，从而为创造和寻求新的图示图解方法提供有利

条件；另方面，使个别的和零散的方法以公共几何概念联系起来，从而产生新的解决画法几何问题的更简单的方法。

应用几何变换，可以对一些几何作图与作图可能性的问题得到明确的解答。

应用几何变换，可以在解决机构及机器的某些问题中，兼用图解法以简化解析法，甚至代替复杂的解析法。

由已知曲线（曲面）的这种或那种几何变换，可以得到各种各样的新曲线(曲面)。这不仅提供了设计新曲线（曲面）的无穷无尽的手段，而且使我们能根据原始曲线（曲面）的性质来确定新曲线（曲面）的性质，从而保证将已知曲线（曲面）变换成预先给定的曲线(曲面)。

在计算机绘图中，每个点规定一个位置的矢量，许多点作为数的矩阵存储在计算机中，利用计算机硬件或输出设备提供的软件，就可在相应的点间画线。这些都必须根据几何关系来建立相应的“数学模型”，都广泛地涉及到几何变换的知识。

在密集物质连续变形的更一般变换的理论研究中，例如在弹性理论中研究固体的变形，在流体理论中研究叠流时，常认为密集物质的很小的元素“几乎”是仿射地变换的。

在航空摄影测量中，像片一般都要纠正，即消除像片因飞机倾斜而引起的变形，使它回复到与地面的形状相似。纠正办法之一就要用到射影对应的原理。

几何变换还可以沟通非欧空间和欧氏空间之间的联系。

由于在高等学校的画法几何课程中，几何变换至今还未予以重视，因而在工程技术界还未得到推广。其实，在工程师的实际工作中应用这些方法，可使许多具体问题大大简化，将它们引进高等技术学校的课程，会使学生对画法几何问题深入到几何的本质，从而大大促使他们自觉地掌握这些规律。