逻辑·语言·计算

——马希文文选

商 务 印 书 馆

逻辑·语言·计算

——马希文 文选

商　务　印　书　馆
2003年·北京

图书在版编目(CIP)数据

逻辑·语言·计算:马希文文选/马希文著. —北京:商务印书馆,2003
ISBN 7-100-03543-0

Ⅰ.逻… Ⅱ.马… Ⅲ.马希文—选集 Ⅳ.C52

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 053029 号

LUÓJÍ YǓYÁN JÌSUÀN
逻辑·语言·计算
——马希文 文选

商务印书馆出版
(北京王府井大街36号 邮政编码100710)
商务印书馆发行
北京第二新华印刷厂印刷
ISBN 7-100-03543-0/H·907

2003年1月第1版 开本787×960 1/16
2003年1月北京第1次印刷 印张38¼ 插图1页
定价:47.00元

马 希 文

序

马希文1954年考入北京大学数学力学系，入学时才15岁，是班上年龄最小的一个。他非常聪明，在专业学习上花的时间很少，但成绩却很好，与他同班的同学开玩笑称他为“小天才”。当时，我教他们高等代数，又是他所在小班的班主任，所以从他进入北大开始我们就非常熟悉。马希文兴趣广泛，值得一提的是他颇有音乐才能，学生时代担任过学生乐团的指挥，自己还能作曲。另外，他的语言天赋也给我留下了很深的印象。我记得他不但学习了课程规定的俄文，还自学了蒙古文及东欧一些国家的语言及世界语。

马希文不仅是一个兴趣广泛的人，而且对涉猎的很多领域都有深入的研究，取得过一些很好的研究成果或者提出过一些新的见解。这本集子中收入的仅是他研究成果的一部分。这些论文除了数学方面的以外，还涉及到语言学，其中包括方言，计算机语言以及计算理论。他的研究工作在很多方面可能只是开始，但我认为他提出的很多问题是值得深入进行研究的。所以，这本文集对从事有关研究的同志是有启发意义的。

马希文是极少见的聪明、多才多艺的人，可惜天不假年，对于他的过早去世我至今犹感悲痛。是为序。

丁石孙

目　　录

数　学

计算机科学

人 工 智 能

语　言　学

附　　录

双曲函数

(一) 引　言

我们回想一下通常的三角函数的定义. 设在平面上的一个直角坐标系中给了一个圆(为了简单起见我们把这个圆取作单位圆：$x^2+y^2=1$，图1)，$M(x,y)$ 是圆上的一定点. 设 $\alpha=\angle E_1OM$，则我们定义：

$$\sin\alpha = y;$$

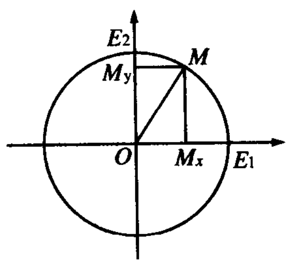
$$\cos\alpha = x.$$

我们把这个定义改变一下，从另一角度来看三角函数，便于我们与本文将要讨论的双曲函数作比较. 首先，我们不设 $\alpha=\angle E_1OM$，而说 α 是扇形 OE_1M 面积的两倍；其次，设 M_x 是 M 在 x 轴上的投影则有

$$\cos\alpha = x = \overrightarrow{OM_x} : \overrightarrow{OE_1},$$

$$\sin\alpha = y = \overrightarrow{M_xM} : \overrightarrow{OE_2};$$

最后应该说明一下，所定义的三角函数，是把单位圆变成自己的平面仿射变换(即平面绕点 O 的旋转)的不变量，这就是说，当扇形 OE_1M 占据另一个位置(例如 OE'_1M')时，只要面积 α 不变，定出的三角函数将有相同的值.



(图 1)

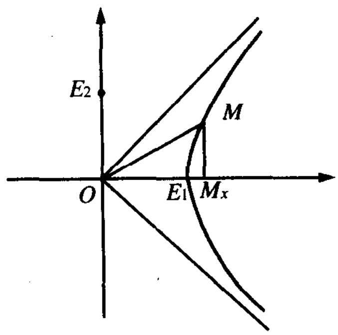
以上修改定义时所说的三点,可以说并未提出什么新的东西,因为前两点只是改变了说法,后一点在一般证明:

$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$ (1)时已经用到. 读者可以看任何一本平面三角教科书.

(二) 双曲函数的定义

这一段利用到关于仿射变换的一些知识. 请读者参看狄隆浧等著"解析几何学"第一卷第二章.

设在直角坐标系中给了双曲线 $x^2-y^2=1$ 的右枝(图 2), $M(x,y)$ 是



(图 2)

它的一个点,α 是扇形 E_1OM 的面积的两倍. 我们定义:

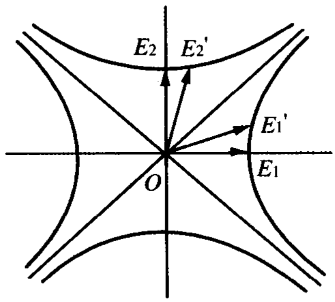
$$\mathrm{sh}\alpha=y=\frac{\overrightarrow{M_xM}}{\overrightarrow{OE_2}};$$

$$\mathrm{ch}\alpha=x=\frac{\overrightarrow{OM_x}}{\overrightarrow{OE_1}}.$$

这就是双曲正弦和双曲余弦.

现在让我们来证明一下. 上面定义的两种双曲函数,都是把已知双曲线变成自己的平面仿射变换(所谓双曲旋转,参看上引"解析几何学"第四章§68和§71)的不变量,这就是说,不管扇形 OE_1M 占双曲线的什么位置,只要面积 α 的值不变,所定义的双曲函数将有相同的值.

设 $E'_1(a,b)$ 是已知双曲线上的任意点(图 3)，则 $E'_2(b,a)$ 显然是共轭双曲线 $x^2-y^2=-1$ 上的点，而且不难证明，OE'_1 和 OE'_2 是已知双曲线的一对共轭半径. 因此，根据二阶曲线的一般理论，在由标架 $\{O;E'_1,E'_2\}$ 决定的新(仿射)坐标系里，已知双曲线有同一个方程 $x^2-y^2=1$. 由此可知，在由原来的直角标架 $\{O;E_1,E_2\}$ 和新标架 $\{O;E'_1,E'_2\}$ 决定的仿射变换下，已知双曲线变成了自己，即所说的仿射变换是一个双曲旋转.



(图 3)

按照我们的假设，当用 (x,y) 和 (x',y') 分别表示平面上任意点和其像点在标架 $\{O;E_1,E_2\}$ 中的坐标时，这个双曲旋转有变换公式

$$\begin{aligned} x' &= ax+by, \\ y' &= bx+ay, \end{aligned} \qquad (2)$$

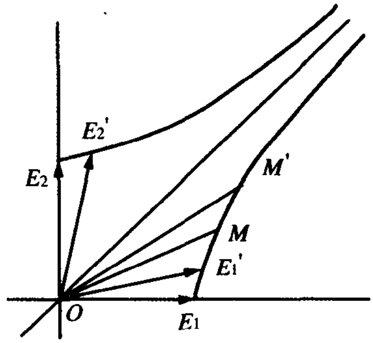
它的行列式(即所谓变形系数)

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2-b^2=1,$$

所以它是等积仿射变换.

因此，设在(2)下：$M \to M'$ (图 4)，即设 M 在 $\{O;E_1,E_2\}$ 中的坐标是 x,y，则 M' 在 $\{O;E'_1,E'_2\}$ 中的坐标也是 (x,y)，而且扇形面积之比

$$\frac{\triangle E'_1OM'}{\triangle E_1OM} = 1.$$



（图 4）

所以设

$$\alpha = 2\triangle E_1 OM,$$

则

$$\alpha = 2\triangle E'_1 OM'.$$

于是

$$\text{ch}\alpha = x = \frac{\overrightarrow{OM'_{x'}}}{\overrightarrow{OE'_1}}$$

$$\text{sh}\alpha = y = \frac{\overrightarrow{M'_{x'}M'}}{\overrightarrow{OE'_2}}$$

其中 $M'_{x'}$ 是 M' 在 OE'_1 上的平行于 OE'_2 的投影.

这样,我们就证明了,在双曲旋转下,所定义的双曲函数是不变量.

下面我们要来引出双曲函数的和角公式.为了简单起见,我们利用上述的记号和图 4.设 β 表示扇形 $E_1OE'_1$ 的面积的两倍,则有

$$\text{sh}\beta = b, \text{ch}\beta = a.$$

又由于 $\alpha + \beta$ 是扇形 E_1OM' 的面积的两倍,(设 x', y')是点 M' 在标架 $\{O; E_1, E_2\}$ 中的坐标,我们按定义有

$$\text{sh}(\alpha + \beta) = y', \text{ch}(\alpha + \beta) = x'.$$

于是利用变换公式(2),而且考虑到 $x = \text{ch}\alpha, y = \text{sh}\alpha$,我们有:

$$\left.\begin{aligned}\text{ch}(\alpha+\beta)&=\text{ch}\alpha\text{ch}\beta+\text{sh}\alpha\text{sh}\beta,\\ \text{sh}(\alpha+\beta)&=\text{sh}\alpha\text{ch}\beta+\text{ch}\alpha\text{sh}\beta;\end{aligned}\right\}(1')$$

这就是我们要证明的两个基本公式.

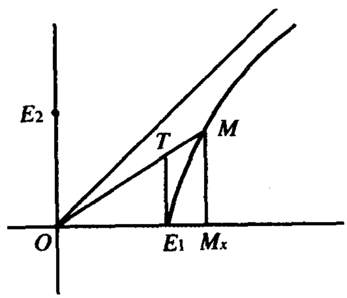
（三）双曲函数与指数函数

在这一节中我们将要用分析的方法来证明熟知的公式：

$$\text{sh}\alpha=\frac{1}{2}(e^{\alpha}-e^{-\alpha}),$$

$$\text{ch}\alpha=\frac{1}{2}(e^{\alpha}+e^{-\alpha}).$$

首先，我们再引进一个双曲函数. 过 E_1 作双曲线的切线与 OM 交于 T 点（图 5），把 $\dfrac{\overrightarrow{E_1T}}{\overrightarrow{OE_2}}$ 记为 thα，称为 α 的双曲正切. 可以证明它也是在双曲旋转下的不变量. 根据三角形 OE_1T 和 OM_xM 的相似性，不难证明 $th\alpha=\dfrac{sh\alpha}{ch\alpha}$.



（图 5）

其次，在证明了双曲函数的对双曲旋转的不变性以后，我们完全可以单就图 5 中所画的直角坐标的情形，来讨论所引进的双曲函数，这时由于坐标向量都是单位向量，双曲函数都可以用对应的线段（的长度）来表示，因而我们可以写成：

$$\text{sh}\alpha=M_xM,\text{ch}\alpha=OM_x,\text{th}\alpha=E_1T.$$

再有，我们还应该作以下的约定：当点 M 处在第四象限时，我们认为扇形 E_1OM 的面积（即$\frac{1}{2}\alpha$）是负的. 这时根据定义可以断定，必须认为线段 M_xM（即 $\mathrm{sh}\alpha$）和 E_1T（即 $\mathrm{th}\alpha$）都是负的.

现在我们可以来叙述本段的中心内容了. 从图 5 我们看到：

$$\triangle OE_1T \text{ 的面积} \leqslant \text{扇形 } OE_1M \text{ 的面积} \leqslant$$

$$\leqslant \triangle OM_xM \text{ 的面积}.$$

这就等于是

$$\left|\frac{1}{2}E_1T\right| \leqslant \left|\frac{1}{2}\alpha\right| \leqslant \left|\frac{1}{2}M_xM\right|,$$

所以

$$|\ \mathrm{th}\alpha\ | \leqslant |\ \alpha\ | \leqslant |\ \mathrm{sh}\alpha\ |. \tag{3}$$

再有，由于双曲余弦是双曲线 $x^2 - y^2 = 1$ 右枝上的点的横坐标，我们有

$$\mathrm{ch}\alpha \geqslant 1. \tag{3$'$}$$

然后，我们从双曲线的方程可知：

$$\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1,$$

从图 5 和定义可知：

$$\mathrm{ch}0 = 1$$

$$\mathrm{sh}0 = 0$$

再由(1′)：

$$\mathrm{sh}(-\beta) = -\mathrm{sh}\beta$$

$$\mathrm{ch}(-\beta) = \mathrm{ch}\beta$$

因而：

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{sh}(\alpha-\beta) &= \mathrm{sh}\alpha\mathrm{ch}\beta - \mathrm{ch}\alpha\mathrm{sh}\beta,\\ \mathrm{ch}(\alpha-\beta) &= \mathrm{ch}\alpha\mathrm{ch}\beta - \mathrm{sh}\alpha\mathrm{sh}\beta;\end{aligned}\right\}(1'')$$

比较(1′)，(1″)可知：

$$\mathrm{sh}\alpha - \mathrm{sh}\beta = \mathrm{sh}\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}\right) - \mathrm{sh}\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

所以

$$\mathrm{sh}\alpha - \mathrm{sh}\beta = 2\mathrm{ch}\frac{\alpha+\beta}{2}\mathrm{sh}\frac{\alpha-\beta}{2} \tag{4}$$

又

$$\mathrm{ch}\alpha-\mathrm{ch}\beta=2\mathrm{sh}\frac{\alpha+\beta}{2}\mathrm{sh}\frac{\alpha-\beta}{2} \tag{4'}$$

(4)和(4′)是我们以下证明的主要根据.利用它们,我们有:

引理 1:双曲函数是连续的.

证:

$$|\mathrm{th}(x+\Delta x)-\mathrm{th}x|=\left|\frac{\mathrm{sh}(x+\Delta x)}{\mathrm{ch}(x+\Delta x)}-\right.$$

$$\left.-\frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x}\right|=\frac{|\mathrm{sh}\Delta x|}{\mathrm{ch}(x+\Delta x)\mathrm{ch}x}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\mathrm{ch}|\Delta x|}{\mathrm{ch}(x+\Delta x)\mathrm{ch}x}|\Delta x|,$$

假如 $x\neq0$,则取 $|\Delta x|$ 充分小可以使 $\mathrm{ch}|\Delta x|<\mathrm{ch}x$,而 $\mathrm{ch}(x+\Delta x)\geqslant1$ 所以

$$|\mathrm{th}(x+\Delta x)-\mathrm{th}x|\leqslant|\Delta x|. \tag{5}$$

对 $x=0$,上式显然正确.

(5)式表明 $\mathrm{th}x$ 连续.

又因为

$$\mathrm{ch}x=\frac{1}{\sqrt{1-\mathrm{th}^2x}},\mathrm{sh}x=\mathrm{ch}x\mathrm{th}x$$

所以它们也连续.

引理 2. 当 $x\to0$ 时,$\frac{\mathrm{sh}x}{x}\to1(x\to0)$.

证:不失去普遍性可以假定 $x>0$,于是我们有

$$1\leqslant\frac{\mathrm{sh}x}{x}=\frac{\mathrm{th}x}{x\mathrm{ch}x}\leqslant\frac{1}{\mathrm{ch}x}.$$

然而当 $x\to0$ 时,$\mathrm{ch}x\to1$ 所以当 $x\to0$ 时,$\frac{\mathrm{sh}x}{x}\to1$.

定理:$\mathrm{sh}\alpha=\frac{1}{2}(e^{\alpha}-e^{-\alpha})$,

$$\mathrm{ch}\alpha=\frac{1}{2}(e^{\alpha}+e^{-\alpha}).$$