大地測量実習

（計算部分）

Б. Н. 劳宾諾維奇著

測繪出版社

大地測量实習

計算部分

苏联 Б. Н. 劳宾諾維奇著
邱述德
李錫泉 合譯

苏联高等教育部審定作爲高等測繪学校及測繪系教科書

測繪出版社
1956·北京

Б. Н. РАБИНОВИЧ

ПРАКТИКУМ ПО ВЫСШЕЙ ГЕОДЕЗИИ

(вычислительные работы)

ГЕОДЕЗИЗДАТ

МОСКВА 1951

本書系根据苏联測繪書籍出版社1951年于莫斯科出版的“大地測量实習（計算部分）”譯出。原書由莫斯科測繪工程学院大地測量教研室以克拉索夫斯基教授所著的［大地測量学］为基礎編纂而成，作为該院的实習教材之一，并經苏联高等教育部審定作为測繪学院和測量系的教科書，其中詳細研討：(1) 計算的技術、方法及工具，(2) 三角測量的平差，(3) 橢圓体上大地測量問題的解算。

本書由邱述德、李錫泉兩同志合譯，胡明城同志校訂。

大地測量实習（計算部分） 430,000字

著　者　苏联Б. Н. 劳宾諾維奇
譯　者　邱述德、李錫泉
出版者　測繪出版社
北京宣武門外永光寺西街3号
北京市書刊出版業營業許可証出字第零捌壹号
發行者　新華書店
印刷者　北京市印刷二厂
北京宣武門內佟麟閣路71号

印数(京)3401—7410册　一九五六年一月北京第一版
定价(8)2.51元　一九五六年五月第二次印刷
开本31″×43″1/16　印張　18

前　　書

蘇聯的測量工作對於國民經濟各部門的建設具有重要意義。如衆所知，前幾個斯大林五年計劃的社會主義建設（第聶伯河水電站，土耳其斯坦西伯利亞鐵路，烏拉爾鐵礦，康茲巴斯煤礦等）曾要求對我國領土上極其廣大的部分進行詳細的測量考查。現在要求規模鉅大的、多種性質的測量工作服務於宏偉的共產主義建設（斯大林格勒和古比雪夫水電站以及土爾克明運河等）。

由以上所述，測量學和製圖學的科學和實際問題，在蘇聯已成爲如此繁多和豐富，以致對高級測量工作者的培養，已經要求建立高等測繪專科學院。在這些高等學校中，大地測量學的研究，是按着豐富的教學大綱進行的，此教學大綱反映了俄國的，特別是蘇聯的測量工作者的有名的卓越方法與許多獨到的、極其重要的科學與實際成就。由此可以明瞭，爲什麼蘇聯高等測繪學院的學生們必須精通廣泛的大地測量學問題。當然，如果有適當的實習教材，則可能易於掌握淵博的理論課程。

編纂大地測量實習教材，是由大地測量工作者、已故的Ф.Н.克拉索夫斯基教授發起的。他曾多年領導了莫斯科測繪工程專科學院的大地測量學教學研究室（МИИГАиК）。

還在Ф.Н.克拉索夫斯基在世時，即已開始在其領導下由教學研究室人員А.А.依佐托夫和Б.Н.勞賓諾維奇完成了本教材提綱中各個問題的研討與計算工作各課題的方法指示的編訂工作。可惜由於他的逝世，所獲得結果，未能與這一工作的發起者與領導者進行討論。

計算工作和高精度測量儀器之檢驗，佔高等測量學院中與大地測量學併行的實習和實驗課程的大部分＊。本教材在實習與實驗課上幾乎將三分之二的時間用於講解計算工作。教員的講課佔去此時間的一部分。編纂計算工作教學參考書所追求之目的，是改進這門功課的講授與保證學員在研究課題中作較多的獨立思考。所以必須：1）使學生熟悉關於近似計算的基本概念以及大地計算理論與實際的基本原則；2）供給學生以大地測量問題數值解算的範例；3）說明該課程理論部分的一系列問題；4）提出問題，由學員獨立研究。

在編纂教材時，作者是根據上述課題出發的，並且必須在以前還無任何類似的大地測量學參考書籍的情況下去解決這些課題，因爲本書尙爲編纂大地測量實習教材的第一次嘗試。

學生欲順利地利用本書，必須研究現在作爲這一門科學的基本教科書「大地測量學」（Ф.Н.克拉索夫斯基，В.В.達尼羅夫著），這一點在編纂本教材時即已顧及。只有在研究此書理論部分的基礎上，學生才能順利地利用本教材去獨立地完成實習作業。根據這

＊莫斯科測繪工程學院大地測量學教學研究室之計劃中，已預定編纂大地測量儀器檢驗實習教材。

些理由，教材中課題數值解答的某些細節被省略；同時所研討的問題之數量，在使經過理論訓練的學生能獨立地研討某些課題或實例的解算。

在本教材的每章之後，都列有問題和作業，供獨立研究。

應當指出，測繪學院的教學計劃，規定每個學生須完成大地測量學的學年作業，其題目是三角測量某種現代平差方法的一般應用。批判地分析這些方法，也常是畢業論文的對象。但是，如果學生不先行研讀專門書籍，則妥善地完成學年作業或畢業論文是不可想像的。專業書籍的內容不能也不應該被教材中相應的材料所代替；教學參考書的任務並不在此，而只在於配合對學生理解與獨立運用專業書籍的培養。正是爲了達到這一目的，要求學生掌握三角測量平差的經典方法，此即本教材研討的重點所在。

作者認爲編纂實習教材的工作具有極大的意義，因此，請求讀者提出自己對實習教材的意見，以資改進本教學參考書。

許多同志幫助了本書的出版。大地測量學教學研究室助教 $M.\Gamma$ 普羅特尼科娃在第二人平差三角網時給予了實際的幫助。技術科學碩士 $И.\Gamma$.列托瓦利差夫計算了長距離的主要大地問題，而 $H.C$.斯特拉哈娃助教則幫助計算了三角高程測量平差的例題。作者謹對上述同志表示謝意。

作者向下列同志表示感忱：編輯 $Д.А$. 拉林，教學研究室主任 $B.B$.達尼羅夫教授，技術科學博士 $A.A$. 依佐托夫，$A.M$. 威羅維赤教授及莫斯科土地整理工程學院大地測量學、製圖學教學研究室人員 $B.П$.亮查納夫，感謝他們對本書的批評與寶貴的指示。

講師，技術科學碩士

B.H.勞賓諾維奇

目　錄

第 一 部 分

計算的方法、技術和工具

第 一 章

近似計算的誤差

§1. 關於近似計算的概念

觀測的結果常含有某些不可避免的誤差。多次觀測某一量時所得的各值間，一般都有些差異，這一事實使我們相信這一點。例如，如果以同一高精度測角儀器觀測某一角度數次，則此時所得的各值不相符合。只能這樣斷言，在觀測質量良好時，所得的一角度各值間之不符值，依施行觀測的條件與測角儀器的精度，不會超過某量。

所以，由觀測某量所得的數值，不是絕對精確的，而只是正確至某位數的近似值。在依相應的公式計算大地控制網的某些元素時，正是利用這些近似值作為自變數。例如，當按三角形之含有某些誤差的觀測邊和觀測角計算其邊長時，因為自變數含有誤差，故所得函數計算的結果也只是近似值。常常運用於決定某些量的公式本身也限定這些量有某一範圍的最小誤差。例如，計算子午綫弧長的實用公式，即依弧長與其限定的計算誤差而異其形式。如果採用誤差等於1MM，則短弧保證在此誤差以內所用的公式，較長弧所用者為簡單。

因而，計算結果的誤差（如無錯誤時），是由於自變數的誤差、所採用的公式之不精密、或是這兩種因素的合併影響所引起。因此，近似計算即了解為運用近似量或近似方法，或兩者兼用的計算。

所有的計算，一般既為近似的，就應以最少的勞動求得其精度與起算值的精度相應的結果。計算員應注意者，即使採用精度最佳的公式以及保持很多小數位時，已知量所含的誤差仍傳播至所求量中。可見某一函數值之計算結果所含的誤差，不可能較自變數（起算數值）所含者為小。但是，應當着重指出，此種情況不能擴大至按最小二乘法平差直接觀測的自變數時所得之函數結果中。例如，如衆所知，同一量由數次觀測取的算術中數，一般較一次觀測的結果精確。我們也知道，平差元素之函數的誤差，較按直接觀測元素計算的同一函數之誤差為小。

關於計算的精度，蘇聯傑出的數學家 *A.H.* 克雷羅夫院士指出：「技術員自己在將數學應用在實際問題上時，應關懷使數學有助於正確的意義；他應該記住，儘管計算進行得如何精確，但計算的結果却不能比其所根據之數據與假設精確，因此，計算精度須適應起算數據的精度及進行計算的實際需要。」*

---

* 近似計算講義(A.H.克雷羅夫)第360頁，莫斯科——列寧格勒，1950年第五版。

如果在進行計算時，所用的小數位較起算數據的正確小位數多保持一位。且算術運算次數不多時，則計算誤差對所求量的影響實際上可以忽略。因此，我們指出，在解算大的法方程式系時，算術運算次數很多，這樣就引起了計算誤差鉅大的積累，以致所求的結果含有誤差。如何消除這種誤差，將在以後研討三角測量平差法中說明之。

用近似值計算，以及決定計算結果中所含誤差的方法，是近似計算理論的主體。對這一理論的精通與靈活的運用，乃是正確而卓越地完成計算工作以及不多餘地耗費人力與時間的必要條件。

§ 2. 計算的誤差：絕對誤差、相對誤差及百分誤差

在進行大地計算以及其它各種計算時，應事先確定所求結果會有怎樣的容許誤差與可能的誤差。因此，必須事先知道怎樣理解結果的誤差或者推求此結果時所用的各量之誤差。大家知道，任何量都以數值表示。因此，數值的誤差，即爲該數值所表示的量之誤差。但確定各量之數值，其來源各有不同：一部分爲數學的量，常不能以單位較量，例如 π 的數值，自然對數的底 e 等等；另一部分則爲直接觀測的結果。前者與後者的區別在於：數學產生的量（如無理的及超越的）可能寫爲任意個有效數字（以任意精度計算），而由觀測所得的量只限於與觀測精度相應的正確數字之個數。例如，以下所寫的無理數和超越數的精度很高，而由觀測所得的數值僅至第二位小數：$\sqrt{2}=1,414213\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$，$\pi=3,1415926536\cdots\cdots\cdots$，經緯儀導綫一邊之量得長度 $S=125,34$м。

某一數值的有效數字，應理解爲：從左方之一不等於零的數字開始的所有數字，且認爲除最後一數字外，所有這些數字都眞確（零亦計算在內）。最後一位數字的誤差，取決於該數字之來源的性質，即其屬性。當我們說已知數值有 k 個正確位數，則這對於整數、分數及帶分數都可能正確。例如， 2736； 2,736； 0,2736； 0,02736； 0,002736； 0,0002736； 所有這些數都有四位有效數字，而在最後一位有誤差。

如果是由數學產生的數值，則最後一位數的誤差常可有把握地判定。至於由觀測各量結果中所得之數值，甚至在保持已知的觀測精度時，其倒數第二位的正確性不能常有把握，有時甚至對較之更前的數字亦無把握（由右向左）。例如，如果 400м 左右的距離用帶尺測量之誤差爲 1:2000，則所得值 425,37 м 的第一位小數中含有誤差是完全有理由的。但由於按帶尺讀數的精度可能達公分，所以觀測結果亦記錄至第二位小數。在記錄高精度角度觀測結果時，亦有此種情況。甚至於一等三角測量中，用若干個測回觀測的角度之精度，以十分之幾秒表示，但結果仍記錄至百分之一秒。

在實際處理大地觀測值時，各求得的量一般都多記錄一位作爲備用，此備用位出現在從一已知量之各觀測值推求算術中數的結果中，或出現在角度觀測值之測站處理的結果中。在進行以後的計算時，大地觀測值即附上此備用位作爲起算數據。但是，在按這些起算數據算得的各量中，一般還再保持一備用位（例如，如果起算數據取兩位小數，則於按其算得的各量中尙保持第三位小數）。

不論數值的屬性如何，其絕對誤差都應理解爲其精確值與近似值之差。例如，如果採取 π 的精確值爲 3,14159，則3,1； 3,14； 3,142； 及3,1416的誤差 $\Delta\pi$* 各爲：+0,04159；

---

* $\Delta\pi=\pi-\pi_0$，式中 π_0 爲 π 之近似值。

$+0,00159$；$-0,00041$及$-0,00001$。對於前兩個π之值誤差爲正，而對於後兩個π之值爲負。這就是說，在第一種情況下，所給出的π值爲不足近似值，而在第二種情況下則爲過剩近似值。不難看出，這裏所列的π之各個誤差，都小於所取的π之各近似值最後一位小數上的二分之一。在用無理數或超越數計算時，我們常能以需要的精度採用這些數值的近似值，同時絕對誤差的符號完全可以確定。當我們必須利用數學來源的近似值時，情況就是如此。至於由直接觀測結果所得的近似數值，其絕對誤差的符號同誤差值本身一樣，始終不能完全確定。由大地觀測所得的各量，亦具有此種特性。

設A爲某一觀測量的精確值，a爲其近似值；根據上述定義，近似值的絕對誤差α爲：

$$\pm\alpha=A-a. \tag{1.2}$$

示式（1.2）應這樣了解，即：誤差爲$+\alpha$和$-\alpha$均有同樣可能。這就是說，A的眞值可等於$a+\alpha$，$a-\alpha$及其它任一介於此範圍內的數值，且都有同樣的根據。因此，示式（1.2）又可寫爲：

$$a-\alpha\leqslant A\leqslant a+\alpha \tag{2.2}$$

絕對誤差常不足以鑑定觀測量的精度。例如，如果兩條長度不等的綫段（S_1和S_2）以同一絕對誤差μ測量，則每一結果的精度如何，可比較比式$\frac{\mu}{S_1}$和$\frac{\mu}{S_2}$而判定。此兩比式即爲相對誤差；其中較小者表示較精確的觀測值。因爲這一量由觀測所得的近似值a與未知的精確值很少差別，故採取：

$$\frac{\alpha}{A}=\frac{\alpha}{a}=\frac{1}{n}. \tag{3.2}$$

在實際大地測量中，相對誤差以分數表示，其分子等於1。此種分數對於一數的單位絕對誤差與其值之比給以明顯的概念。分數$\frac{1}{n}$愈小，則結果愈精確。當然，相對誤差是無名數。有時此數以百分數表示；爲此，將相對誤差$\frac{\alpha}{a}$乘以100已足，並以分數形式表示之。於是即得所謂百分誤差。例如數值$\pi=3,1$之相對誤差爲$\frac{1}{75}$；百分誤差則爲$\frac{100}{75}=1,33\%$。在實際大地測量中，百分誤差並無廣泛的應用。

§3. 近似數的湊整

無理數、超越數以及一般任何無盡的帶分數或者分數，可用達任意小數位的精度記出。此可於數值中保持相應個數的正確位數（數字）達到之。例如下列弧度的秒數之兩值$\rho=206264'',806$及$\rho=206264''806247$，其精度各達千分之一和百萬分之一秒。

當然，任何數值湊整，都應使其發生的誤差爲儘可能小。例如，應採取$\rho=206264.81$作爲一弧度湊整到百分之一秒的數值，而不應採取$\rho=206264.80$，因爲在前一湊整中，

所允許的誤差 $\Delta\rho=-0'',0037\cdots\cdots$，其絕對值較後一湊整中的誤差 $\Delta\rho=+0'',0062\cdots\cdots\cdots$ 爲小。

計算員必須堅決地遵守數值湊整的一般規則。這樣才能確保同一量由各個計算員保持規定的精度以及按同樣的公式所進行的正確計算可導致完全相同的結果。

一般採用的湊整規則如下：如果在被捨去的一部分數值中，其第一數字小於「五」，則最後一位保留的數字保持不變；如該數字大於「五」，則最後一位保留的數字進一；如果捨去的數字「五」是該數值中最右面的一個數字，或在此數字之後有若干個零，則其前一數字爲偶數時保持不變，爲奇數時進一。此規則的應用，用下列湊整至第二位小數的各數值說明之：$4,8547\approx4,85$；$54,76789\approx54,77$；$12,345\approx12,34$；(但$12,3451\approx12,35$)；$0,735\approx0,74$；$0,65500\approx0,66$。

嚴格地遵守上述的湊整規則，會使湊整時產生的誤差得到部份的抵消。所說一已知數值有 n 個正確位數，意即指數值的湊整係按上述規則進行。

必須指出，已經湊整一次的、且最後一位爲五的數值，如果再湊整時，則產生不定性。例如由4,8547湊整而得的數值4,85須湊整至一位小數。如果僅已知4,85，並按上述湊整規則，則應寫成 $4,85\approx4,8$，很明顯，這是不正確的，因爲 4,8 之誤差爲 $+0,0547$，而 4,9之誤差反較小，即爲 $-0,0453$。爲了使已經湊整一次的近似數在下次湊整中避免此類錯誤，實際運用下一規則。如果已湊整的數值之最後一位數字「5」不是數字 4 進一的結果，則在「5」上加上圓點，即$4,8537\approx4,8\dot{5}$；否則加一短綫劃，例如$3,7469\approx3,7\overline{5}$。

必須指出，在進行計算時所用的對數表、三角函數表或各種特別用表（測量用表、子午弧長表等等），一般都包含按上述規則湊整的近似值，但是只有在某些表中於最後一位數字「5」上加有圓點和短綫劃。

§ 4. 計算結果之誤差的一般公式

計算的結果，一般爲某種代數式——或者說函數——的數值：

$$N=f\ (a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots\cdots,\ a_k) \tag{N}$$

變數 a_1, a_2, a_3, $\cdots\cdots a_k$ 一般爲直接觀測量；有時其中有若干個數學常數。但是，不論其屬性如何，所有變數一般都含有誤差Δa_1, Δa_2, $\Delta a_3\cdots\cdots\Delta a_k$，這些誤差使 N 的結果發生某一誤差 ΔN。如果取函數（N）之全微分，並以有限微差代替微分，則可以求得誤差基本公式如下：

$$\Delta N=\Delta a_1\frac{\partial N}{\partial a_1}+\Delta a_2\frac{\partial N}{\partial a_2}+\Delta a_3\frac{\partial N}{\partial a_3}+\cdots\cdots+\Delta a_k\frac{\partial N}{\partial a_k}. \tag{4.1}$$

顯然，此函數的相對誤差之最大值爲：

$$\frac{\Delta N}{N}\leqslant\left|\frac{\partial N}{\partial a_1}\frac{\Delta a_1}{N}\right|+\left|\frac{\partial N}{\partial a_2}\frac{\Delta a_2}{N}\right|+\cdots\cdots+\left|\frac{\partial N}{\partial a_k}\frac{\Delta a_k}{N}\right|. \tag{4.2}$$

分析公式（4.2），則不難看出，當各偏導函數$\frac{\partial N}{\partial a_i}$相等時，絕對誤差 Δa_i最大的一項對所求的 N 之結果所引起的誤差爲最大，如果所有這些絕對誤差相等時，則 N 的結果