

1981

全国重点高等院校
硕士学位研究生入学试题及选解

数学

吉林人民出版社

一九八一年全国重点高等院校

硕士学位研究生入学试题及选解

数 学

本社科学技术编辑室 编

吉林人民出版社

一九八一年全国重点高等院校
硕士学位研究生入学试题及选解

数 学

本社科学技术编辑室 编

*

吉林人民出版社出版 吉林省新华书店发行

长春新华印刷厂印刷

*

787×1092毫米16开本 20印张 490,000字

1982年7月第1版 1982年7月第1次印刷

印数: 1—24,810册

书号: J3091·114 定价: 1.80元

出版说明

为适应我国教育事业的发展,配合高等院校和科学研究部门总结交流招考硕士学位研究生工作业务,并满足广大考生学习参考的需要,我社编辑出版了《一九八一年全国重点高等院校硕士学位研究生入学试题及选解》,分数学、物理学、化学及化工、力学及电学四个分册。

这套书主要包括:(1)属于理工科有关专业的数学、物理学、化学共同基础课方面的试题;(2)属于理科有关专业的数学、物理学、化学专业基础课和部分专业课方面的试题;(3)属于工科有关专业的理论力学、材料力学、流体力学、结构力学、电工学、电子学、化工原理、化学工程等专业基础课方面的试题。其中数学试题217套,物理学试题150套,化学及化工试题201套,力学及电学试题121套。化学及化工分册还编入了《一九八一年CGP(化学学科出国留学学生)复试试题及答案》(内含无机化学、有机化学和物理化学)。为便于读者学习参考,大部分试题都给出评分标准,对其中部分难度较大的试题做出参考性解答,有的给了提示或答案。

本套书汇集的试题类型较多,适应专业面较广,基本上反映了各类院校的专业特点和要求,有较大的参考意义和保留价值,可作为准备攻读硕士学位研究生的学生,科研、教学和工程技术人员,以及有关业务人员学习和研究之用。

向本书推荐试题及选解的单位有:全国重点高等院校三十七所,其中综合性大学十四所,工科院校二十所,师范院校三所;中国科学院所属研究生院及六个研究所。

上述单位对本书的编辑出版工作给予热情支持,并提出许多宝贵意见,在此谨表感谢之忱。

由于本书篇幅有限,各单位推荐的试题和题解没有全部选用。此外,因组编时间仓促,有关物理量及单位符号未做完全统一。全书定稿后也未能与有关单位磋商,如有纰漏和错误之处,敬希读者批评指导,以待今后改正。

目

录

南开大学 1

高等数学试题	1
数学分析试题	1
微分几何试题	2
微分方程试题	3
概率论试题	4
拓扑学试题	5

复旦大学 6

高等数学试题	6
高等数学与线性代数试题	8
线性代数试题	11
高等代数试题	13
概率论试题	15
计算方法试题	17
微分几何与拓扑学试题	19

吉林大学 23

高等数学试题 A	23
高等数学试题 B	23
高等数学试题 C	24
高等数学试题 D	25
数学分析试题	26
高等代数试题	27
近世代数试题	28
数值代数试题	28
偏微分方程数值解法试题	29
实变函数试题	30
概率论试题	31
拓扑学试题	31

山东大学 33

高等数学试题 A	33
----------	----

高等数学试题 B 35

数学分析试题 37

数学分析 (包括实变函数) 试题 37

高等代数试题 38

近世代数试题 39

泛函分析试题 40

微分几何 (包括解析几何) 试题 40

常微分方程试题 41

微分方程试题 42

复变函数试题 44

实变函数试题 45

实变函数 (包括泛函分析) 试题 46

计算方法试题 47

初等数论试题 49

南京大学 50

高等数学试题 A 50

高等数学试题 B 51

高等数学试题 C 52

数学分析试题 53

线性代数试题 54

高等代数试题 55

近世代数试题 56

解析几何试题 57

微分几何试题 58

常微分方程试题 59

微分方程试题 60

实变函数试题 60

递归函数试题 61

数理逻辑试题 62

中国科学技术大学 64

高等数学试题 A 64

高等数学试题 B 65

数学分析试题	66	数学分析试题	102
线性代数试题	67	线性代数试题	104
数理方程试题	68	微分几何试题	107
微分几何试题	69	实变函数试题	108
中山大学	70	四川大学	111
高等数学试题 A	70	高等数学试题 A	111
高等数学试题 B	71	高等数学试题 B	112
高等数学试题 C	72	高等数学试题 C	113
高等数学试题 D	74	数学分析试题	113
数学分析试题 A	75	概率统计试题	114
数学分析试题 B	76	一般拓扑学试题	115
线性代数试题	77	兰州大学	117
高等代数试题	78	数学分析试题	117
数学物理方法试题 A	79	高等代数试题	118
数学物理方法试题 B	79	内蒙古大学	120
数学物理方程试题	81	高等数学试题 A	120
偏微分方程试题	81	高等数学试题 B	121
实变函数试题	83	高等数学 (包括数理方法) 试题	121
计算方法试题	83	数学分析 (包括常微) 试题	122
概率论试题	85	代数 (包括抽象代数基础) 试题	122
武汉大学	87	实函与泛函试题	123
高等数学试题	87	云南大学	125
数学分析试题	89	高等数学试题	125
线性代数试题	90	数学分析试题	126
近世代数试题	91	高等代数试题	128
微分几何 (包括解析几何) 试题	92	实变函数与泛函分析试题	130
常微分方程试题	93	清华大学	132
微分方程 (包括偏微、常微) 试题	94	高等数学试题 A	132
偏微分方程数值解法试题	96	高等数学试题 B	133
数学物理方法试题	97	数学分析试题	135
复变函数试题	97	高等代数试题	137
概率统计试题	98	微分方程试题	139
厦门大学	100	计算方法试题	141
高等数学试题 A	100		
高等数学试题 B	101		

概率统计试题.....	143	数学分析试题.....	189
北京工业学院.....	145	高等代数试题.....	192
高等数学试题.....	145	复变函数试题.....	193
北京钢铁学院.....	147	上海交通大学.....	197
高等数学试题 A.....	147	高等数学与工程数学试题.....	197
高等数学试题 B.....	149	工程数学试题.....	198
北京化工学院.....	153	线性代数与常微分方程试题.....	200
数学试题.....	153	常微分方程试题.....	201
北方交通大学.....	156	数学分析试题.....	202
高等数学试题 A.....	156	数学分析与常微分方程试题.....	203
高等数学试题 B.....	158	数学物理方程试题.....	205
应用数学试题.....	161	华东纺织工学院.....	206
北京邮电学院.....	163	高等数学试题.....	206
高等数学试题.....	163	高等代数试题.....	208
工程数学试题.....	164	华东化工学院.....	210
微积分试题.....	166	高等数学试题.....	210
数理方程试题.....	168	东北工学院.....	213
复变函数试题.....	169	高等数学试题.....	213
北京航空学院.....	172	大连工学院.....	216
高等数学试题.....	172	数学试题 A.....	216
线性代数试题.....	174	数学试题 B.....	218
高等代数试题.....	176	数学分析试题.....	220
数学分析试题.....	178	高等代数试题.....	222
天津大学.....	180	常微分方程试题.....	223
高等数学试题 A.....	180	数学物理方程试题.....	225
高等数学试题 B.....	181	复变函数试题.....	227
同济大学.....	182	实变函数试题.....	230
高等数学试题 A.....	182	计算方法试题.....	232
高等数学试题 B.....	184	长春地质学院.....	234
高等数学及工程数学试题.....	185	高等数学试题 A.....	234
高等数学与数理方法试题.....	187	高等数学试题 B.....	235
		数学试题.....	237
		线性代数试题.....	239

概率论与数理统计试题·····	241	高等代数试题·····	285
吉林工业大学 ·····	244	近世代数试题·····	286
高等数学试题·····	244	数理逻辑与近世代数试题·····	287
高等数学(包括工程数学)试题··	246	实变函数(包括泛函)试题·····	288
数学分析试题·····	250	概率论试题·····	289
线性代数试题·····	251	华东师范大学 ·····	291
计算方法试题·····	252	高等数学试题A·····	291
华东石油学院 ·····	255	高等数学试题B·····	292
高等数学试题·····	255	高等数学试题C·····	293
浙江大学 ·····	258	高等数学试题D·····	294
数学试题·····	258	高等数学试题E·····	295
高等代数试题·····	262	数学试题·····	296
微分方程试题·····	262	数学分析试题·····	297
函数论试题·····	264	高等代数试题·····	297
华中工学院 ·····	266	抽象代数试题·····	298
高等数学试题·····	266	常微分方程试题·····	299
微分方程试题·····	267	复变函数试题·····	300
复变函数试题·····	268	实函与泛函试题·····	301
概率论试题·····	269	概率论与数理统计试题·····	301
华南工学院 ·····	271	东北师范大学 ·····	303
高等数学试题·····	271	高等数学试题·····	303
高等数学与线性代数试题·····	273	数学分析试题·····	304
工程数学试题·····	275	高等代数试题·····	305
高等代数试题·····	277	常微分方程试题·····	306
北京师范大学 ·····	279	数理方法试题·····	307
高等数学试题A·····	279	中国科学技术大学研究生院 ·····	308
高等数学试题B·····	280	高等数学试题A·····	308
高等数学试题C·····	281	高等数学试题B·····	309
高等数学试题D·····	282	基础数学试题·····	311
数学分析试题·····	284	中国科学院长春应用化学研究所 ··	312
		高等数学试题·····	312

南开大学

高等数学试题

- 一、(10分) 用数列极限的 $\varepsilon - N$ 定义证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^8 + n}{n^8 + 2} = 1$.
- 二、(10分) 已知直线 l 过原点 $(0, 0)$, 且与曲线 $y = \ln x$ 相切, 求直线 l 的方程.
- 三、(10分) 设 $e^z - xyz = 0$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.
- 四、(10分) 计算定积分 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{1 + \sin x} dx$.
- 五、(10分) 计算重积分 $\iiint_{\Omega} \ln(x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$, 其中 Ω 为: $1 \leq (x^2 + y^2 + z^2) \leq 2$.
- 六、(10分) 求微分方程 $(x^2 - 2xy + 1)y' - y^2 + 2xy - 1 = 0$ 的通解.
- 七、(10分) 求微分方程 $y'' + 2y' - 2x = 0$ 的通解.
- 八、(10分) 设 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 都是非零常矢量, 且 $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ 试计算矢量 $(\vec{r} \cdot \vec{a})\vec{b}$ 的旋度 $\text{rot}[(\vec{r} \cdot \vec{a})\vec{b}]$.
- 九、(10分) 求矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 的特征值及对应的特征向量.
- 十、(10分) 将函数 $f(x) = x + 2$ 在 $[2, 6]$ 区间上展成正弦级数.

数学分析试题

- 一、(17分) 求曲面 $(x^2 + y^2)^2 + z^4 = y$ 所围立体的体积.
- 二、(17分) 设 $a^2 + b^2 + c^2 > 0$, $f(x)$ 在 $|x| \leq \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ 连续, 试证:

$$\begin{aligned} & \iint_{\substack{0 \leq \varphi \leq \pi \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi}} f(a \sin \varphi \cos \theta + b \sin \varphi \sin \theta + c \cos \varphi) \sin \varphi d\varphi d\theta \\ &= 2\pi \int_{-1}^1 f(t \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}) dt \end{aligned}$$

- 三、(24分) 对下列问题给出答复. 如果答案是肯定的, 请给出证明; 如果答案是否定的, 请给出反例.

(1) 设 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 是闭区间 $[a, b]$ 上一致有界 (R) 可积函数列, 逐点收敛于函数 $f(x)$, 问能否断定 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上 (R) 可积?

(2) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续且 $\int_a^b f(x) dx$ 收敛, 问能否断定: 存在 $x_n \rightarrow +\infty$, 使 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 0$?

(3) 设定义在闭区间 $[a, b]$ 上的函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 逐点收敛, 令 $r_n(x) =$

$\sum_{k=n}^{\infty} u_k(x)$. 若对 $[a, b]$ 中任何数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, 必有 $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x_n) = 0$, 问能否断定

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛?

四、(19分) 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是闭区间 $[a, b]$ 上连续函数, $f(x) \neq 0$, $g(x)$ 有正下界. 令

$$d_n = \int_a^b |f(x)|^n g(x) dx, \quad n = 1, 2, \dots. \text{ 试证 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_{n+1}}{d_n} = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|.$$

五、(23分) 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上二次可微, $f'(\frac{a+b}{2}) = 0$.

(1) 试证存在 $\xi \in (a, b)$, 使 $|f''(\xi)| \geq \frac{4}{(b-a)^2} |f(b) - f(a)|$; 说明常数 4 是

最好的 (即对任何 $M > 4$, 找一具体的 $[a, b]$ 及其上满足条件的具体的 $f(x)$, 使对

一切 $\xi \in (a, b)$, 都有 $|f''(\xi)| < \frac{M}{(b-a)^2} |f(b) - f(a)|$);

(2) 如果再设 $f(x) \neq \text{常数}$, 试证存在 $\eta \in (a, b)$, 使 $|f''(\eta)| > \frac{4}{(b-a)^2} |f(b) - f(a)|$.

微分几何试题

一、(25分) 你知道可展曲面的充要 (即充分必要) 条件有哪几种? 请列举.

(1) 已给曲线

$$\Gamma_1: \begin{cases} x = 0 \\ z^2 = ay \end{cases} \quad (a \neq 0), \quad \Gamma_2: \begin{cases} y = 0 \\ z^2 = bx \end{cases} \quad (b \neq 0),$$

求经过 Γ_1, Γ_2 的可展曲面.

(2) 已给曲线

$$\Gamma_1: \begin{cases} x = 0 \\ y = f_1(z), \end{cases} \quad \Gamma_2: \begin{cases} y = 0 \\ x = f_2(z), \end{cases}$$

求一族和 Γ_1, Γ_2 相交的直线构成可展曲面的充要条件。指出如何从这个条件获得(1)题中的可展曲面。

二、(25分) 已给没有抛物点的曲面 $\Sigma: \vec{r} = \vec{r}(u, v)$ 和常数 λ , 用 $\vec{n}(u, v)$ 表示 Σ 的一个么法矢(即单位法向量), 则 $\Sigma^*: \vec{r}^*(u, v) = \vec{r}(u, v) + \lambda \vec{n}(u, v)$ 叫做 Σ 的一个平行曲面。

(1) 求 Σ^* 的中曲率(即平均曲率)和全曲率(即总曲率)同 Σ 的中曲率和全曲率的关系。

(2) 证明: 若 Σ 具有常数全曲率 $\frac{1}{a^2}$, 则一般地, 平行曲面中, 有一个具有常数中曲率 $\frac{1}{2a}$, 又有一个具有常数中曲率 $-\frac{1}{2a}$; 另一方面若 Σ 具有常数中曲率 $\pm \frac{1}{2a}$, 则平行曲面中, 有一个具有常数全曲率 $\frac{1}{a^2}$ 。

三、(30分) 什么是曲线论的唯一存在定理(或称曲线论的基本定理)? 设 Γ 为挠曲线, 在它上面各点曲率和挠率都不等于零。说明: 对于 Γ 的每一点 P , 有唯一的一条圆柱螺线 C , 它经过 P 点, 而且在 P 点同 Γ 有相同的基本矢(即么切矢, 主法矢, 副法矢或单位切向量, 主法向量, 从法向量)和相同的曲率和挠率。设已给 Γ 的方程, 求当 P 点在 Γ 上运动时, 圆柱螺线 C 的轴所产生的直纹面方程。

四、(20分) 什么是曲面论的唯一存在定理(或称曲面论的基本定理)? 已知曲面的第一和第二类基本量(或称第一和第二基本形式的系数)

$$E = 1, F = 0, G = 1; L = 1, M = 0, N = 0$$

求曲面。

微分方程试题

一、(20分) 试求微分方程 $y = 2xy' - y'^2$ 的一切解。

二、(20分) 设 A 为 n 阶常数方阵。已知其所有特征根的实部均小于零。试证: 存在常数 $\alpha > 0, M > 0$, 使得对于向量方程

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} \quad (0 \leq t < +\infty)$$

的任一解 $\vec{x}(t)$ 有如下不等式成立:

$$\|\vec{x}(t)\| \leq M \|\vec{x}(0)\| e^{-\alpha t} \quad (0 \leq t < +\infty)$$

三、(20分) 假设 $P(x, y), Q(x, y)$ 都是 n 次齐次函数($n \neq -1$), 而

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

是全微分方程, 试证: 当 C 为任意常数时,

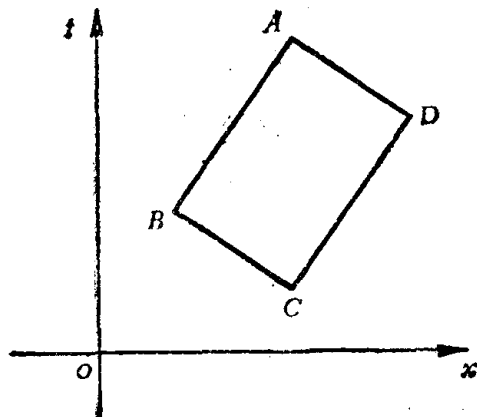
$$xP(x, y) + yQ(x, y) = C$$

是它的积分。

四、(20分) 设 $u(x, t)$ 是方程 $L_u = u_{tt} - a^2 u_{xx}$ 的解 (其中 a 为常数) 试证:

$$u(A) + u(C) = u(B) + u(D)$$

此处 A, B, C, D 是 xt 平面上由特征线所围成的平行四边形 $ABCD$ 的四个顶点 (如图).



四题图

五、(20分) 证明刘维尔 (Liouville) 定理: 全平面上的调和函数如果有上界或下界, 则此调和函数必定是常数.

概率论试题

一、(20分) 有 n 双皮鞋 (共 $2n$ 只) 混放在一起, 现在将这些皮鞋随机地分给 n 个人, 每人两只, 试求下列事件的概率:

- (1) 事件 A —— “每人分到的皮鞋都成双”;
- (2) 事件 B —— “每人分到左脚、右脚的皮鞋各一只”.

二、(20分) 有 N 个盒子, n 个质点. 现把 n 个质点独立地分配到 N 个盒中去. 假设每个质点落入第 j 个盒中的概率为 $\frac{1}{N}$, $j = 1, 2, \dots, N$. 以 ξ 表示分配结果空盒的个数.

- (1) 试求 ξ 的概率分布;
- (2) 试求 $E\xi$ 和 $D\xi$.

三、(20分) 现随意向区间 $[0, 1]$ 上独立地投掷 n 个点, 其中点的个数 n 是随机的; 以 ξ_i 表示落到

区间 $\left(\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$, $i = 1, 2, \dots, n$, 上的点数. 假设 n 有泊松 Poisson 分布, 参数为

n , 试证明 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 相互独立.

四、(20分) 设 $\{\xi_n, n \geq 1\}$ 是独立同分布随机变量, 对任意 $n \geq 1$, 有

$$P\{\xi_n = j\} = \frac{1}{10}, j = 0, 1, \dots, 9.$$

记 $S_1 = 0.\xi_1\xi_3\xi_5\dots$, $S_2 = 0.\xi_2\xi_4\xi_6\dots$.

- (1) 试证明 S_1 与 S_2 相互独立, 并且在 $[0, 1]$ 上有均匀分布;
- (2) 试求 $S_1^2 + S_2$ 的分布密度.

五、(20分) 设 $\{\xi_n, n \geq 1\}$ 和 $\{\eta_n, n \geq 1\}$ 是同一概率空间上的二随机变量列. 记 $F_n(x) = P\{\xi_n \leq x\}$. 已知 $F_n(x)$ 弱收敛于 $F(x)$, 而 η_n 依概率收敛于 0. 试证明 $\xi_n + \eta_n$ 的分布函数弱收敛于 $F(x)$.

[说明: $E\xi$ 和 $D\xi$ 分别表示 ξ 的数学期望和方差.]

拓扑学试题

一、(20分) 设 X 和 Y 是两个紧致 Hausdorff 空间。

证明: $X \times Y$ 也是一个紧致 Hausdorff 空间。

二、(40分) 设 X 为一绝对收缩核, 证明:

(1) X 一定是可缩的;

(2) 对任意交换群 A , 有

$$H_q(X; A) = \begin{cases} 0, & q > 0 \\ A, & q = 0; \end{cases}$$

(3) 任意实心球和任意单纯形都是绝对收缩核。那么, 球面是绝对收缩核吗?

三、(20分) 证明:

(1) 实射影平面和二维球面 S^2 不能拓扑同胚;

(2) 实射影平面和二维球面 S^2 都不能拓扑地嵌入到普通欧氏平面中 (即欧氏平面中不可能有一个子空间和实射影平面或二维球面 S^2 拓扑同胚)。

四、(20分) 设 K 为一单纯复形, $f: |K| \rightarrow |K|$ 为单纯映射 (对三角剖分 K 而言)。证明 f 的不动点所成的多面体的 Euler 数等于 f 的 Lefschetz 数。

复旦大学

高等数学试题

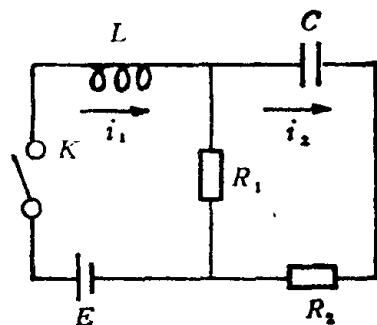
一、(6分) 设 $a_n = \left(\frac{1}{n}\right)^p$, p 为一定实数, 记 $\{a_n\}$ 的极限为 a , 试求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1} - a|}{|a_n - a|^2}$$

二、(6分) 求不定积分

$$\int \frac{(x+3)dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}$$

三、(10分) 在示意图给出的线路中, 设各支路的电流为零, 现合上开关 K , 试列出电流 $i_2(t)$ 满足的二阶常系数线性方程, 并写出相应的初值条件 (不要求解方程)。



三题图

四、(10分) 设轴 l 与一均匀球相切, 记球体的半径为 R , 总质量为 M , 试求球体关于轴 l 的转动惯量。

五、(10分) 设函数 f 的二阶导数 f'' 在 (a, b) 内连续且大于零, α 为 0 与 1 间某一数。

试证: 对于 (a, b) 内任意两点 x 和 y , 成立

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y)$$

六、(10分) 设 D 是由光滑闭曲线 C 围成的平面区域, 函数 $f(x, y)$ 在 D 及 C 上二阶连续可微, 且 $\text{div}(\text{grad}f) = 0$, 试证:

$$\int_C f \frac{\partial f}{\partial n} dS = \iint_D \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy$$

其中 $\frac{\partial f}{\partial n}$ 是 f 关于曲线 C 的外法向 $\vec{n}$ 的方向导数。

七、(10分) 设 $a^1 = (1, -1, 1, -1)^T$, $a^2 = (5, 1, 1, 1)^T$ 记 V_1 为 R^4 中由 a^1 和 a^2 的所有线性组合构成的子空间, V_2 为 R^4 中与 a^1 和 a^2 均正交的所有向量构成的子空间。试分别找出 V_1 和 V_2 的一组正交基。

八、(8分) 设 $y = \arctg x$, 试证:

$$y^{(n)} = (n-1)! \cos^n y \sin n \left(y + \frac{\pi}{2} \right)$$

九、(15分) 设

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

求正交阵 Q 使 $Q^{-1}AQ$ 成为对角阵.

十、(15分) 试求解方程组

$$\begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2e^x \end{pmatrix}$$

满足初始条件 $y_1(0) = 1, y_2(0) = 0$ 的解.

〔选解〕

九、特征方程为

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} - \lambda & 1 \\ 1 & 1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

解得特征根为 $\lambda = 1, 1, -2$.

对应于特征根 $\lambda = 1$, 解方程组

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

得一组线性无关的特征向量

$(-1, 1, 0)^T$ 和 $(2, 0, 1)^T$,

标准正交化得

$$q^1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)^T \text{ 和 } q^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^T$$

对应于特征根 $\lambda = -2$, 解方程组

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

求得线性无关的特征向量为 $(1, 1, -2)^T$, 标准化得

$$q^3 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)^T$$

于是, 取正交阵 Q 为

$$Q = (q^1, q^2, q^3) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

则 $Q^{-1}AQ = \text{diag}(1, 1, -2)$.

十、解特征方程

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

得 $\lambda = 2, 3$. 对应齐次方程组的基本解组为

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{2x}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{3x}$$

记原方程组的解为

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = C_1(x) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{2x} + C_2(x) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{3x}$$

则

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} C_1(x) \\ C_2(x) \end{pmatrix} &= \int \begin{pmatrix} e^{2x} & e^{3x} \\ -2e^{2x} & -e^{3x} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ -2e^x \end{pmatrix} dx \\ &= \int \frac{1}{e^{5x}} \begin{pmatrix} -e^{3x} & -e^{3x} \\ 2e^{2x} & e^{2x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2e^x \end{pmatrix} dx \\ &= \begin{pmatrix} \int 2e^{-x} dx \\ \int (-2e^{-2x}) dx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2e^{-x} + C_1 \\ e^{-2x} + C_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

代入初值条件

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (-2 + C_1) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + (1 + C_2) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

从中解出 $C_1 = C_2 = 1$, 于是所求解为

$$y_1(x) = -e^x + e^{2x} + e^{3x}$$

$$y_2(x) = 3e^x - 2e^{2x} - e^{3x}$$

高等数学与线性代数试题

(适用专业: 计算机软件、信息科学、计算机系统结构、管理科学)

一、设有方程 $1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n} = 0$

证明: 该方程当 n 为奇数时仅有一个实根, 当 n 为偶数时无实根.

二、试证明:

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$$

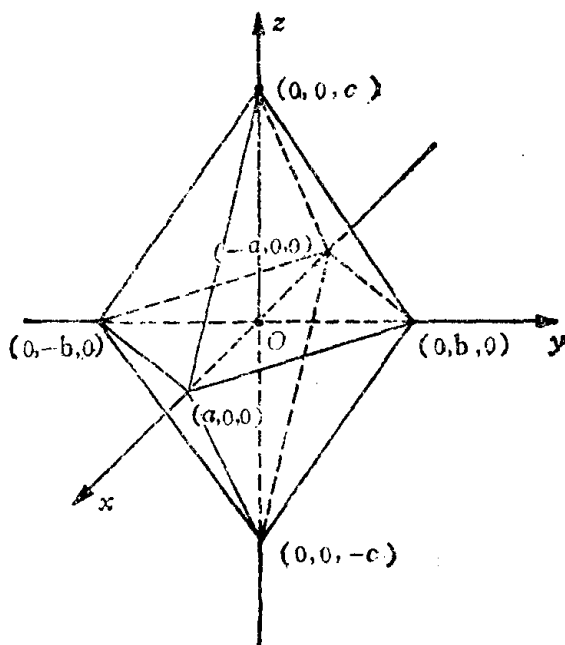
$$= \begin{cases} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots n} \cdot \frac{\pi}{2}, & \text{若 } n = 2k \\ \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (n-1)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots n}, & \text{若 } n = 2k+1 \end{cases}$$

其中 k 为正整数.

三、计算三重积分

$$I = \iiint_{(V)} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$$

其中 V 是如图所示的内部区域.



三题图

四、讨论下列级数的收敛性:

$$(1) \frac{1}{1^p} - \frac{1}{2^q} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^q} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)^p} - \frac{1}{(2n)^q} + \cdots, \quad (p > 0, q > 0);$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln \frac{n+1}{n} \right);$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 是正项级数, 并且 } \frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} \geq 1 + \sigma, \quad (\sigma > 0), n = 1, 2, 3 \cdots$$

五、已知 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, 求 $e^A = ?$

六、若 A, B, C, D 都是 n 阶方阵, 且 $AC = CA$,

证明: $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD - CB|.$

七、设 $A = (a_{ij})$ 是 n 阶正交阵, 证明:

$$a_{ij} = \pm a_{ij} \text{ 的代数余子式 } A_{ij}$$

并说明如何确定其符号?

八、(1) 若 A 是 n 阶方阵满足 $A^2 - A + E = 0$, 问 A 是满秩阵还是降秩阵? 并说明理由.

(2) 若 A, B 都是 n 阶正交阵, 且 $|A| = -|B|$, 问 $A + B$ 是满秩阵还是降秩阵? 并说明理由.

〔选解〕

一、证: 设 $y = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n}$