世界数学名题欣赏

连续统假设

辽宁教育出版社

世界数学名题欣赏丛书

连续统假设

张锦文
王雪生 著

辽宁教育出版社

连续统假设

张锦文 王雪生 著

辽宁教育出版社出版 辽宁省新华书店发行
(沈阳市南京街6段1里2号) 丹 东 印 刷 厂 印 刷

字数:126,000 开本:$787\times1092\,^1/_{32}$ 印张:9 插页:4
印数:1,001—3,500
1989年4月第1版 1989年11月第2次印刷

责任编辑:俞晓群 谭 坚 责任校对:王淑芬
封面设计:安今生

ISBN 7-5382-0436-9/G·445
定 价:3.30 元

世界数学名题
欣赏丛书

费马猜想
黎曼猜想
连续统假设
希尔伯特第十问题
欧几里得第五公设
哥德尔不完全性定理
不动点定理
无处可微的连续函数
科克曼女生问题
斐波那契数列
哥德巴赫猜想
置换多项式及其应用
素数判定与大数分解

作者简介

张锦文(左)，1930年生于河南辉县，1959年毕业于北京大学数力系数学专业数理逻辑专门化，现任中国科学院软件研究所副研究员。著作有《集合论与连续统假设浅说》(上海教育出版社，1980)《集合论浅说》(科学出版社，1984)《集合论学习手册》(中央广播电视大学出版社，1984)《布尔代数》(与廖祖纬合著，科学出版社，1984)《离散数学导论》(与沈瑞民合著，天津科学技术出版社，1986)等，70余万字。论文37篇，约21万字。主要从事公理集合论与智能逻辑的研究工作。

王雪生，1934年生于河南灵宝，1956年毕业于新乡师范学院数学系，现任河南师范大学数学副教授。已发表论文5篇，从事数学教学工作。

内 容 简 介

本书是“世界数学名题欣赏丛书”之一。连续统假设是19世纪数学家康托尔提出的一个著名的数学问题。这一问题的提出，对整个数学领域产生了深远的影响。1900年，在巴黎数学家大会上，希尔伯特把连续统假设列为著名演讲《数学问题》中的第一个问题，并盛赞它的重要作用。因此，人们又把它称为“希尔伯特第一问题”。本书采取历史叙述、夹叙夹议的手法，回顾了连续统假设产生的历史渊源，介绍了有关知识，以及它在数学领域中的地位、作用和意义。全书思想性强，兼有较高的学习价值和科学欣赏价值。

Summary

This book is one of "A Series of Appreciation of Mathematical Topics in World". Since continuum hypothesis a famous mathematical problem was pointed by mathematician G. Cantor, tremendous influence in mathematics has happened. In 1900 Hilbert posed the continuum hypothesis as the first problem in his famous report "Mathematical Problems" at the Conference of Mathematician in Paris and praised its important functions. Hence people also call it "Hilbert's first problem".

In this book, we review the historic origin of the occurence of continuum hypothesis and introduce related knowledge and its situation, functions and significance in mathematics by means of historic statements, description and discussion one after another. This book is worth studying and scientific appreciating because it has strict logicality and is varied and interesting.

序

数学中重大的难题的提出与解决，常常是数学发展的里程碑。连续统假设是当代数学中最困难最著名的问题之一，它同其它数学难题一样，是数学发展中的必然产物，这一问题已有一百多年的历史了，虽然已取得重大的进展，然而至今尚未解决。连续统问题同其它数学难题的不同在于它更基本、更广阔。所谓更基本表现在两点上，它是直线上点有多少的问题；它来源于号称数学基础的集合论，数学是无穷的数学，你承认实无穷总体吗？若是，必然产生连续统问题。所谓更广阔的含义：一是连续统来源于物理与几何这样广阔的领域，对此，爱因斯坦、希尔伯特都有过论述；二是连续统假设涉及到现代数学的许多分支，涉及到数百个数学问题的真伪性问题，其中也有广义连续统假设蕴涵选择公理，而后者几

乎涉及一切数学分支以及其中许多著名问题；三是在研究连续统假设的过程中，人们创造了可构成法、力迫法这样强有力的科学方法，它们在许多领域内有了重要的应用，促使若干长期悬而未决的问题取得了重大进展。正因为如此，就决定了本书的基本内容。

本书第一章考察康托尔之前的二千多年内（古代中国与古代希腊以及近代欧洲）的数学家、哲学家关于无穷的论述，从而说明康托尔数学思想的革命性和集合论创立的历史必然性；这也是对连续统假设的历史背景所作的说明。第二、三章概述康托尔的理论，从而可以较准确地弄清连续统假设的含义。第四章阐述连续统假设的确切定义、意义、等价命题及其若干推论。第五章阐述蔻尼定理及其对连续统假设的结论。第六章着重阐述著名的数学思想家罗素的逻辑类型论和他对连续统假设的论述。逻辑类型论对于连续统假设、集合论乃至整个数学的进展都有值得注意影响。第七章概述希尔伯特方案，这一方案的目的在于保卫古典数学，保卫人们研究实无穷的权利和已取得的丰硕成果。它阐述的形式数学、直观数学及它们的相互联系正是当今研究集合论基地。第八章概述由蔡梅罗首先创立后经弗兰克

尔、斯科伦改进的集合论公理系统 ZF.第九章概述哥德尔关于连续统假设相对于 ZF 公理系统的协调性证明。第九章简要说明科恩的相对独立性证明，直观地说明这一证明中的主要方法——力迫法与脱殊集合，这些概念都涉及到形式系统的本质。最后，第十一章，我们详细论述连续统假设还是一大难题，而这一观点是哥德尔在科恩结果的十五年前就已经预见到和论述过的。我们详细地引证了哥德尔的这些深刻的观点，借以说明连续统假设仍然是数学中特别是集合论中的中心问题之一，以及解决它的过程必将促进公理集合论的重大发展，创造新的方法，获得新的公理。

在连续统假设的史前，围绕肯定实无穷与否定实无穷的争论中，在现代数学开拓者康托尔提出连续统假设后，围绕连续统假设意义的论述中，以及在它的研究发展中都有一批著名数学家、逻辑学家和数学思想家论及这一问题，有的对于连续统假设的研究作出重大贡献。对于他们的思想，本书力图作出科学的说明，我们概述了亚里士多德、伽利略、高斯、波尔查诺、维尔斯特拉斯、戴德金等人的主要观点；着重阐述了著名数学思想家希尔伯特、罗素、蔡梅罗和哥德尔的思想、方法和影响，特别是亚里士多德后的最

伟大的逻辑学家哥德尔的思想，我们力争作出详细的阐述。

我曾在文献〔2〕中通俗地说明连续统假设相对于通常的集合论公理系统的不可判定性结果，并着重说明用现有的工具（通常的集合论公理系统与方法）是不足以解决该问题的真伪性问题的，正如用圆规直尺不足以解决三等分任意角一样。近几年内仍然有一些朋友从不同的角度给出了连续统假设的“证明”或“否证”，甚至宣布他已给出“连续统假设的证明”、或者宣布他已给出“否证连续统假设的证明”。而这些“证明”所使用的方法都没有超出现有的工具，当然，这些都是不能成立的。对于那些愿为连续统问题作出贡献的朋友，我恳切地希望他们能认真地分析一下这一问题的来龙去脉，透彻地了解它的进展，特别是在这些进展中、在取得这些进展所使用的方法中所蕴涵着的思想、观点和方法。在已有的基础上创立超出原有的工具并胜任解决这一问题的新工具，只有这样才有解决这一问题的可能。众所周知，连续统问题是深刻的，它的意义是深远的，解决它要付出巨大的努力，正如希尔伯特在《数学问题》一文中所说，“某类问题对于一般数学进展的深远意义以及它们在研究者个

人的工作中所起的重要作用是不可否认的。只要一门科学分支能提出大量的问题，它就充满着生命力；而问题缺乏则预示独立发展的衰亡或中止。正如人类的每项事业都追求确定的目标一样，数学研究也需要自己的问题。正是通过这些问题的解决，研究者锻炼其钢铁般的意志和力量，发现新方法和新观点，达到更为广阔的自由的境界”。连续统问题已经历了一百多年了，虽然没有解决，但是已经取得了若干重大进展。我们相信，人类终归要解决它的，人们期待着它的早日解决，在解决它的过程中必将发现新公理、新方法，必将创造新方法，使人类达到更广阔、更自由的境界。

限于水平，错误之处在所难免，欢迎批评指正。

张锦文

1986年8月16日

目　录

序