1981

全国重点高等院校
硕士学位研究生入学试题及选解

数学

吉林人民出版社

一九八一年全国重点高等院校

硕士学位研究生入学试题及选解

数　学

本社科学技术编辑室　编

吉林人民出版社

一九八一年全国重点高等院校
硕士学位研究生入学试题及选解
数　学
本社科学技术编辑室　编
*
吉林人民出版社出版　吉林省新华书店发行
长春新华印刷厂印刷
*
787×1092毫米16开本　20印张　490,000字
1982年7月第1版　1982年7月第1次印刷
印数：1—24,810册
书号：13091・114　定价：1.80元

出 版 说 明

为适应我国教育事业的发展，配合高等院校和科学研究部门总结交流招考硕士学位研究生工作业务，并满足广大考生学习参考的需要，我社编辑出版了《一九八一年全国重点高等院校硕士学位研究生入学试题及选解》、分数学、物理学、化学及化工、力学及电学四个分册。

这套书主要内容包括：（1）属于理工科有关专业的数学、物理学、化学共同基础课方面的试题；（2）属于理科有关专业的数学、物理学、化学专业基础课和部分专业课方面的试题；（3）属于工科有关专业的理论力学、材料力学、流体力学、结构力学、电工学、电子学、化工原理、化学工程等专业基础课方面的试题。其中数学试题217套，物理学试题150套，化学及化工试题201套，力学及电学试题121套。化学及化工分册还编入了《一九八一年CGP（化学学科出国留学生）复试试题及答案》（内含无机化学、有机化学和物理化学）。为便于读者学习参考，大部分试题都给出评分标准，对其中部分难度较大的试题做出参考性解答，有的给了提示或答案。

本套书汇集的试题类型较多，适应专业面较广，基本上反映了各类院校的专业特点和要求，有较大的参考意义和保留价值，可作为准备攻读硕士学位研究生的学生，科研、教学和工程技术人员，以及有关业务人员学习和研究之用。

向本书推荐试题及选解的单位有：全国重点高等院校三十七所，其中综合性大学十四所，工科院校二十所，师范院校三所；中国科学院所属研究生院及六个研究所。

上述单位对本书的编辑出版工作给予热情支持，并提出许多宝贵意见，在此谨表感谢之忱。

由于本书篇幅有限，各单位推荐的试题和题解没有全部选用。此外，因组编时间仓促，有关物理量及单位符号未做完全统一。全书定稿后也未能与有关单位磋商，如有纰漏和错误之处，敬希读者批评指导，以待今后改正。

目　　录

南 开 大 学

高等数学试题

一、(10分) 用数列极限的 $\varepsilon-N$ 定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+n}{n^3+2}=1$。

二、(10分) 已知直线 l 过原点 (0, 0), 且与曲线 $y=\ln x$ 相切, 求直线 l 的方程。

三、(10 分) 设 $e^z-xyz=0$, 求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$。

四、(10分) 计算定积分 $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{1+\sin x}dx$。

五、(10分) 计算重积分 $\displaystyle\iiint_{\Omega}\ln(x^2+y^2+z^2)dxdydz$, 其中 Ω 为: $1\leqslant(x^2+y^2+z^2)\leqslant 2$。

六、(10分) 求微分方程 $(x^2-2xy+1)y'-y^2+2xy-1=0$ 的通解。

七、(10分) 求微分方程 $y''+2y'-2x=0$ 的通解。

八、(10 分) 设 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 都是非零常矢量, 且 $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{i}+z\vec{k}$ 试计算矢量 $(\vec{r}\cdot\vec{a})\vec{b}$ 的旋度 $\operatorname{rot}[(\vec{r}\cdot\vec{a})\vec{b}]$。

九、(10分) 求矩阵 $\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$ 的特征值及对应的特征向量。

十、(10分) 将函数 $f(x)=x+2$ 在[2, 6]区间上展成正弦级数。

数学分析试题

一、(17分) 求曲面 $(x^2+y^2)^2+z^4=y$ 所围立体的体积。

二、(17 分) 设 $a^2+b^2+c^2>0$, $f(x)$ 在 $|x|\leqslant\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ 连续, 试证:

$$\iint\limits_{\substack{0\leqslant\varphi\leqslant\pi\\0\leqslant\theta\leqslant 2\pi}} f(a\sin\varphi\cos\varphi+b\sin\varphi\sin\theta+c\cos\varphi)\sin\varphi\,d\varphi\,d\theta$$

$$=2\pi\int_{-1}^{1}f(t\sqrt{a^2+b^2+c^2})dt$$

三、(24分) 对下列问题给出答复. 如果答案是肯定的, 请给出证明; 如果答案是否定的, 请给出反例.

（1）设$\left\{f_n(x)\right\}_{n=1}^{\infty}$是闭区间〔$a$，$b$〕上一致有界（$R$）可积函数列，逐点收敛于函数$f(x)$，问能否断定$f(x)$在〔$a$，$b$〕上（$R$）可积？

（2）设$f(x)$在〔a，b〕上连续且$\int_a^b f(x)dx$收敛，问能否断定：存在$x_n\to+\infty$，使$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=0$？

（3）设定义在闭区间〔a，b〕上的函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$逐点收敛，令$r_n(x)=\sum\limits_{k=n}^{\infty}u_k(x)$。若对〔$a$，$b$〕中任何数列$\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$，必有$\lim\limits_{n\to\infty}r_n(x_n)=0$，问能否断定$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在〔$a$，$b$〕上一致收敛？

四、（19分）设$f(x)$和$g(x)$都是闭区间〔a，b〕上连续函数，$f(x)\neq 0$，$g(x)$有正下界。令$d_n=\int_a^b|f(x)|^n g(x)dx$，$n=1$，$2$，…。试证$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{d_{n+1}}{d_n}=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|$。

五、（23分）设$f(x)$在闭区间〔a，b〕上二次可微，$f'\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$。

（1）试证存在$\xi\in(a,b)$，使$|f''(\xi)|\geqslant\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$；说明常数4是最好的（即对任何$M>4$，找一具体的〔$a,b$〕及其上满足条件的具体的$f(x)$，使对一切$\xi\in(a,b)$，都有$|f''(\xi)|<\frac{M}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$）；

（2）如果再设$f(x)\neq$常数，试证存在$\eta\in(a,b)$，使$|f''(\eta)|>\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$。

微分几何试题

一、（25分）你知道可展曲面的充要（即充分必要）条件有哪几种？请列举。

（1）已给曲线

$$\Gamma_1:\begin{cases}x=0\\ z^2=ay\end{cases}\ (a\neq 0),\qquad \Gamma_2:\begin{cases}y=0\\ z^2=bx\end{cases}\ (b\neq 0),$$

求经过Γ_1，Γ_2的可展曲面。

（2）已给曲线

$$\Gamma_1:\begin{cases}x=0\\ y=f_1(z),\end{cases}\qquad \Gamma_2:\begin{cases}y=0\\ x=f_2(z),\end{cases}$$

求一族和Γ_1，Γ_2相交的直线构成可展曲面的充要条件。指出如何从这个条件获得（1）题中的可展曲面。

二、(25分) 已给没有抛物点的曲面Σ：$\vec{r}=\vec{r}(u,v)$和常数λ，用$\vec{n}(u, v)$表示Σ的一个幺法矢（即单位法向量），则Σ^*：$\vec{r}^*(u, v)=\vec{r}(u, v)+\lambda\vec{n}(u, v)$叫做$\Sigma$的一个平行曲面。

（1）求Σ^*的中曲率（即平均曲率）和全曲率（即总曲率）同Σ的中曲率和全曲率的关系。

（2）证明：若Σ具有常数全曲$\frac{1}{a^2}$，则一般地，平行曲面中，有一个具有常数中曲率$\frac{1}{2a}$，又有一个具有常数中曲率$-\frac{1}{2a}$；另一方面若Σ具有常数中曲率$\pm\frac{1}{2a}$，则平行曲面中，有一个具有常数全曲率$\frac{1}{a^2}$。

三、(30分) 什么是曲线论的唯一存在定理（或称曲线论的基本定理）？设Γ为挠曲线，在它上面各点曲率和挠率都不等于零。说明：对于Γ的每一点P，有唯一的一条圆柱螺线C，它经过P点，而且在P点同Γ有相同的基本矢（即幺切矢，主法矢，副法矢或单位切向量，主法向量，从法向量）和相同的曲率和挠率。设已给Γ的方程，求当P点在Γ上运动时，圆柱螺线C的轴所产生的直纹面方程。

四、(20分) 什么是曲面论的唯一存在定理（或称曲面论的基本定理）？已知曲面的第一和第二类基本量（或称第一和第二基本形式的系数）

$$E=1,\ F=0,\ G=1;\ L=1,\ M=0,\ N=0$$

求曲面。

微分方程试题

一、(20分) 试求微分方程$y=2xy'-y'^3$的一切解。

二、(20分) 设A为n阶常数方阵。已知其所有特征根的实部均小于零。试证：存在常数$\alpha>0$，$M>0$，使得对于向量方程

$$\frac{d\vec{x}}{dt}=A\vec{x}\qquad(0\leqslant t<+\infty)$$

的任一解$\vec{x}(t)$有如下不等式成立：

$$\|\vec{x}(t)\|\leqslant M\|\vec{x}(0)\|e^{-\alpha t}\qquad(0\leqslant t<+\infty)$$

三、(20分) 假设$P(x, y)$，$Q(x,y)$都是n次齐次函数($n\neq-1$)，而

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$$

是全微分方程，试证：当C为任意常数时，

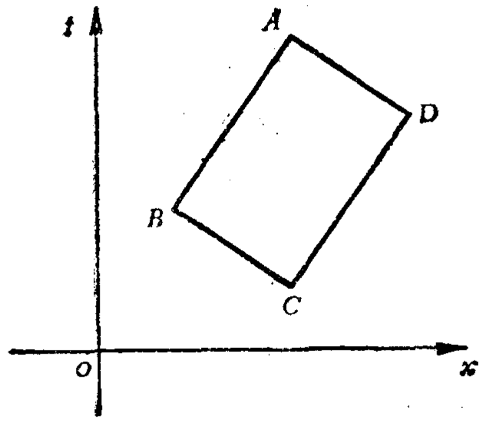
$$xP(x,y)+yQ(x,y)=C$$

是它的积分。

四、(20分) 设$u(x,t)$是方程$L_u=u_{tt}-a^2u_{xx}$的解（其中a为常数）试证:

$$u(A)+u(C)=u(B)+u(D)$$

此处A, B, C, D是 xt 平面上由特征线所围成的平行四边形 $ABCD$ 的四个顶点(如图).



四题图

五、(20分) 证明刘维尔 (Liouville) 定理: 全平面上的调和函数如果有上界或下界，则此调和函数必定是常数。

概率论试题

一、(20分) 有n双皮鞋（共$2n$只）混放在一起，现在将这些皮鞋随机地分给n个人，每人两只，试求下列事件的概率:

(1) 事件A——“每人分到的皮鞋都成双”;

(2) 事件B——“每人分到左脚、右脚的皮鞋各一只”.

二、(20分) 有N个盒子，n个质点. 现把n个质点独立地分配到N个盒中去. 假设每个质点落入第j个盒中的概率为$\frac{1}{N}$, $j=1,2,\cdots,N$. 以ξ表示分配结果空盒的个数.

(1) 试求ξ的概率分布;

(2) 试求$E\xi$和$D\xi$.

三、(20分) 现随意向区间[0, 1]上独立地投掷ν个点，其中点的个数ν是随机的；以表示落到区间$\left(\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$, $i=1,2,\cdots,n$, 上的点数. 假设ν有泊松 Poisson分布，参数为n，试证明ξ_1, $\xi_2,\cdots,\xi_n$相互独立.

四、(20分) 设$\{\xi_n,\ n\geqslant 1\}$是独立同分布随机变量，对任意$n\geqslant 1$，有

$$P\{\xi_n=j\}=\frac{1}{10},\ j=0,1,\cdots,9.$$

记 $S_1=0.\xi_1\xi_3\xi_5\cdots$, $S_2=0.\xi_2\xi_4\xi_6\cdots$.

(1) 试证明S_1与S_2相互独立，并且在[0,1]上有均匀分布;

(2) 试求$S_1^2+S_2$的分布密度.

五、(20分) 设$\{\xi_n,\ n\geqslant 1\}$和$\{\eta_n,\ n\geqslant 1\}$是同一概率空间上的二随机变量列. 记$F_n(x)=P\{\xi_n\leqslant x\}$. 已知$F_n(x)$弱收敛于$F(x)$，而$\eta_n$依概率收敛于0. 试证明$\xi_n+\eta_n$的分布函数弱收敛于$F(x)$.

[说明: $E\xi$和$D\xi$分别表示ξ的数学期望和方差.]

拓扑学试题

一、(20分) 设X和Y是两个紧致Hausdorff空间。

证明：$X\times Y$也是一个紧致Hausdorff空间。

二、(40分) 设X为一绝对收缩核，证明：

(1) X一定是可缩的；

(2) 对任意交换群A，有

$$H_q(X;A)=\begin{cases}0, & q>0\\ A, & q=0;\end{cases}$$

(3) 任意实心球和任意单纯形都是绝对收缩核。那么，球面是绝对收缩核吗？

三、(20分) 证明：

(1) 实射影平面和二维球面S^2不能拓扑同胚；

(2) 实射影平面和二维球面S^2都不能拓扑地嵌入到普通欧氏平面中(即欧氏平面中不可能有一个子空间和实射影平面或二维球面S^2拓扑同胚)。

四、(20分) 设K为一单纯复形，$f:|K|\to|K|$为单纯映射（对三角剖分K而言）。证明f的不动点所成的多面体的Euler数等于f的Lefscheftz数。

复 旦 大 学

高等数学试题

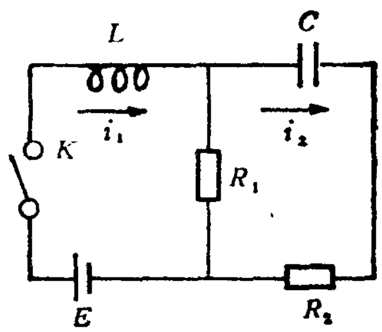
一、（6分）设 $a_n=\left(\frac{1}{n}\right)^n$，$p$ 为一定实数，记$\{a_n\}$的极限为a，试求极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}-a|}{|a_n-a|^p}$$

二、（6分）求不定积分

$$\int\frac{(x+3)dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}$$

三、（10分）在示意图给出的线路中，设各支路的电流为零，现合上开关K，试列出电流$i_2(t)$满足的二阶常系数线性方程，并写出相应的初值条件（不要求解方程）。



三题图

四、（10分）设轴 l 与一均匀球相切，记球体的半径为R，总质量为M，试求球体关于轴 l 的转动惯量。

五、（10分）设函数f的二阶导数f''在(a,b)内连续且大于零，α为0与1间某一数。试证：对于(a,b)内任意两点x和y，成立

$$f(\alpha x+(1-\alpha)y)\leqslant\alpha f(x)+(1-\alpha)f(y)$$

六、（10分）设D是由光滑闭曲线C围成的平面区域，函数$f(x,y)$在D及C上二阶连续可微，且$\operatorname{div}(\operatorname{grad}f)=0$，试证：

$$\int_C f\frac{\partial f}{\partial n}dS=\iint_D\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]dxdy$$

其中$\frac{\partial f}{\partial n}$是$f$关于曲线$C$的外法向$\vec{n}$的方向导数。

七、（10分）设$\alpha^1=(1,-1,1,-1)^T$，$\alpha^2=(5,1,1,1)^T$记V_1为R^4中由α^1和α^2的所有线性组合构成的子空间，V_2为R^4中与α^1和α^2均正交的所有向量构成的子空间。试分别找出V_1和V_2的一组正交基。

八、（8分）设$y=\operatorname{arctg}x$，试证：

$$y^{(n)}=(n-1)!\cos^n y\sin n\left(y+\frac{\pi}{2}\right)$$

九、（15分）设

$$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

求正交阵Q使$Q^{-1}AQ$成为对角阵。

十、（15分）试求解方程组

$$\begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2e^x \end{pmatrix}$$

满足初始条件$y_1(0)=1$，$y_2(0)=0$的解。

〔选解〕

九、特征方程为

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2}-\lambda & -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

解得特征根为$\lambda=1,1,-2$。

对应于特征根$\lambda=1$，解方程组

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

得一组线性无关的特征向量

$(-1,1,0)^T$和$(2,0,1)^T$，

标准正交化得

$$q^1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right)^T \text{和} q^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^T$$

对应于特征根$\lambda=-2$，解方程组

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

求得线性无关的特征向量为$(1,1,-2)^T$，标准化得

$$q^3 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}},\ \frac{1}{\sqrt{6}},\ -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)^T$$

于是，取正交阵Q为

$$Q=(q^1,\ q^2,\ q^3)=\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

则 $Q^{-1}AQ=\mathrm{diag}(1,1,-2)$。

十、解特征方程

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix}=0$$

得$\lambda=2,3$．对应齐次方程组的基本解组为

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}e^{2x},\qquad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{3x}$$

记原方程组的解为

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=C_1(x)\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}e^{2x}+C_2(x)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{3x}$$

则

$$\begin{pmatrix} C_1(x) \\ C_2(x) \end{pmatrix}=\int\begin{pmatrix} e^{2x} & e^{3x} \\ -2e^{2x} & -e^{3x} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ -2e^{x} \end{pmatrix}dx$$

$$=\int\frac{1}{e^{5x}}\begin{pmatrix} -e^{3x} & -e^{3x} \\ 2e^{2x} & e^{2x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -2e^{x} \end{pmatrix}dx$$

$$=\begin{pmatrix} \int 2e^{-x}dx \\ \int(-2e^{-2x})dx \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2e^{-x}+C_1 \\ e^{-2x}+C_2 \end{pmatrix}$$

代入初值条件

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=(-2+C_1)\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}+(1+C_2)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

从中解出$c_1=c_2=1$，于是所求解为

$$y_1(x)=-e^{x}+e^{2x}+e^{3x}$$

$$y_2(x)=3e^{x}-2e^{2x}-e^{3x}$$

高等数学与线性代数试题

（适用专业：计算机软件、信息科学、计算机系统结构、管理科学）

一、设有方程$1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^n\frac{x^n}{n}=0$

证明：该方程当n为奇数时仅有一个实根，当n为偶数时无实根。

二、试证明：

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x dx$$

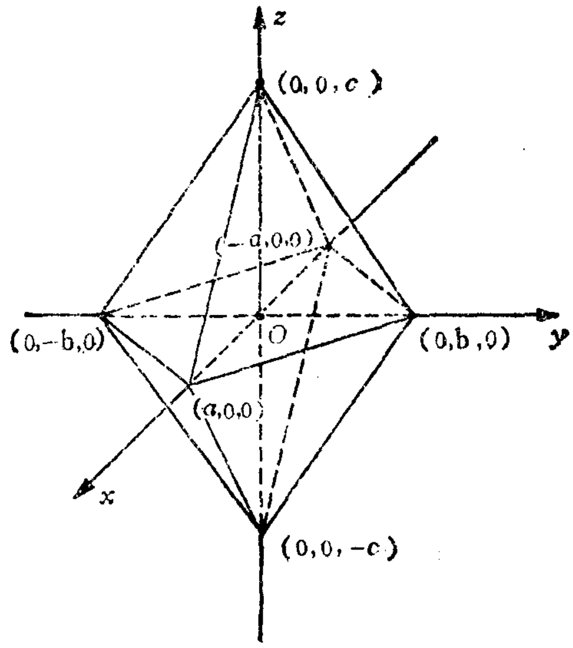
$$=\begin{cases}\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdots(n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots n}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & 若\ n=2k\\ \dfrac{2\cdot4\cdot6\cdots(n-1)}{3\cdot5\cdot7\cdots n}, & 若\ n=2k+1\end{cases}$$

其中k为正整数。

三、计算三重积分

$$I=\iiint\limits_{(V)}(x^2+y^2+z^2)dxdydz$$

其中V是如图所示的内部区域。



三题图

四、讨论下列级数的收敛性：

（1）$\dfrac{1}{1^p}-\dfrac{1}{2^q}+\dfrac{1}{3^p}-\dfrac{1}{4^q}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)^p}-\dfrac{1}{(2n)^q}+\cdots$，$(p>0,\ q>0)$；

（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n}-\ln\dfrac{n+1}{n}\right)$；

（3）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$是正项级数，并且$\dfrac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}\geqslant1+\sigma$，$(\sigma>0)$，$n=1,2,3\cdots$

五、已知 $A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$，求$e^A=$？

六、若 A，B，C，D都是n阶方阵，且$AC=CA$，

证明：$\begin{vmatrix}A&B\\C&D\end{vmatrix}=|AD-CB|$。

七、设 $A=(a_{ij})$是n阶正交阵，证明：

$a_{ij}=\pm a_{ij}$的代数余子式A_{ij}

并说明如何确定其符号？

八、（1）若A是n阶方阵满足$A^2-A+E=0$，问A是满秩阵还是降秩阵？并说明理由。

（2）若A，B都是n阶正交阵，且$|A|=-|B|$，问$A+B$是满秩阵还是降秩阵？并说明理由。

〔选解〕

一、证：设 $y=1-x+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^n\dfrac{x^n}{n}$