（非数学专业用）

空间解析几何

崔冠之 编著

中央民族学院出版社

空间解析几何

（非数学专业用）

KOHGJIAH JIEXI JIHE

崔冠之 编著

中央民族学院出版社出版发行

（北京白石桥路二十七号）

新华书店北京发行所经销

张家口地区印刷厂印刷

787×1092毫米32开本9.625印张205千字

1989年11月第1版1989年11月第1次印刷

印数：01—2000册

ISBN7-81001-137-5/G·56 定价：2.00元

内 容 提 要

本书用坐标法和矢量法介绍了空间的平面、直线及二次曲面的有关内容，并配备了适当的例题和习题，各章均安排了习题课，书末附有全部习题的答案及提示。全书论述严谨、层次清楚、简明易懂，便于学生阅读。

本书可供理工科院校非数学专业、数学大专班及各类成人高等院校作为教材或教学参考书，也可供自学读者学习使用。

前　言

空间解析几何是高等数学中最基础的一部分，它为高等代数提供了具体模型，为数学分析准备了必要的知识，为进一步学习高等几何打下了一定的基础，同时为力学、物理学和一切工程技术提供了必要的数学工具。近几年来，许多数学家（包括应用数学家）呼吁重视和加强几何课是有其深远意义的。空间解析几何课在大学非数学专业中的地位几经沉浮，现在终于受到了应有的重视，当前不仅在理工科院校的非数学专业，而且在部分文科院校低年级都开设了这门课，本书正是为此而编写的教材。

本书是在不削弱对数学本身要求的同时，尽量考虑到其他专业对数学需求的程度这一前提下，对传统的空间解析几何内容进行了适当的取舍，并结合自己从事教学实践的一些体会编写而成的。

本书介绍了空间解析几何的主要内容，用坐标法和矢量法着重讨论了空间的平面、直线及二次曲面的有关内容，并按章节配备了一定数量的难易适当的例题和习题，每章之后都安排了习题课。在习题课中，先用对比、归纳等方法对本章内容进行系统地概括总结，再对典型题目进行分析，并通过一题多解等办法引导学生灵活运用所学知识从不同角度寻求解决问题的途径。为了便于检查学习效果，书中还给出期

中、期末自测题各一份，书末附有全部习题的答案及提示。

本书叙述力求详尽、通俗易懂，考虑到学生从中学到大学的过渡，在讲述中注意与平面解析几何的有关内容进行对比，而且全书不再涉及其他更深的高等数学知识。本书可作为非数学专业、数学大专班及各类成人高等院校的教材或教学参考书，也可供自学读者学习使用。

讲授书中全部内容大约需用68课时，若不讲选学内容，或由学生自学习题课的内容，所用课时还可适当减少。书中较难的章节或习题都用“※”号标出，做为选学内容，可根据实际情况取舍。

本书脱稿后，承蒙北京师范大学陈绍菱教授审阅了全稿，并提出了许多宝贵的意见和建议；广东民族学院傅诗滔老师为本书绘制了全部插图，在此谨表谢意。

限于编者水平，书中难免有不妥或错误之处，欢迎读者批评指正。

崔冠之

1989年1月于北京

目　　录

第一章 空间直角坐标系

在中学里我们学习过数轴，这就是直线上的坐标系，它使直线上的点与实数之间建立了一一对应关系。我们还学习过平面上的直角坐标系，它使平面上的点与有序实数对之间建立了一一对应关系。为了确定空间中一点的位置，需要建立空间的点与数组之间的关系，这就是要建立空间坐标系，它是用解析法来研究空间图形几何性质的基础。

§1 空间点的直角坐标

1. 空间直角坐标系的建立

过空间一个定点O，作三条两两互相垂直的数轴，它们都以O为原点，且一般有相同的量度单位，这三条轴分别叫做**x轴（横轴），y轴（纵轴），z轴（竖轴），统称坐标轴**，它们的顺序的相对位置和正方向符合右手法则，即如果将右手的拇指和食指分别指着x轴和y轴的正方向，则中指所指的方向即为z轴的正方向（如图1－1）。这样，三条坐标轴、原点和度量单位就组成了一个空间直角坐标系，叫做**右手系**。用$O—xyz$表示。点O叫**坐标原点**。

若选择x轴、y轴、z轴这三个坐标轴的顺序的相对位置和正方向符合左手法则，即，将左手的拇指和食指分别指着x轴和y轴的正方向，中指所指的方向为z轴的正方向（如图

1—2），这样所得的坐标系叫做**左手系**。

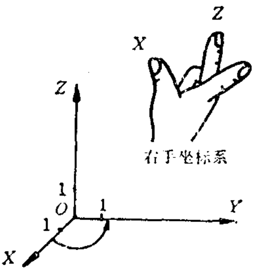


图　1—1

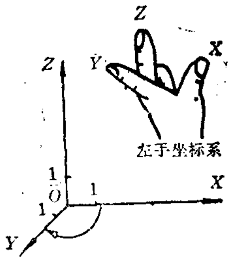


图　1—2

除非特别声明，在本书中出现的坐标系总假定是右手系。

任意两条坐标轴都可以确定一个平面，x 轴和y轴确定的平面叫xOy面，y轴和z轴确定的平面叫yOz面，z轴和x轴确定的平面叫zOx面，这三个平面统称为**坐标面**。

三个坐标面把空间分为八个部分，每一部分称为一个**卦限**，把含三个坐标轴正向的那个卦限称为第Ⅰ卦限，在xOy面上部，如图1—3所示，依次得Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ四个卦限，在xOy面下部与第Ⅰ卦限相对的为第Ⅴ卦限，依次又得Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ几个卦限（如图1—3）。

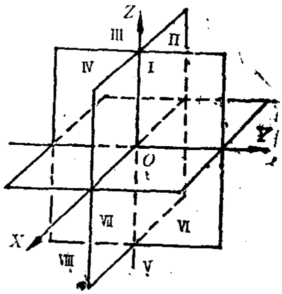


图　1—3

2. 空间的点与有序三实数组之间的一一对应关系

取定了空间直角坐标系后，就可以建立起空间的点与有

序三实数组之间的对应关系。

我们首先说明，任给空间一点M，总能唯一地确定一个有序三实数组（x，y，z，）。过M点分别做与三条坐标轴垂直的三个平面，它们与x轴、y轴、z轴交点依次为P、Q、R（如图1—4），设P、Q、R三点在三条轴上的坐标依次为x、y、z，这样空间的点M就唯一地确定了一个有序三实数组（x，y，z），实数组（x，y，z），称为点M的**直角坐标**（简称**坐标**），x、y、z依次称为点M的**横坐标**、**纵坐标和竖坐标**。记为M（x，y，z）。

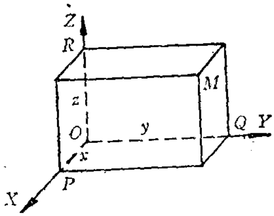


图 1—4

反过来，任给一个有序三实数组（x，y，z），总能唯一地确定空间的一个点，依次在x轴，y轴，z轴上取与x、y、z相应的点P、Q、R，过点P、Q、R分别作垂直于x轴、y轴和z轴的三个平面，这三个平面的交点M就是以实数组（x，y，z）为坐标的点。

所以说，建立了空间直角坐标系后，空间的点与有序三实数组之间就建立了一一对应关系。

上面给出的由点M的坐标（x，y，z）作点M的方法叫做**长方体法**。

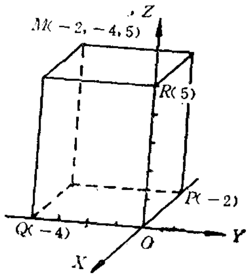


图 1—5 长方体法

例 在空间直角坐标系中，用长方体法作出以（−2，−4，5）为坐标的点M。

解：过x轴上以-2为坐标的点P，作垂直于x轴的平面；过y轴上以-4为坐标的点Q，作垂直于y轴的平面；过z轴上以5为坐标的点R，作垂直于z轴的平面，三个平面的交点即为M点（如图1—5）

另一种由点M的坐标(x, y, z)作点的M方法是**折线法**，象图1—6那样画一条折线$OPNM$，则M点即为所求。

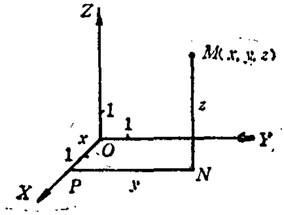


图　1—6 折线法

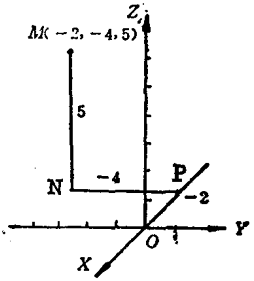


图　1—7 折线法

例　在空间直角坐标系中，用折线法作出点M（-2，-4，5）。

解：如图1—7，先从坐标原点O起，在x轴上作有向线段$\overrightarrow{OP}$，使其数量$OP=-2$；再引平行于y轴的有向线段$\overrightarrow{PN}$，使其数量$PN=-4$；再引平行于z轴的有向线段$\overrightarrow{NM}$，使其数量$NM=5$，则点M即为所求。

一般来说，用折线法画图比较简便。

3. 关于坐标系的一些细节

1）坐标面、坐标轴的特征及其方程

坐标面：在一个坐标面上的点的特征是至少有一个坐标等于零。具体表述如表1—1。

表1—1

坐标面	yOz面	zOx面	xOy面
特　征	横坐标为零	纵坐标为零	竖坐标为零
方　程	$x=0$	$y=0$	$z=0$

坐标轴：在一条坐标轴上的点至少有两个坐标为零。具体表述如表1－2。

表1—2

坐标轴	x轴	y轴	z轴
特　征	纵坐标、竖坐标为零	横坐标、竖坐标为零	横坐标、纵坐标为零
方　程	$\begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$	$\begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$	$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$

2）各卦限内的点的坐标符号

各卦限内的点（坐标面上的点除外）的坐标符号如下：

Ⅰ(＋，＋，＋)，Ⅱ(－，＋，＋)，Ⅲ(－，－，＋)，

Ⅳ(＋，－，＋)，Ⅴ(＋，＋，－)，Ⅵ(－，＋，－)，

Ⅶ(－，－，－)，Ⅷ(＋，－，－)．

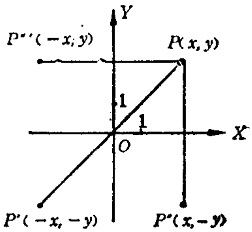


图 1—8

3）关于原点、坐标轴、坐标面的对称点

中学里我们学过，在平面直角坐标系下，点P（x，y）关于原点的对称点为P'（$-x$，$-y$），点P（x，y）关于x轴的对称点为P''（x，$-y$），点P（x，y）关于y轴的对称点为P'''（$-x$，y）（如图 1 — 8 ）。

我们用类似的方法可以得到在空间直角坐标系下，一点P（x，y，z）关于原点、坐标轴及坐标面的对称点。

P（x，y，z）关于原点的对称点为$P'(-x, -y, -z)$，

P（x，y，z）关于x轴的对称点为$P'_x(x, -y, -z)$，

P（x，y，z）关于y轴的对称点为$P'_y(-x, y, -z)$，

P（x，y，z）关于z轴的对称点为$P''_z(-x, -y, z)$，

P（x，y，z）关于xOy面的对称点为$P'''_{xy}(x, y, -z)$，

P（x，y，z）关于yOz面的对称点为$P'''_{yz}(-x, y, z)$，

P（x，y，z）关于zOx面的对称点为$P'''_{zx}(x, -y, z)$。

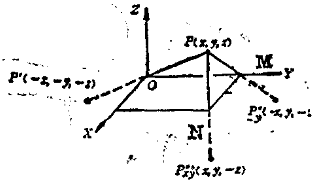


图 1—9

关于对称点的定义，我们仅以点$P(x, y, z)$关于原点、y轴及xOy面的对称点为例，作图说明如下（见图 1 — 9 ）：在图 1 — 9 中，$pp'_y \perp y$轴，M为垂足，$pp'''_{xy} \perp xOy$面，N为垂足；且$\overrightarrow{PO}=\overrightarrow{OP'}$，$\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{MP'_y}$，$\overrightarrow{PN}=\overrightarrow{NP'''_{xy}}$。

§2 两点间的距离

在直线上建立了直线上的坐标系后，对于点$P_1(x_1)$和$P_2(x_2)$，则有向线段$\overrightarrow{P_1P_2}$的数量（即代数长）$P_1P_2=x_2-$

x_1，有向线段$\overrightarrow{P_1P_2}$的长度$\overline{P_1P_2}$也就是P_1、P_2两点之间的距离为

$$d=\overline{P_1P_2}=|P_1P_2|=|x_2-x_1|.$$

或写为$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2}$。

在平面上建立了平面直角坐标系后，设点$P_1(x_1, y_1)$和$P_2(x_2, y_2)$之间的距离为d，则

$d=\overline{P_1P_2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$。因此，可以推想在空间建立了空间直角坐标系后，点$P_1(x_1, y_1, z_1)$和点$P_2(x_2, y_2, z_2)$两点之间的距离应是

$$d=\overline{P_1P_2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

下面我们来证明这个结论是正确的。

在空间直角坐标系下，设$P_1(x_1, y_1, z_1)$，$P_2(x_2、y_2, z_2)$为任意两点，过点$P_1(x_1, y_1, z_1)$分别做垂直于三条坐标轴的平面，则交x轴于$A_1(x_1, 0, 0)$，交y轴于$B_1(0, y_1, 0)$，交z轴于$C_1(0, 0, z_1)$。同样，过点$P_2(x_2, y_2, z_2)$分别作垂直于三条坐标轴的平面，交x轴于A_2，$(x_2, 0, 0)$，交y轴于$B_2(0, y_2, 0)$，交z轴于$C_2(0, 0, z_2)$（如图1—10）。

有向线段$\overrightarrow{A_1A_2}$，$\overrightarrow{B_1B_2}$，$\overrightarrow{C_1C_2}$的代数分别为

$$A_1A_2=x_2-x_1,$$

$$B_1B_2=y_2-y_1,$$

$$C_1C_2=z_2-z_1.$$

上述六个平面构成一个长方体，设它的三个边长分别为a，b，c，则

$$a=\overline{A_1A_2}=|x_2-x_1|,$$

$$b=\overline{B_1B_2}=|y_2-y_1|,$$

$c=\overline{C_1C_2}=|z_2-z_1|$

而$\overline{P_1P_2}$恰为以a，b，c为三度的这个长方体中的一条对角线长，由立体几何的知识可知，长方体的一条对角线的平方等于三度的平方和，即可得出

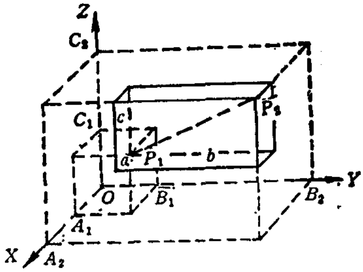


图 1—10

$$d^2=\overline{P_1P_2}^2=\overline{A_1A_2}^2+\overline{B_1B_2}^2+\overline{C_1C_2}^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2,$$

$$\therefore\ d=\overline{P_1P_2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}\text{。}$$

这就是空间两点$P_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$和$P_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$之间的距离公式。

特殊地，点$P_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$与原点的$O(0,0,0)$的距离为 $d=\overline{OP_1}=\sqrt{x_1{}^2+y_1{}^2+z_1{}^2}$。

显然，两点P_1、P_2之间距离为零的充要条件是$P_1=P_2$。

即 $x_1=x_2,\ y_1=y_2,\ z_1=z_2$。

习题一

1．在空间直角坐标系中，作出下列各点

A（1，2，3），B（－1，0，2），C（－1，－3，2），D（2，－1，2）

E（2，0，0），F（0，－1，1），G（0，－2，0）。

2．求点M（x，y，z，）关于各坐标轴，各坐标面和坐标原点的对称点的坐标。

8．求点P（2，－5，7）关于各坐标轴、各坐标面和坐标原点的对称点的坐标。

4．下列各点对于坐标系有何特殊位置？先描点，再做答案。

A（－2，0，0），B（0，1，0），C（0，0，－5），D（0，1，－2），

$E(3, 0, 1)$，$F(2, -1, 0)$。

5．求点$A(2, -1, 3)$和点$B(-3, 2, 5)$之间的距离。

6．求下列两点间的距离

（1）$O(0, 0, 0)$，$P(1, -1, 2)$，

（2）$M_1(1, -1, 2)$，$M_2(-1, 2, -4)$。

7．根据下列条件，试求点B的未知坐标

（1）$A(4, -7, 1)$，$B(6, 2, z)$，

$\overline{AB}=11$；

（2）$A(2, 3, 4)$，$B(x, -2, 4)$，

$\overline{AB}=5$。

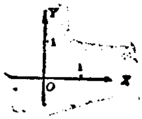
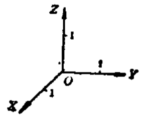
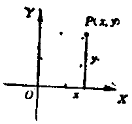
8．设长方体长、宽、高分别为7，2，8，若以长方体的对称中心为坐标原点，以平行于长、宽、高的直线依次为x轴、y轴、z轴，试求该长方体各顶点的坐标。

习　题　课

本章讲述了两个内容：空间直角坐标系和两点间的距离。空间直角坐标系的建立，使空间的点与有序三实数组（坐标）之间建立了一一对应的关系，而两点间的距离则是利用坐标来解决的一个基本问题，这些内容是解析几何的基础，它为我们用坐标法来研究空间图形的几何性质做了准备。

为了更好地掌握这部分知识，我们将平面直角坐标系与空间直角坐标系的有关内容类比如下面的表1－3。

表1—3

	平面直角坐标系	空间直角坐标系
坐标系的建立	 原点O，坐标轴： x轴（横轴） y轴（纵轴） 度量单位	 原点O，坐标轴：x轴（横轴）坐标面：xOy面 y轴（纵轴） yOz面 z轴（竖轴） zOx面 度量单位
点与实数组的对应关系	平面内的点P与有序实数对(x,y)之间建立了一一对应关系。 $P \leftrightarrow (x, y)$ 	空间内的点P与有序的实数组(x, y, z)之间建立了一一对应关系 $P \leftrightarrow (x, y, z)$