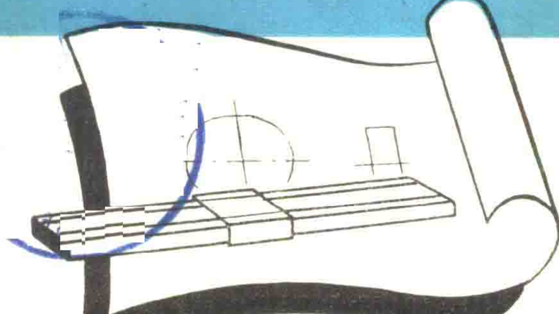
机械工人学习材料

JIXIE GONGREN XUEXI CAILIAO

工厂常用三角计算法

张耀卿编著

计算



机械工业出版社

内容提要　在机械加工中，由于工艺或技术测量上的需要，常常要用三角关系计算零件的直线尺寸或角度等。本书从三角函数基础谈起，介绍应用三角函数计算几何图形的一般途径，列举工厂常见的各种计算实例、图形分析、公式推导等。

本书是修订第三版，这次重印内容又作了补充修改，并附计算例题74个，比较切合工厂实际，可供机械工人阅读。

工厂常用三角计算法

（修订第三版）

张耀卿　编著

*

机械工业出版社出版（北京阜成門外百万庄南街一号）

（北京市书刊出版业营业許可証出字第 117 号）

机械工业出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行・新华书店经售

*

开本 787×1092 1/32・印张 2 1/4・字数 50 千字

1965 年 3 月北京第二版

1973 年10月北京第三版・1973 年10月北京第一次印刷

印数 000,001—500,000・定价 0.18 元

*

统一书号：T15033・518

毛主席语录

红与专、政治与业务的关系，是两个对立物的统一。一定要批判不问政治的倾向。一方面要反对空头政治家，另一方面要反对迷失方向的实际家。

在生产斗争和科学实验范围内，人类总是不断发展的，自然界也总是不断发展的，永远不会停止在一个水平上。因此，人类总得不断地总结经验，有所发现，有所发明，有所创造，有所前进。

目　次

一 引 言

在机械加工中，各工种都有它的各种计算内容。这些计算内容所用到的计算公式，很多是要用到三角函数的。在技术测量方面的直接测量或者间接测量中，往往也要用到三角计算。在许多技术书籍中都有这些计算公式，只要把已知条件代入公式，就可以算出我们所要求的数值来。但是，这些计算公式怎样得来的呢？有的工人同志往往是不够清楚的，因此就要硬记公式，这样不仅容易记错，而且时间长了（或者不经常使用）往往会忘记了。同时推导公式是有它的原始条件的，各种公式有它的应用范围，不了解推导过程和推导方法就会错用公式。因此，知道计算公式的由来、推导过程和推导方法是很重要的。此外，机械零件几何形状的各部位尺寸，在图纸上不是全部都标注出来的，而是只注上那些必不可少的尺寸。有了这些尺寸就可以把整个图形作出来，如果再多注出一个尺寸就成为重复尺寸，这是错误的。但是，在加工中往往还需要计算图纸上没有注明的一些尺寸。一般来说，有这么几种情况：1）由于工艺上的需要，加工基准和图纸上的尺寸基准不一致，需要计算工艺尺寸。2）由于测量上的方便，用测量角度代替直线尺寸的测量；或用测量直线尺寸代替角度的测量。因此，就需要从直线尺寸来计算角度，或从角度来计算直线尺寸。3）有些图纸注明的尺寸不好测量，需要计算相关部位的尺寸，以便测量。如圆弧中心距离无法测量，就需要计算出圆弧和直线交割处的尺寸，然后再进行测量。4）由于工序中加工出来的半成品形状和成品形状不同，不能测量图纸注明的成品

尺寸，因此也必须计算工序尺寸。上述这些计算，往往也都需要三角函数。在复杂的各种各样的几何形状中，如何找出直角三角形，把已知数和要求的目的数在直角三角形中用三角函数的关系把它们联系起来，列出式子进行计算。如何掌握这些计算规律和计算途径，都是需要解决的问题。在这本小册子里，我们就着重地来谈一谈各种包含有三角函数的计算公式的由来，推导过程和一般计算途径，以便更好地应用三角函数解决种种计算问题。

二　三角函数基础

1 直角三角形和它的元素　由三条边组成的封闭几何图形叫做三角形，三角形的三条边和三个角叫做三角形的六个元素。三角形的三个角的大小可能是各式各样的，但三个角的和总是等于180°，不多也不少。如果三个角都是锐角（即都小于90°），这种三角形叫做锐角三角形（图 1）。如果三角形有一个角是钝角（即大于90°），很自然它的其余两个角只能是锐角，这种三角形叫做钝角三角形（图 2）。如果三角形中有一个角等于 90°，这种三角形叫做直角三角形（图 3）。直角三角形除直角以外的其余两个角都是锐角，而且这两个锐角之和等于 90°，如图 3 中$\angle A+\angle B=90°$。这种关系叫做两个角互为余角，即$\angle A$是$\angle B$的余角，$\angle B$也是$\angle A$的余角。直角所对的边 c 叫斜边，对锐角$\angle A$来讲，

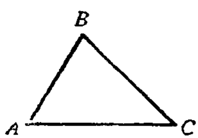


图 1　锐角三角形

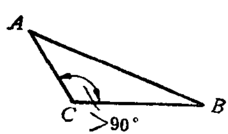


图 2　钝角三角形

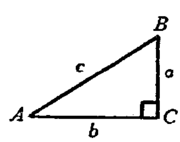


图 3　直角三角形

a 边叫做$\angle A$的对边，b 边叫做$\angle A$的邻边。但对$\angle B$来讲，a 边是$\angle B$的邻边，而 b 边是$\angle B$的对边。所以直角三角形中斜边这个名称是绝对的，不变的；而邻边和对边是相对的，变的。要先确定对哪一个锐角来讲，才能决定它是邻边还是对边。在三角函数计算中都要先找到这么一个直角三角形，然后在三角形中来找出三角函数的关系。

2 六种三角函数 三角函数有六种，它们的定义和公式如下表所示：

名称	代号	定义	函数通式	A角的函数公式(图3)	B角的函数公式(图3)
正弦	sin	对边和斜边之比	某角正弦 = $\frac{某角对边}{斜边}$	$\sin A=\frac{a}{c}$	$\sin B=\frac{b}{c}$
余弦	cos	邻边和斜边之比	某角余弦 = $\frac{某角邻边}{斜边}$	$\cos A=\frac{b}{c}$	$\cos B=\frac{a}{c}$
正切	tg (tan)	对边和邻边之比	某角正切 = $\frac{某角对边}{某角邻边}$	$\mathrm{tg} A=\frac{a}{b}$	$\mathrm{tg} B=\frac{b}{a}$
余切	ctg (cot)	邻边和对边之比	某角余切 = $\frac{某角邻边}{某角对边}$	$\mathrm{ctg} A=\frac{b}{a}$	$\mathrm{ctg} B=\frac{a}{b}$
正割	sec	斜边和邻边之比	某角正割 = $\frac{斜边}{某角邻边}$	$\sec A=\frac{c}{b}$	$\sec B=\frac{c}{a}$
余割	csc (cosec)	斜边和对边之比	某角余割 = $\frac{斜边}{某角对边}$	$\csc A=\frac{c}{a}$	$\csc B=\frac{c}{b}$

「函数」本身的意义就是「应变数」，它是随角度的变化而变化。正弦、正切和正割的函数值，随角度的增大而增大。但是应该指出，它不是和角度成正比例关系。也就是说，角度增加一倍，函数不是增加一倍。余弦、余切和余割的函数值是随角度的增大而减小的。同样也不是成反比例关系，也就是说角度增加一倍，函数值不是减小一倍。在 0°～90° 范围内各种函数值的变化情况如下表所示：

函　　　数	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\sec\alpha$	$\csc\alpha$
α从$0°\to 90°$函数的变化	$0\to 1$	$1\to 0$	$0\to\infty$	$\infty\to 0$	$1\to\infty$	$\infty\to 1$
函数值特点	永远小于1		各种数值都有		永远大于1	

注：表中先写的是0°的函数值，后写的是90°的函数值。符号∞表示无穷大。

函数的定义要牢牢记住，而且不能记错。这里应该注意两个问题：1）讲函数应该讲「某角」的函数，写成式子应该在函数代号后面写出「角的符号」，如「A角的正弦」或「$\sin A=\cdots\cdots$」才对。2）一定要在一个直角三角形中来写函数式子，否则就错了。以上六个函数常用的是前面四个，更应该记牢。记忆前面四个定义公式，我们提供以下几点方法：

（一）遇到斜边必然是「弦」（正弦或余弦），不涉及斜边必然是「切」（正切或余切）。

（二）「弦」（正弦或余弦）「斜边」总是在下（分母）。

（三）「正」（正弦或正切）的上面（分子）总是「对边」；

「余」（余弦或余切）的上面（分子）总是「邻边」。

（四）「切」总是由对边和邻边组成，如果对边在上，那末邻边在下，反之亦然。

归纳成口诀如下：

「弦」下是斜边，「切」应无斜边；

「正」上是对边，「余」上为邻边；

「切」对邻共存，一上另一下。

图示如下：

「正」上是对边 $\left\{ \text{正弦} = \dfrac{\searrow\text{对}}{\text{斜}\nwarrow} \right.$ ……「弦」下是斜边…… $\left. \text{余弦} = \dfrac{\text{邻}\swarrow}{\nearrow\text{斜}} \right\}$「余」上为邻边

正切 $= \dfrac{\searrow\text{对}}{\text{邻}\nwarrow}$ ……「切」对-邻共存…… 余切 $= \dfrac{\text{邻}\swarrow}{\nearrow\text{对}}$

一上另一下

3 函数的倒数关系 六个函数最常用的是前面四个。但实际上只要用前面三个就够了，因为后三个正好是前三个的倒数，可以互相对换。即：

$$
\text{倒数关系}\left\{\begin{array}{l}
\sin A=\dfrac{a}{c}=1/\csc A \\
\left(\begin{array}{l}
\cos A=\dfrac{b}{c}=1/\sec A \\
\left\{\begin{array}{l}
\operatorname{tg} A=\dfrac{a}{b}=1/\operatorname{ctg} A \\
\operatorname{ctg} A=\dfrac{b}{a}=1/\operatorname{tg} A
\end{array}\right. \\
\sec A=\dfrac{c}{b}=1/\cos A
\end{array}\right. \\
\csc A=\dfrac{c}{a}=1/\sin A
\end{array}\right.
$$

倒数关系也要记牢，至于如何应用倒数关系能使演算简便和准确，后面将要谈到。

4 三角函数表用法 三角函数计算的重要工具，是三角函数表。三角函数值随角度大小而变化的，用高等数学的方法把各种角度的三角函数计算出来列成表，就是三角函数表。应用它可以从角度查函数，也可以从函数查角度。

三角函数表的一般形式，上面标注的角度是0°～44°，左边从上而下标出分值0′～60′。因此查45°以下的函数时，就查着上面的函数名称（代号）及度数和左边的［分］数（45°即查44°60′）。若查45°以上的函数时，就查下面的函数名称（代号）及度数和右边自下而上的［分］数0′～60′。现在举例说明它的用法：

〔**例 1**〕 求 sin38°42′。

解：因为38°42′小于45°，所以在函数表上端查38°的一页

和左边 42′ 的一行，向右找到上端写有 sin 的一格内，读出函数值是 0.62524，所以 sin38°42′ = 0.62524。

〔例 2〕 求 tg53°15′。

解：因为 53°15′大于 45°，所以在函数表下端查 53° 的一页和右边 15′ 的一行，向左找到下端写有 tg 的一格内，读出函数值是 1.3392，所以 tg53°15′ = 1.3392。

〔例 3〕 已知cos α = 0.80715，求 α = ？

解：先在函数表上端注明cos的一栏内找函数值接近 0.80715 的，找到了最接近的是 0.80713。因为 cos 是在上端，所以看上端度数是 36° 和左边的［分］数是 11′，因此 α = 36°11′。

〔例 4〕 已知ctg α = 0.48664，求 α = ？

解：先在函数表上端注明ctg的一栏内找函数值接近 0.48664 的，但找遍了都找不到。这时我们就应该从表下端 ctg 一栏内找，结果找到了 0.48665，因为是按下端 ctg 来找，所以查看下端度数和右边［分］数得 α = 64°3′。

从这个例题我们发现从函数值找角度值时往往要走弯路，那么有没有办法不走弯路呢？有的，我们知道 45° 时六种三角函数的函数值如下：

sin45°	cos45°	tg45°	ctg45°	sec45°	csc45°
0.707		1		1.414	

正函数（正弦、正切、正割）大于表中数值时，余函数（余弦、余切、余割）小于表中数值时就要倒查三角函数表，例 4 中 ctg α = 0.48664 因为是余函数（余切）小于 1，所以应该倒查三角函数表。我们记住这个规律就可以避免走弯路。

选用的三角函数表最好是按［分］的连续数（1′，2′，3′……）

来排列的，查表方便而且准确●。但多数手册上所附的函数表，仅列出偶数[分](2′，4′，6′……)的函数值。使用这种函数表，当遇到查奇数[分]的函数或由函数查角度时，就应该采用插值法。也就是说，奇数分的函数可按相邻两个偶数分函数的平均值。现举例说明如下：

〔**例 5**〕 求 $\sin 38°7'$。

解：查函数表 $\sin 38°6' = 0.61703$，$\sin 38°8' = 0.61749$，

则 $$\sin 38°7' = \frac{0.61703 + 0.61749}{2} = 0.61726。$$

实际计算中只要把不同的尾数求平均数即可（即$\frac{03+49}{2} = \frac{52}{2} = 26$）。

〔**例 6**〕 已知 $\operatorname{tg}\alpha = 0.36759$，求 $\alpha = ?$

解：查函数表 $\operatorname{tg}20°10' = 0.36727$，$\operatorname{tg}20°12' = 0.36793$，用插值法得：

$\operatorname{tg}20°11' = 0.36760$，它和 0.36759 最接近，所以 $\alpha = 20°11'$。

〔**例 7**〕 已知 $\cos\alpha = 0.84283$，求 $\alpha = ?$

解：查函数表 $\cos 32°32' = 0.84308$，$\cos 32°34' = 0.84276$，而 0.84283 介于这两函数之间。用插值法得 $\cos 32°33' = 0.84292$，把 0.84283 和上面三个函数值相比较，结果它和 0.84276 最接近，所以 $\alpha = 32°34'$。从这个例子可以看出，虽然函数值介于 32′和 34′之间但不能肯定它是 33′，应该用插值法求出 33′ 的函数后进行比较以后才能确定。

● 机修手册《一般数据，技术准备，设备常用标准》一书及机工学校教材《数学用表》一书的三角函数表是按[分]的连续数来排列的，而且有六种三角函数使用较方便。

三　应用三角函数计算几何图形的一般方法

1 直角三角形和应用元素　以上讲过，三角函数计算一定要先找到直角三角形。在一个直角三角形中写出三角函数的式子一定包含有三个元素，这三个元素必然是一个角和两个边，这三个元素我们称它为应用元素。三个应用元素应该有两个是已知数，才能求算出另一个未知数。在简单计算中这未知数就是目的数。在复杂计算中，从第一个三角形求出的未知数可能作为第二个三角形的已知数，最后一个三角形求出的未知数才是目的数。或几个三角形求出的未知数通过计算得出目的数来。在一个三角形中要求算角，就必须已知两个边；要求算边就必须知道一角一边，这条原则应该记牢。

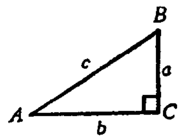


图 4　直角三角形

2 简单计算的类型和函数选择

（一）求角度——求算角度有两种类型：

1）已知一角求另一角。这种类型的计算只要运用两锐角互为余角的几何定理就可以求得。如 $A=90^\circ-B$，$B=90^\circ-A$（图 4）。

2）已知两边求角度。这种类型只要看这两个已知边对于目的角来讲是属于哪种函数，列出函数式子就可以算出角度值。如已知 a 和 b，那末从 $\mathrm{tg}\,A=\frac{a}{b}$ 或 $\mathrm{ctg}\,A=\frac{b}{a}$ 中求得 A 角，由 $\mathrm{tg}\,B=\frac{b}{a}$ 或 $\mathrm{ctg}\,B=\frac{a}{b}$ 中求得 B 角。又如已知 a 和 c，则从

$\sin A=\frac{a}{c}$或$\csc A=\frac{c}{a}$中求得A角，由$\cos B=\frac{a}{c}$或$\sec B=\frac{c}{a}$中求得B角。

（二）求边长——求边长也有以下两种类型：

1）已知一边一角求另一边。这种类型的计算，要看已知边和目的边对已知角来讲是属于哪种函数，然后列出函数式子来求解。如图4中已知a边和$\angle B$，若要求c，则$\frac{a}{c}=\cos B$，于是$c=\frac{a}{\cos B}$。若要求b，则$\frac{b}{a}=\operatorname{tg} B$，于是$b=a\operatorname{tg} B$。

2）已知两边求另一边。这种类型的计算有两种方法，一种是应用几何的勾股弦定理$c^2=a^2+b^2$求算另一边，这种方法将在L活叶门——《工厂常用几何计算法》一书中去谈；第二种方法是应用三角函数来计算。上面谈过，求边长必须知道一边一角，可是现在只知道两个边，角未知。在这种条件下，可以用上面讲的方法先求角，求出角度后，问题就简化为已知一边一角求算另一边的问题，这问题的算法上面已经谈过了。所以已知二边求另一边，实质上是求角度和求边长两个问题的综合计算问题。

因此，三角计算的所有问题都可以归纳为两种类型：1）已知一角一边求另一边；2）已知两边求角度。掌握了这两种计算方法，其他复杂问题都不过是这两个问题组合而成的计算问题。

（三）函数的选择和代换——函数的选择有两种意义：一种是根据应用元素（两边一角）中两个边的比，对某个角来讲是属于什么函数就选择什么函数。另一种意义是从演算便利出发，来选择函数或代换函数，使演算简单而且准确。如下面两种情况：

1）当求边长时，式子中的分母含有函数值，应该根据倒数关系代换函数，以消灭分母中的函数。如$c=a/\sin A=a\csc A$，

$c = b/\cos A = b\sec A$， $b = a/\mathrm{tg}\,A = a\,\mathrm{ctg}\,A$等是。

2）当求角度时，式子中分母位数多于分子，应该根据倒数关系代换函数。如求螺旋角公式$\mathrm{tg}\,\lambda = \frac{t}{\pi d} = \frac{1}{3.1416\times 8}$（图 28），如果要改成$\mathrm{ctg}\,\lambda = \frac{\pi d}{t} = \frac{3.1416\times 8}{1}$计算起来就简便得多。又如求圆锥体斜角公式$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{D-d}{2l} = \frac{50-48}{2\times 74} = \frac{2}{2\times 74} = \frac{1}{74}$（图 19），可改为$\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{2l}{D-d} = 74$；又如已知斜度 1:30 求算斜角公式$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{1}{30}$，可改为$\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{30}{1} = 30$，计算既简便，误差又小。

3 怎样找直角三角形 三角计算中的关键问题，在于怎样找出直角三角形。各种不同的几何形状找出直角三角形的方法是各式各样的。现成的直角三角形是不多的，多数总要通过画辅助线的办法来得到。如画平行线、垂直线、分角线、对角线和切线等而得到直角三角形。要找得快找得正确，就必须多练习，逐步积累出经验来。但一般来说，也可以归纳为以下几种类型：

（一）应用元素自然组成直角三角形——如图 5 所示，已知正方形边长 a，求算对角线长度 c，则 a 和 c 自然组成直角三角形 ABC,而且应用元素（已知边 a 和已知角 45° 和求算的目的数 c）就包括在这个直角三角形内。又如图 6 的燕尾槽镶条，已知

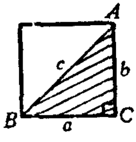


图 5　正方形

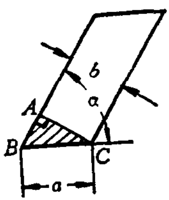


图 6　燕尾槽镶条

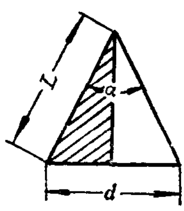


图 7　等腰三角形

宽度a和角度α，要求法向厚度b，则a、b和α自然组成一个直角三角形。

（二）平分对称图形得到直角三角形——如图7是一个对称图形，已知d和L，要求锥角α。如果从顶点画一条垂直平分线，平分这对称图形就得到一个直角三角形来。它包括有应用元素$\left(\text{已知数} L,\ \frac{d}{2}\text{和未知数}\frac{\alpha}{2}\right)$。显然，平分对称图形也就会平分已知数或未知数。又如图8的正六角形，已知边长S和角度α $\left(\alpha=\frac{360^\circ}{6}=60^\circ\right)$，要求外接圆半径$R$。因为局部几何形$ABO$不是直角三角形，而是一个对称图形。我们同样可以平分它得到一个直角三角形。已知数$\frac{S}{2}$、$\frac{\alpha}{2}$和未知数R组成了这个三角形的应用元素。

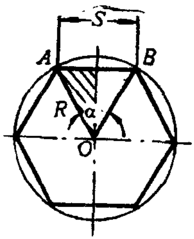


图8　正六角形

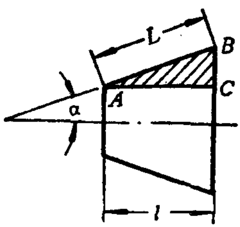


图9　截锥体

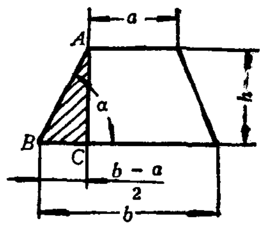


图10　等腰梯形

（三）画已知边或未知边的平行线得到直角三角形——如图9所示，已知高l、斜高L，求斜角α。如果从A点画已知边l的平行线AC，就得到直角三角形ABC。$\angle BAC=\alpha$，所以已知数l和L及未知数α组成了这三角形的应用元素。

（四）画辅助线简化未知数或已知数得到直角三角形——如图10所示，已知a、b和h，求α角。因三个数a、b和h不

是组成直角三角形，而是一个等腰梯形。如果我们画辅助线简化已知数，即过A作垂直线AC，就得到直角三角形ABC。但这三角形只有一个已知数h和未知数α，还缺一个已知边。这里我们把已知数简化而使它得到一个已知边$BC=\frac{1}{2}(b-a)$，这样三角形中应用元素就齐了。由此可见，已知数或未知数往往要通过简化后才能组成三角形的应用元素。

（五）圆（圆弧）的切线和半径组成直角三角形——凡是遇到有圆或圆弧组成的图形，可以应用切线和过切点的半径相垂直的几何定理，把切线和切点处半径联成直角三角形。如图 11 所示，已知S和R，求算α。则联切点处半径OB组成直角三角形ABO。已知边R、S和目的数α角组成应用元素。

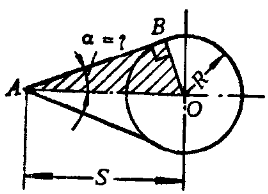


图11　切线和圆组成的图形

以上五种找直角三角形的方法是典型的例子，实际机械零件的几何图形往往比这些图形复杂。但是，一般来说都可以应用以上典型方法来求出直角三角形，或由以上几种方法的组合来找出直角三角形。

四　工厂常见的三角计算实例

1 正方形对角线和边长互算法　如图 12 的正方形，边长S和对角线长（即外接圆直径）D直接组成直角三角形ABC。因为等边($AB=BC$)，所以等角$\angle CAB=\angle ACB=45^\circ$，则$\frac{S}{D}=\sin 45^\circ$，故得：

$$S = D\sin 45^\circ$$
$$= 0.707D \qquad (1)$$
$$D = S/\sin 45^\circ$$
$$= S\csc 45^\circ$$
$$= 1.414S \qquad (2)$$

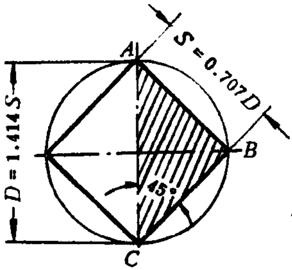


图12　正方形

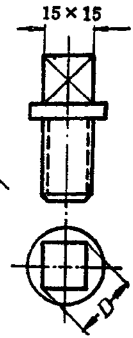


图13　方头螺钉

〔**例 8**〕 一车工车削一个工件（图 13），上端是正方形的，图纸注明边长15，问车工该车出多大的圆柱以后才能铣成 15×15 的正方形？

解：这是求对角线长，用公式（2）：

$$D = 1.414S = 1.414 \times 15 = 21.21\text{毫米。}$$

〔**例 9**〕 一位钳工把一根直径 12 毫米的圆钢锉成正方形，问最大的边长可能是多少？

解：用公式（1）：

$$S = 0.707D = 0.707 \times 12 = 8.48\text{毫米。}$$

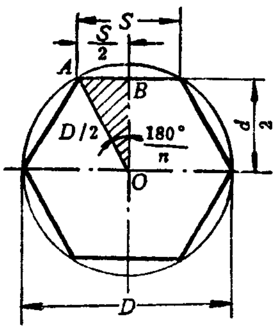


图14　正多角形

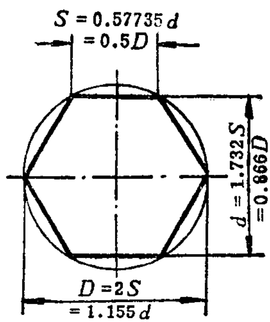


图15　正六角形