

193770

高 等 教 育 叢 書
東北人民政府文化教育委員會 主 編

208935

高等數學簡明教程

維諾格拉陀夫 著
傅 尙 民 譯

東 北 教 育 出 版 社

314

516/2004.0

(苏)

314

516/2004.0

高等教育叢書

東北人民政府文化教育委員會主編

高等數學簡明教程

維諾格拉陀夫著

傅尚民譯

東北教育出版社

一九五二——瀋陽

書號：0005

高等數學簡明教程

КРАТКИЙ КУРС

ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

著者：〔蘇聯〕維諾格拉多夫
(С. П. ВИНУГРАДОВ)

譯者：傅 尙 民

主編者：東北人民政府文化教育委員會

出版者：東北教育出版社

發行者：新華書店東北總分店

印刷者：長春印刷廠

印數 1-10,000冊

1952年9月初版

定價：22,000元

目 錄

第一篇 解 析 幾 何

第一章 直線上的解析幾何

§ 1. 直線上點的坐標	1
§ 2. 兩點的距離	1
§ 3. 線段的定比分割	4

第二章 平面上點的坐標。兩點的距離。線段的定比分割

§ 4. 平面上點的直角坐標	6
§ 5. 兩點的距離	7
§ 6. 線段的定比分割	9
§ 7. 質量中心	10
§ 8. 三角形面積	12
§ 9. 平面上點的斜角坐標	13
§ 10. 極坐標	14
§ 11. 射影	15

第三章 直線方程式。關於直線的基本問題。一次函數

§ 12. 直線的角係數和 y 軸上的截距	17
§ 13. 已知角係數的直線方程式	19
§ 14. 直線方程式的法線式	22
§ 15. 直線方程式的截距式	25
§ 16. 直線的一般方程式的特殊情形	25
§ 17. 已知方程式的直線作圖法	27
§ 18. 兩直線的交角	27

§ 19. 過已知一點的直線方程式	29
§ 20. 過已知兩點的直線方程式	30
§ 21. 兩直線的交點	30
§ 22. 點與直線的距離	32
§ 23. 一次函數	33
習 題	33

第四章 圓・拋物線・橢圓・雙曲線

§ 24. 圓及其方程式	36
§ 25. 圓與直線的交點	37
§ 26. 拋物線及其方程式	38
§ 27. 拋物線的形狀	39
§ 28. 拋物線與直線的交點	41
§ 29. 橢圓及其方程式	42
§ 30. 橢圓的形狀	43
§ 31. 橢圓的軸和頂點	44
§ 32. 橢圓和圓的關係	45
§ 33. 橢圓與直線的交點	46
§ 34. 橢圓的中心	46
§ 35. 橢圓的離心率及其準線	47
§ 36. 雙曲線及其方程式	50
§ 37. 雙曲線的形狀	51
§ 38. 雙曲線與直線的交點	52
§ 39. 雙曲線的漸近線	53
§ 40. 雙曲線的漸近線的作圖法	54
§ 41. 雙曲線上的點至漸近線的距離	54

§ 42. 雙曲線的中心	56
§ 43. 雙曲線的離心率及其準線	56
§ 44. 橢圓、雙曲線及拋物線的一般性質	58

第五章 幾種軌跡

§ 45. 關於直線及圓的幾種軌跡	59
§ 46. 一點關於圓的方幂	61
§ 47. 二圓的等幂軸	63
§ 48. 歧點莖葉線	64

第六章 坐標變換・二次曲線通論

§ 49. 坐標變換	65
§ 50. 拋物線方程式 $y = ax^2 + bx + c$	67
§ 51. 關於漸近線的等軸雙曲線方程式	68
§ 52. 曲線的次數	69
§ 53. 二次曲線與直線的交點	71
§ 54. $D \neq 0$ 時曲線方程式的變換	72
§ 55. $D = 0$ 時曲線方程式的變換	76

第七章 空間的點的坐標・兩點的距離・線段的定比分割・

有向直線的方向餘弦

§ 56. 空間的點的坐標	79
§ 57. 兩點的距離	80
§ 58. 線段的定比分割	81
§ 59. 空間的射影	82
§ 60. 直線與三坐標軸交角的關係	83

第八章 平面方程式及其各種型・關於平面的問題

§ 61. 平面方程式的法線式	84
-----------------	----

§ 62. 平面方程式的截距式	86
§ 63. 平面方程式的特殊情形	87
§ 64. 二平面的交角	89
§ 65. 三平面的交點	90
§ 66. 過已知三點的平面方程式	91
§ 67. 點與平面的距離	91
習 題	92

第九章 空間的直線及其方程式・關於直線及平面的問題

§ 68. 空間的直線方程式	93
§ 69. 過已知二點的直線方程式	95
§ 70. 兩直線的交角	97
§ 71. 直線與平面的交角	97
§ 72. 直線與平面的交點	98
§ 73. 空間二直線的交點	99
習 題	100

第十章 二次曲面的基礎理論

§ 74. 曲面的次數	102
§ 75. 二次曲面	102
§ 76. 各種型的二次曲面方程式	102
§ 77. 橢圓面	104
§ 78. 旋轉橢圓面	103
§ 79. 球面	106
§ 80. 橢圓面的圓截口	107
§ 81. 單葉雙曲面	108
§ 82. 單葉旋轉雙曲面	109

§ 83. 單葉雙曲面的圓截面	110
§ 84. 單葉雙曲面的母線	110
§ 85. 雙葉雙曲面	112
§ 86. 雙葉旋轉雙曲面	113
§ 87. 橢圓拋物面	114
§ 88. 旋轉拋物面	115
§ 89. 雙曲拋物面	115
§ 90. 拋物面的母線	116
§ 91. 二次錐面	117
§ 92. 雙曲面的漸近錐面	118
§ 93. 二次柱面	119

第二篇 數 學 解 析

第十一章 函 數

§ 94. 數集	121
§ 95. 區間、節、點的鄰域	122
§ 96. 單變數函數	124
§ 97. 函數的解析表示 · 函數的存在區域	127
§ 98. 函數的幾何表示	129
§ 99. 關於函數的表示	132
§ 100. 單調函數與非單調函數	132
§ 101. 有界函數與無界函數	134

第十二章 極 限

§ 102. 數集的極限點	135
§ 103. 函數的極限	136

§ 104. 當 $x \rightarrow \infty$ 時, 函數 $f(x)$ 的極限	141
§ 105. 數列 · 數列的極限	144
§ 106. 無限小函數	147
§ 107. 無限小函數的定理	149
§ 108. 和及差的極限	152
§ 109. 積的極限	153
§ 110. 商的極限	153
§ 111. 單調數列的極限	154
§ 112. 計算極限的例題	154
習 題	161

第十三章 連 續

§ 113. 函數在點、在區間、在節的連續性	163
§ 114. 在節內的連續函數的最大值、最小值及中值的定理	165
§ 115. 連續函數的和、積及商的連續性	168
§ 116. 函數連續性之各種不同形式的定義	170

第十四章 導數 · 微分法

§ 117. 函數的導數	171
§ 118. 導數的幾何意義	172
§ 119. 有導數的函數的連續性	173
§ 120. 定理1. 常數的導數	174
§ 121. 定理2. 和的導數	174
§ 122. 定理3. 積的導數	175
§ 123. 定理4. 分數的導數	176
§ 124. 定理5. 函數的函數的導數	177
§ 125. 冪的導數	178

§ 126. $\sin x$ 的導數	180
§ 127. $\cos x$ 的導數	181
§ 128. $\operatorname{tg} x$ 和 $\operatorname{ctg} x$ 的導數	182
§ 129. 恆等式的微分法	182
§ 130. 反三角函數	183
§ 131. $\arcsin x$ 的導數	183
§ 132. $\arccos x$ 的導數	184
§ 133. $\operatorname{arctg} x$ 的導數	185
§ 134. $\operatorname{arccotg} x$ 的導數	186
§ 135. 指數函數	186
§ 136. 函數 a^x 的性質	188
§ 137. 對數	189
§ 138. 指數函數的導數	190
§ 139. 對數的導數	192
§ 140. 對數微分法	192
習 題	193

第十五章 微分・增函數與減函數・高階導數與高階微分・一階導數與二階導數在研討函數上的應用

§ 141. 微分	197
§ 142. 高階導數及高階微分	198
§ 143. 洛爾定理	200
§ 144. 拉格郎奇定理	201
§ 145. 增函數與減函數	203
§ 146. 函數的極大與極小	204
§ 147. 例題	208

§ 148. 二階導數的幾何意義・曲線的凸凹・反曲點	209
§ 149. 研討函數的例題	211
習 題	213

第十六章 偏導數與偏微分・全微分・疊函數及隱函數的微分法

§ 150. 偏導數與偏微分・全微分	215
§ 151. 疊函數的微分法	217
§ 152. 隱函數微分法	219
§ 153. 高階偏導數	221
習 題	222

第十七章 積分學的問題・不定積分與定積分・積分的幾何意義・積分是和的極限・基本積分・代換積分法與部分積分法

§ 154. 積分學的問題・不定積分	223
§ 155. 定積分是和的極限	225
§ 156. 積分是和的極限的計算例題	231
§ 157. 函數的積分法或求面積	232
§ 158. 基本積分表	233
§ 159. 代換積分法	234
§ 160. 部分積分法	236
習 題	239

第十八章 有理函數的幾種性質・有理函數的積分法

§ 161. 有理整函數的積分法	241
§ 162. 有理整函數的幾種性質	241
§ 163. 分解有理分式爲部分分式	245
§ 164. 有理分式的積分法	250
習 題	254

第十九章 最簡單的無理函數及超越函數的積分法

§ 165. 無理代數函數的積分法	255
§ 166. (A) 型積分	255
§ 167. (B) 型積分	256
§ 168. (C) 型積分	257
§ 169. 超越函數的積分法	260
習 題	263

第二十章 定積分 · 定積分的性質 · 積分概念的推廣 · 定積分的近似

計算 · 梯形公式 · 辛普孫 (Simpson) 公式

§ 170. 定積分的性質	265
§ 171. 對數的定義和性質	268
§ 172. 積分概念的推廣	269
§ 173. 計算定積分的例題	271
§ 174. 渥里斯(wallis)公式	272
§ 175. 定積分的近似計算 · 梯形公式	273
§ 176. 辛普孫公式	274
習 題	276

第二十一章 級數 · 無限級數的收斂性與發散性 · 收斂的條件 · 各項為單

變數函數的級數 · 冪級數 · 馬克勞林級數與台勞級數 · 函數 展開成級數

§ 177. 收斂級數與發散級數	278
§ 178. 收斂的必要條件	281
§ 179. 比較判定法的定理	282
§ 180. 正項級數的收斂條件	284
§ 181. 交錯級數的收斂條件	285

§ 182. 絕對收斂級數	287
§ 183. 絕對收斂級數的性質	288
§ 184. 複數項級數	291
§ 185. 級數的運算	292
§ 186. 冪級數	293
§ 187. 冪級數的均勻收斂	295
§ 188. 冪級數所決定的函數的連續性	297
§ 189. 冪級數所決定的函數的導數	297
§ 190. 冪級數所決定的函數的積分	301
§ 191. 函數展開成級數	301
§ 192. 馬克勞林公式的另一結論	304
§ 193. $e^x, \sin x, \cos x$ 展開成級數	307
§ 194. 用級數計算 $\sin x$ 和 $\cos x$	309
§ 195. 指數函數與三角函數間的關係	310
§ 196. 對數展開成級數	311
§ 197. 對數的計算	312
§ 198. $(1+x)^m$ 展開成級數	315
§ 199. 幾何說明	317
§ 200. 台勞 (Taylor) 公式	310
§ 201. 單變數函數的極大與極小	320
§ 202. 代數方程式的根的近似計算 (牛頓方法)	322
§ 203. 用級數積分法	325
習 題	328

第二十二章 微積分在幾何上的應用

§ 204. 平面曲線的切線與法線	330
-------------------	-----

§ 205. 切線長與法線長 · 次切距與次法距	331
§ 206. 曲線的弧長	332
§ 207. 曲線的曲率	333
§ 208. 曲率圓	335
§ 209. 漸屈線	336
§ 210. 擺線	337
§ 211. 求面積法	341
§ 212. 求體積法	343
§ 213. 旋轉體的體積	343
習 題	344

第二十三章 微分方程式

§ 214. 定義	346
§ 215. 消去常數得常微分方程式	347
§ 216. 微分方程式的解	349
§ 217. 變數分離型一階微分方程式	350
§ 218. 線性微分方程式	352
§ 219. 方向場	355
§ 220. 二階微分方程式	357
§ 221. $\frac{d^2 y}{dx^2} = f(x)$ 型微分方程式	357
§ 222. $\frac{d^2 y}{dx^2} = f(y)$ 型微分方程式	359
§ 223. $f\left(\frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}\right) = 0$ 型微分方程式	361
§ 224. $f\left(x, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}\right) = 0$, 及 $f\left(y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}\right) = 0$	
型微分方程式	363
§ 225. 二階線性微分方程式	366

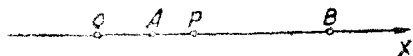
§ 226. 常係數二階齊次線性微分方程式.....	369
§ 227. 常係數二階非齊次線性微分方程式.....	373
§ 228. 常係數高階線性微分方程式.....	380
本書所用符號的說明.....	381
希臘字母表.....	382

第一篇 解析幾何

第一章 直線上的解析幾何

§1. 直線上點的坐標.

爲了確定直線上點的位置，可以在此直線上任取一點 O ，叫做原點(第一圖)。
若已知點 O 至點 P 的距離，即線段 OP 的長，和它的方向，則此直線上



的點 P 就可以完全確定。線段長是

第1圖

以某一長度單位測度所得的，而線段的方向可用+號或-號區分之。例如，規定自點 O 向右截取的線段爲正，向左截取的線段爲負，因此，將前者長的數值冠以+號，後者長的數值冠以一號，但一般+號可以省略。

由此規定，則可得與直線上任何一點必對應的一數，此數叫做該點的橫坐標或坐標，一般以 x 表示之。

反之：任何一個實數也對應直線上的一點。

這樣，直線的點與實數間互相一一對應。

點 P 的橫坐標爲 x ，以符號 $P(x)$ 表示之。

在解析幾何上所謂：已知一點，也就是說已知該點的坐標。

點 O 的坐標爲零，所以叫做計算的原點，或叫做坐標原點；有向直線 ox 叫做坐標軸。

§2. 兩點的距離.

設直線上的坐標系已確定，即已選擇了：1)坐標的原點 O ；2)正向；3)長

度單位。再設這個坐標系的已知兩點爲 $A(x_1)$ 及 $B(x_2)$ 。求距離 AB 。

兩點 A, B 的位置如第2圖所示，則

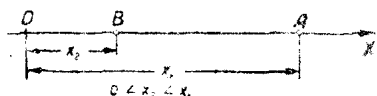
$$AB = x_2 - x_1.$$

若 $0 < x_2 < x_1$ (第3圖)，則

$$AB = x_1 - x_2.$$



第2圖



第3圖

以上兩種情形可以合併寫作：

$$AB = |x_2 - x_1|. \quad *$$

(1)

兩點 $A(x_1)$ 和 $B(x_2)$ 的距離公式(1)，對於直線上任何兩點皆成立。

兩點重合時也不例外，在此種情形下，距離 AB 等於零。

例如，第4圖所示點的位置，顯然

$$AB = AO + OB,$$

但， $AO = -x_1$ ， $x_1 < 0$ ，而 $-x_1 > 0$ ； $OB = x_2 > 0$ 。

因此 $AB = -x_1 + x_2 = x_2 - x_1$ ，

因 $x_2 - x_1 > 0$ ，所以，此式和已知公式(1)一致。

* $| |$ 號即數的絕對值的符號如：

$$|-3| = 3; |2| = 2; |0| = 0.$$