



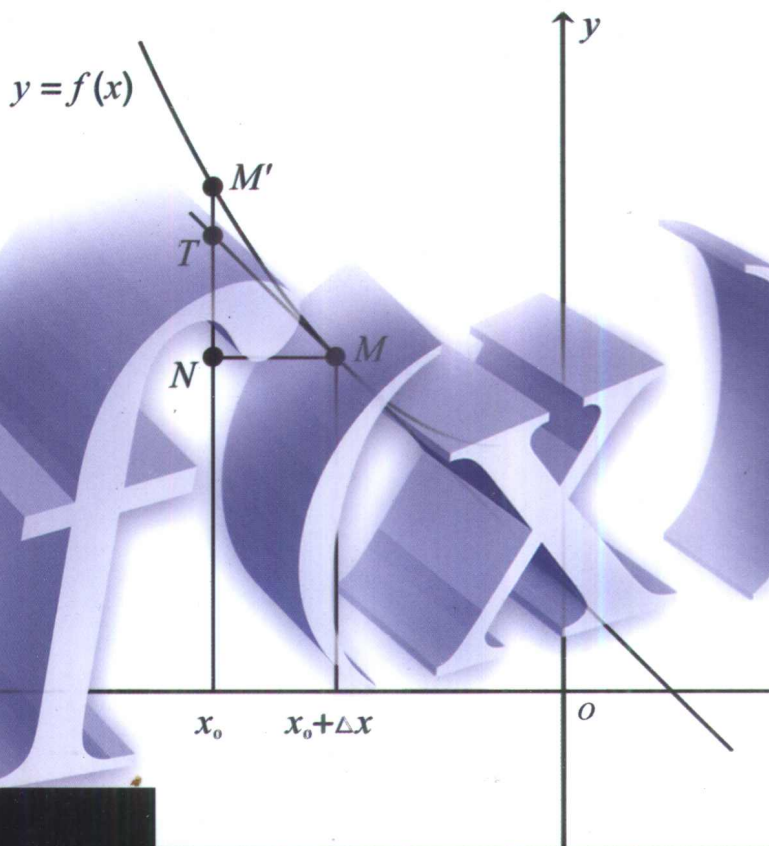
电子·教育

高职高专计算机系列教材

中国计算机学会高职高专教育学组推荐出版

高等数学解题方法与同步训练

钱椿林 邬枫 汪军 编著



558

013.00
042

高职高专计算机系列教材

高等数学解题方法与同步训练

钱椿林 邬 枫 汪 军 编著



A0976117

电子工业出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京·BEIJING

内 容 简 介

本书是普通高等教育“十五”国家级规划教材《高等数学》的配套学习辅导用书。

全书共分14章,内容包括函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用、常微分方程、空间解析几何与向量、多元函数微分学、多元函数积分学、无穷级数、矩阵等。各章均由学习要求、内容提要、主要解题方法和同步训练题组成。本书对主教材中的基本概念、基本理论、基本方法等进行了简要的归纳和提炼,并逐章列出重点和难点。针对高职高专工科类专业的特点,本书在选材和编排上着眼于基础训练的强化,突出解题的思路和方法指导,并对解题的步骤和思路进行适当的归纳,以提高读者分析问题和解决问题的能力。

本书可作为高等职业技术学院、高等专科学校、成人高校和本科院校开办的二级职业技术学院工科各专业学习“高等数学”课程的辅导用书,也可供从事本课程教学的教师参考。

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有,侵权必究。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学解题方法与同步训练/钱椿林等编著. —北京:电子工业出版社,2002.8

高职高专计算机系列教材

ISBN 7-5053-7578-4

I. 高… II. 钱… III. 高等数学—高等学校:技术学校—教材 IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 059877 号

责任编辑:张孟玮 特约编辑:胡国清

印 刷:北京天竺颖华印刷厂

出版发行:电子工业出版社 <http://www.phei.com.cn>

北京市海淀区万寿路173信箱 邮编100036

经 销:各地新华书店

开 本:787×1092 1/16 印张:10.25 字数:262千字

版 次:2002年8月第1版 2002年8月第1次印刷

印 数:5000册 定价:13.00元

凡购买电子工业出版社的图书,如有缺损问题,请向购买书店调换。若书店售缺,请与本社发行部联系。
联系电话:(010) 68279077

出版说明

高职高专的计算机专业面临着两方面的巨大变化,一是计算机技术的飞速发展,另一方面是高职高专教育本身的改革和重组。

当前,计算机技术正经历着高速度、多媒体网络化的发展,计算机教育特别是计算机专业的教材建设必须适应这种日新月异的形势,才能培养出不同层次的合格的计算机技术专业人才。为了适应这种变化,国内外都在对计算机教育进行深入的研究和改革。美国 IEEE 和 ACM 在推出了《Computing Curricula 2000》之后,立即又推出了《Computing Curricula 2001》。全国高校计算机专业教学指导委员会和中国计算机学会教育委员会在 1999 年 9 月也提出了高等院校《计算机学科教学计划 2000》(征求意见稿)。目前,国内许多院校老师、专家正在研究《Computing Curricula 2001》,着手 21 世纪的中国计算机教育的改革。

高专层次和本科层次的计算机教育既有联系又有区别,高专层次的计算机教育旨在培养应用型人才。自 20 世纪 70 年代末高等专科学校计算机专业相继成立以来,高等专科学校积极探索具有自己特色的教学计划和配套教材。1985 年,在原电子工业部的支持下,由全国数十所高等专科学校参加成立了中国计算机学会教育委员会大专教育学组,之后又成立了大专计算机教材编委会。从 1986 年到 1999 年,在各校老师的共同努力下,已相继完成了三轮高等专科计算机教材的规划与出版工作,共出版了 78 种必修课、选修课、实验课教材,较好地解决了高专层次计算机专业的教材需求。

为了适应计算机技术的飞速发展以及高职高专计算机教育形势发展的需要,中国计算机学会教育委员会高职高专教育学组和高职高专计算机教材编委会于 2000 年 7 月开始,又组织了一批本科高校、高等专科学校、高等职业技术学院和成人教育高等院校的有教学经验的老师,学习研究参考了高等院校《计算机学科教学计划 2000》(征求意见稿),提出了按照新的计算机教育计划和教学改革的要求,编写高专、高职、成人高等教育三教统筹的第四轮教材。

第四轮教材的编写工作采取了以招标的方式征求每门课程的编写大纲和主编,要求投标老师详细说明课程改革的思路、本课程和相关课程的联系、重点和难点的处理等。在第四轮教材的编写过程中,编委会强调加强实践环节、强调三教统筹、强调理论够用为度的原则,要求教学计划、教学内容适应高等教育发展的新形势。本套教材的编者均为各院校具有丰富教学实践经验的教师。因此,第四轮教材的特点是体系结构比较合理、内容新颖、概念清晰、通俗易懂、理论联系实际、实用性强。

竭诚希望广大师生对本套教材提出批评建议。

中国计算机学会教育委员会高职高专教育学组

2001 年 1 月

先后参加中国计算机学会教育委员会高职高专教育学组和高职高专计算机教材编委会学术活动的部分学校名单

山西师范大学	天津轻工业学院
河北师范大学	浙江大学
承德石油高等专科学校	宁波高等专科学校
河北大学	福州大学
保定职业技术学院	重庆电子职业技术学院
北京科技大学	湖南大学
北京市机械工业管理局职工大学	湖南计算机高等专科学校
北方工业大学	中国保险管理干部学院
北京船舶工业管理干部学院	湖南税务高等专科学校
海淀走读大学	长沙大学
北京信息工程学院	湖南财经高等专科学校
中国人民大学	邵阳高等专科学校
北京师范大学	江汉大学
沈阳电力高等专科学校	中国地质大学
辽宁交通高等专科学校	武汉职业技术学院
吉林大学	河南职业技术学院
吉林职业师范学院	平原大学
黑龙江大学	安阳大学
哈尔滨工业大学	开封大学
哈尔滨师范大学	洛阳大学
上海理工大学	河南大学
上海第二工业大学	广州市财贸管理干部学院
上海交通大学	广东轻工职业技术学院
上海商业职业技术学院	广州航海高等专科学校
上海电机技术高等专科学校	韶关大学
上海旅游高等专科学校	佛山科学技术学院
金陵职业大学	南宁职业技术学院
南京建筑工程学院	广西水利电力职业技术学院
南京工程学院	桂林电子工业学院
南京师范大学	柳州职业技术学院
常州工学院	成都电子机械高等专科学校
无锡职业技术学院	电子科技大学
苏州市职工大学	成都师范高等专科学校
空军后勤学院	四川师范学院
连云港化工高等专科学校	云南财贸学院
泰州职业技术学院	西安电子科技大学
潍坊高等专科学校	兰州石化职业技术学院
青岛化工学院	兰州师范高等专科学校

前 言

“高等数学”是工科类专业必修的基础课。它在科学研究、工程技术、国民经济等诸多领域都有广泛的应用,其重要性是不言而喻的。

“高等数学”作为工科类专业的重要基础课,由于概念抽象、推理独特、方法灵活、计算繁琐等原因,初学者往往面临着课程难学、规律难循、习题难做、表述难全的困境,对于高职高专学生尤其如此。本书作为普通高等教育“十五”国家级规划教材《高等数学》的配套学习辅导用书,正是针对普遍存在的“四难”而编写的,其总体思路是:全书在对主教材中的“三基”内容进行简要归纳的基础上,为读者梳理头绪,揭示重点,剖析难点;遵循工科类专业的特点,注意现代数学思想的渗透以及与实践的结合;强化基础训练,突出解题分析和方法指导,并对解题的步骤和思路进行适当的归纳。

为了便于阅读,本书章序及其内容叙述、解题方法、记号等,与主教材基本一致。

全书各章均由学习要求、内容提要、主要解题方法和同步训练题等四部分组成。

学习要求:首先明确各章的基本要求,然后指出学习的重点、难点,以便读者心中有数,把握学习主动权。

内容提要:从各章的“三基”出发,就其要点进行归纳提炼,必要时列表给出,从而帮助读者及早了解各章概貌,并为全面掌握课程内容提供方便。

主要解题方法:主要介绍各章最基本的解题方法,同时介绍一些常用的技巧和计算方法,以便学生熟练掌握本课程的中心内容,倡导一题多解,从多方面训练和培养学生分析问题和解决问题的能力。

同步训练题:为读者精选了难易适中且与各章“三基”有关的习题,书末逐一给出了答案或提示供参考,独立完成这些习题,可以起到举一反三、巩固提高的作用。

由于例题求解及完成同步训练题所需的知识大体上可在本书各章的主要内容中找到,因此本书也可单独使用。

本书由钱椿林主编,参编人员为邬枫(第2章至第5章)、汪军(第6章至第11章)、钱椿林(第1章及第12章至第14章)。全书由钱椿林修改并定稿。

在编写本书的过程中,俞泳薇副教授、马叔良副教授、赵一鸣副教授、王平一副教授、徐遵副教授提出了许多宝贵的建议;陈洁、田立炎、周良英、龚奇敏、肖群华、吴平、黄振明、李平、葛翔和张晶老师做了大量的资料收集和整理工作;黄萍、张健、马铎骏、朱学芳和朱学娟老师做了大量文字、公式和图表的校对工作;戈扬和凌霞老师在电脑制作方面花费了大量的时间与精力;电子工业出版社张孟玮老师对本书的编写、构思提出了有益的建议,对本书的编写工作给予了热情的支持,在此一并致谢。

本书由上海水产大学王英华教授主审。对于王教授认真细致的工作,编者表示衷心的感谢。

由于编者水平有限,书中难免有不当或疏漏之处,恳请读者批评赐教。

编 者

2002年5月于苏州

目 录

第1章 绪论	(1)
第2章 函数	(3)
2.1 学习要求	(3)
2.2 内容提要	(3)
2.2.1 函数	(3)
2.2.2 函数的四种特性	(4)
2.2.3 基本初等函数	(4)
2.2.4 常见的几种函数	(5)
2.3 主要解题方法	(5)
2.3.1 求函数定义域的方法	(5)
2.3.2 判断两个函数是否相同的方法	(6)
2.3.3 判断函数奇偶性的方法	(6)
2.3.4 将函数分解成基本初等函数或简单函数的方法	(7)
2.3.5 建立实际问题的函数模型的方法	(7)
2.4 同步训练题	(8)
第3章 极限与连续	(9)
3.1 学习要求	(9)
3.2 内容提要	(9)
3.2.1 数列极限	(9)
3.2.2 函数极限	(9)
3.2.3 极限的性质	(11)
3.2.4 极限的四则运算法则	(11)
3.2.5 两个重要极限	(11)
3.2.6 无穷小量与无穷大量	(11)
3.2.7 无穷小量的运算	(12)
3.2.8 函数的连续性	(12)
3.3 主要解题方法	(14)
3.3.1 求数列极限的方法	(14)
3.3.2 求函数极限的方法	(15)
3.3.3 求分段函数在分段点处的极限的方法	(17)
3.3.4 利用已知极限求未知函数的方法	(18)
3.3.5 判断函数的连续性的方法	(18)
3.4 同步训练题	(19)
第4章 导数与微分	(21)
4.1 学习要求	(21)

4.2	内容提要	(21)
4.2.1	导数的概念	(21)
4.2.2	曲线的切线	(22)
4.2.3	变化率	(22)
4.2.4	可导与连续的关系	(22)
4.2.5	高阶导数	(22)
4.2.6	微分与线性主部	(22)
4.2.7	求导公式与法则,微分公式与法则	(22)
4.2.8	微分近似公式	(22)
4.3	主要解题方法	(24)
4.3.1	利用导数定义求导数的方法	(24)
4.3.2	利用导数定义讨论函数的连续性与可导性的方法	(24)
4.3.3	求显函数的导数的方法	(24)
4.3.4	求隐函数的导数的方法	(26)
4.3.5	求由参数方程所表示的函数的导数的方法	(26)
4.3.6	求函数的微分的方法	(26)
4.3.7	求函数的高阶导数的方法	(27)
4.4	同步训练题	(27)
第5章	导数的应用	(29)
5.1	学习要求	(29)
5.2	内容提要	(29)
5.2.1	罗尔中值定理、拉格朗日中值定理与柯西中值定理	(29)
5.2.2	洛必达法则	(30)
5.2.3	函数的单调性定理	(30)
5.2.4	函数的极值、极值点与驻点	(30)
5.2.5	函数的最大值与最小值	(31)
5.2.6	函数图形的下凸、上凸与拐点	(31)
5.2.7	曲线的水平渐近线、垂直渐近线与渐近线	(31)
5.3	主要解题方法	(31)
5.3.1	用洛必达法则求未定式的极限的方法	(31)
5.3.2	求函数的单调区间与极值的方法	(32)
5.3.3	利用函数的单调性来证明不等式的方法	(33)
5.3.4	求函数的最大值与最小值的方法	(34)
5.3.5	求实际问题的最大值、最小值的方法	(34)
5.3.6	求曲线的拐点及凸向区间的方法	(35)
5.3.7	求曲线的渐近线的方法	(35)
5.3.8	一元函数图形的描绘方法	(35)
5.4	同步训练题	(36)
第6章	不定积分	(38)
6.1	学习要求	(38)

6.2	内容提要	(38)
6.2.1	原函数与不定积分	(38)
6.2.2	不定积分的基本积分公式	(39)
6.2.3	不定积分的性质	(39)
6.2.4	分部积分公式	(39)
6.3	主要解题方法	(39)
6.3.1	直接积分法	(39)
6.3.2	第一换元积分法(凑微分法)	(40)
6.3.3	第二换元积分法	(41)
6.3.4	分部积分法	(42)
6.4	同步训练题	(44)
第7章	定积分	(45)
7.1	学习要求	(45)
7.2	内容提要	(45)
7.2.1	曲边梯形	(45)
7.2.2	定积分的概念与定积分的几何意义	(45)
7.2.3	定积分的性质	(46)
7.2.4	变上限的定积分	(47)
7.2.5	无穷区间上的广义积分	(47)
7.2.6	微积分基本定理(牛顿-莱布尼兹公式)	(47)
7.2.7	定积分的计算	(48)
7.3	主要解题方法	(48)
7.3.1	变上限的定积分对上限的求导方法	(48)
7.3.2	利用换元积分法计算定积分的方法	(49)
7.3.3	利用分部积分法计算定积分的方法	(49)
7.3.4	利用函数的奇偶性计算定积分的方法	(51)
7.3.5	无穷区间上的广义积分的计算方法	(51)
7.4	同步训练题	(52)
第8章	定积分的应用	(53)
8.1	学习要求	(53)
8.2	内容提要	(53)
8.2.1	定积分的微元法	(53)
8.2.2	面积微元与体积微元	(53)
8.2.3	弧微元与平面曲线弧微分公式	(54)
8.3	主要解题方法	(54)
8.3.1	求平面图形的面积的方法	(54)
8.3.2	求旋转体的体积的方法	(56)
8.3.3	求曲线的弧长的方法	(56)
8.3.4	求变力所做的功的方法	(56)
8.3.5	求液体的侧压力的方法	(57)

8.4	同步训练题	(57)
第9章	常微分方程	(59)
9.1	学习要求	(59)
9.2	内容提要	(59)
9.2.1	微分方程	(59)
9.2.2	常微分方程	(59)
9.2.3	微分方程的阶、解与通解	(59)
9.2.4	初始条件与特解	(59)
9.2.5	线性相关与线性无关	(60)
9.2.6	可分离变量的微分方程	(60)
9.2.7	线性微分方程	(60)
9.2.8	二阶常系数齐次线性微分方程	(60)
9.2.9	二阶常系数非齐次线性微分方程	(61)
9.2.10	二阶线性微分方程解的结构	(61)
9.2.11	二阶常系数齐次线性微分方程的特征方程与特征根	(61)
9.3	主要解题方法	(61)
9.3.1	一阶微分方程的可分离变量法	(61)
9.3.2	一阶线性微分方程的常数变易法	(62)
9.3.3	高阶微分方程的降阶法	(64)
9.3.4	常系数齐次线性微分方程的特征方程法	(64)
9.3.5	常系数非齐次线性微分方程的待定系数法	(65)
9.3.6	用微分方程解决实际问题的举例	(67)
9.4	同步训练题	(69)
第10章	空间解析几何与向量	(71)
10.1	学习要求	(71)
10.2	内容提要	(71)
10.2.1	空间直角坐标系	(71)
10.2.2	向量	(72)
10.2.3	向量的模与单位向量	(72)
10.2.4	自由向量与向径	(72)
10.2.5	向量的线性运算	(72)
10.2.6	向量的坐标	(73)
10.2.7	两点间距离公式	(74)
10.2.8	向量的方向余弦	(74)
10.2.9	向量的数量积与向量积	(74)
10.2.10	平面方程	(75)
10.2.11	直线方程	(76)
10.2.12	曲面方程	(77)
10.2.13	柱面	(77)
10.2.14	旋转曲面	(78)

10.2.15	二次曲面	(78)
10.2.16	空间曲线在坐标面上的投影	(79)
10.3	主要解题方法	(79)
10.3.1	向量的运算	(79)
10.3.2	利用向量运算建立平面方程或直线方程的方法	(80)
10.3.3	求空间曲线在坐标面上的投影的方法	(82)
10.4	同步训练题	(83)
第11章	多元函数微分学	(85)
11.1	学习要求	(85)
11.2	内容提要	(85)
11.2.1	二元函数	(85)
11.2.2	二元函数的几何意义	(85)
11.2.3	二元函数的极限与连续	(85)
11.2.4	偏导数的定义	(86)
11.2.5	高阶偏导数	(87)
11.2.6	复合函数求偏导数的公式	(87)
11.2.7	全微分	(88)
11.2.8	隐函数的微分法	(88)
11.2.9	曲线的切线和法平面方程及曲面的切平面和法线方程	(89)
11.2.10	二元函数的极值与驻点	(90)
11.2.11	条件极值与拉格朗日乘数法	(90)
11.3	主要解题方法	(91)
11.3.1	求二元函数的定义域的方法	(91)
11.3.2	求多元函数的偏导数的方法	(91)
11.3.3	利用公式求隐函数的导数或偏导数的方法	(92)
11.3.4	偏导数的应用	(92)
11.4	同步训练题	(96)
第12章	多元函数积分学	(98)
12.1	学习要求	(98)
12.2	内容提要	(98)
12.2.1	二重积分及其几何意义	(98)
12.2.2	二重积分的性质	(98)
12.2.3	对坐标的曲线积分	(99)
12.2.4	对坐标的曲线积分的性质	(99)
12.2.5	曲线积分与路径无关	(99)
12.2.6	格林定理	(100)
12.2.7	曲线积分与路径无关的定理	(100)
12.3	主要解题方法	(100)
12.3.1	在直角坐标系下二重积分的计算方法	(100)
12.3.2	在直角坐标系下二重积分的交换积分次序的方法	(103)

12.3.3	在极坐标系下二重积分的计算方法	(104)
12.3.4	对坐标的曲线积分的计算方法	(105)
12.4	同步训练题	(107)
第13章	无穷级数	(109)
13.1	学习要求	(109)
13.2	内容提要	(109)
13.2.1	数项级数	(109)
13.2.2	前 n 项部分和与部分和数列	(110)
13.2.3	级数的收敛、发散与级数和	(110)
13.2.4	数项级数的性质	(110)
13.2.5	正项级数及其收敛判别法	(110)
13.2.6	交错级数与莱布尼兹判别法	(111)
13.2.7	绝对收敛与条件收敛	(111)
13.2.8	两个重要级数	(111)
13.2.9	幂级数	(112)
13.2.10	泰勒级数与麦克劳林级数	(113)
13.2.11	常用初等函数的麦克劳林展开式	(114)
13.2.12	傅里叶级数	(115)
13.3	主要解题方法	(116)
13.3.1	数项级数敛散性的判别方法	(116)
13.3.2	求幂级数的收敛区间或收敛域的方法	(118)
13.3.3	将函数展开成幂级数的方法	(118)
13.3.4	求幂级数的和函数的方法	(120)
13.3.5	幂级数的应用	(121)
13.3.6	傅里叶级数的展开法	(122)
13.4	同步训练题	(125)
第14章	矩阵	(127)
14.1	学习要求	(127)
14.2	内容提要	(127)
14.2.1	矩阵的概念	(127)
14.2.2	同型矩阵与矩阵相等	(128)
14.2.3	矩阵的加法、数乘与乘法的定义	(128)
14.2.4	矩阵的加法、数乘与乘法的运算性质	(129)
14.2.5	转置矩阵与单位矩阵	(129)
14.2.6	转置矩阵的运算性质	(129)
14.2.7	矩阵的初等行变换、初等变换与初等矩阵	(130)
14.2.8	阶梯形矩阵、矩阵的秩与满秩矩阵	(130)
14.2.9	方阵的行列式的定义	(131)
14.2.10	行列式的性质	(131)
14.2.11	上(下)三角形行列式	(131)

14.2.12	克拉默(Cramer)法则	(132)
14.2.13	可逆矩阵与逆矩阵	(132)
14.2.14	逆矩阵的性质	(133)
14.2.15	线性方程组与增广矩阵	(133)
14.2.16	判定线性方程组是否有解的定理	(134)
14.3	主要解题方法	(134)
14.3.1	矩阵的乘法运算	(134)
14.3.2	运用初等行变换求逆矩阵的方法	(135)
14.3.3	运用逆矩阵解矩阵方程的方法	(136)
14.3.4	化上(下)三角形行列式求行列式的方法	(138)
14.3.5	用高斯消元法求解线性方程组的方法	(138)
14.4	同步训练题	(140)
同步训练题答案与提示		(143)
参考文献		(149)

第1章 绪 论

高等数学与初等数学比较而言,高等数学的内容多而难、进度快。为了能够掌握这些内容,并培养分析问题和解决问题的能力,提高素质,就要提倡自学,实行教与自学双向教学,读者在学习过程中应抓好如下五个环节:

(1) **课前预习** 预先通读下次课要讲的内容。

(2) **认真听讲** 提倡超前的动脑思维。不仅要认真做笔记,跟随上课老师的思维而展开思维,而且应该有超前意识,即超过老师的思维,下一步比老师先想到,或者比老师用到的方法要好。

(3) **课后复习** 弄懂每一个细节,并适当看一些参考书,帮助并加深理解所讲的内容。

(4) **完成作业** 要独立完成作业,可以讨论或询问,但切忌抄袭。

(5) **及时小结** 总结所学的内容,进行方法的归纳和整理,写出体会等。

只要坚持不懈地抓好这五个环节,是可以学好高等数学的。

“高等数学”课程的主要任务是研究函数的一系列分析性质:函数的极限,函数的连续性、可微性(求导数与微分等)、可积性(求各类积分及其应用等),函数展开成级数,函数的性质与作图,解微分方程求函数式等。高等数学的主要研究对象是连续函数,运用的主要工具是极限方法。微积分各基本概念间的关系见图 1.1。

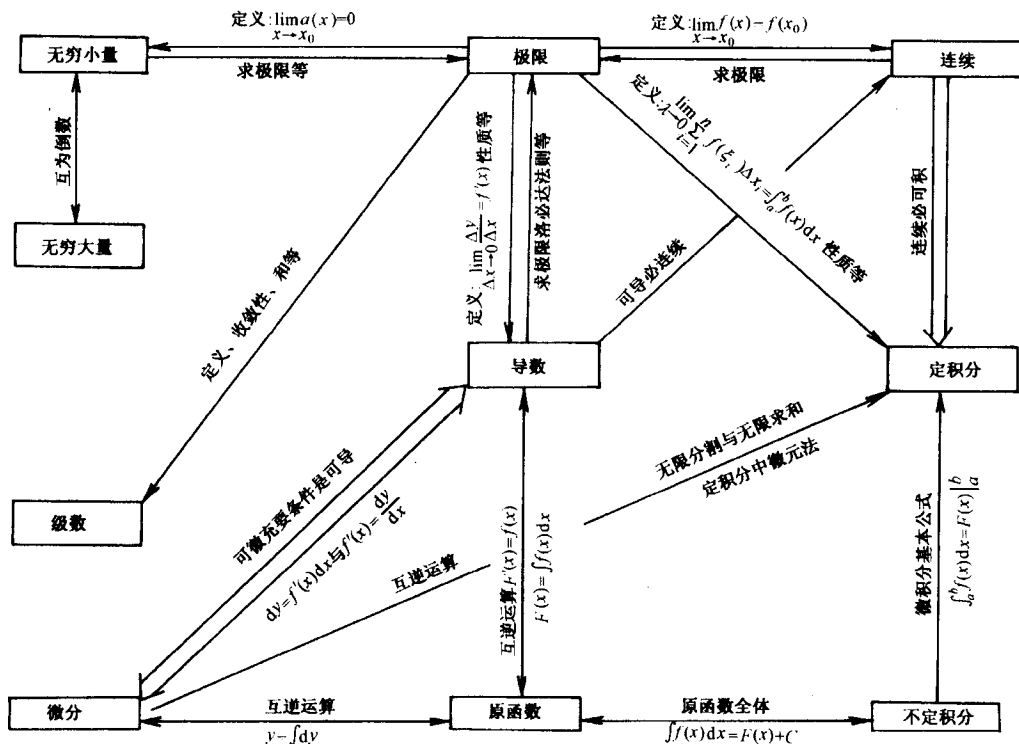


图 1.1 微积分各基本概念间的关系

通过本辅导书的学习,可以帮助读者加深理解“高等数学”课程的基本概念和基本原理,灵活掌握高等数学的主要解题方法,较快提高分析问题和解决问题的能力。同时还可以帮助读者学会如何从实际问题中建立数学模型,提高用数学方法解决实际问题的能力,并为其其他课程的学习打好基础。

第2章 函 数

2.1 学习要求

1. 理解函数的概念。
2. 了解分段函数的概念及基本初等函数的特性。
3. 了解反函数、复合函数的概念,会分析复合函数的复合过程。
4. 了解初等函数的概念。
5. 会建立简单实际问题的函数模型。

重点:函数的概念、复合函数和初等函数的概念,会求函数的定义域。

难点:分段函数的概念和反函数的概念,建立简单实际问题的函数模型。

2.2 内容提要

2.2.1 函数

1. 函数的定义

设 D 与 B 是两个非空实数集,如果存在一个对应规则 f ,使得对 D 中任何一个实数 x ,在 B 中都有惟一确定的实数 y 与 x 对应,则对应规则 f 称为在 D 上的函数,记为

$$f: x \rightarrow y \quad \text{或} \quad f: D \rightarrow B$$

y 称为 x 对应的函数值,记为

$$y = f(x), x \in D$$

其中, x 称为自变量, y 称为因变量。

2. 定义域

函数自变量的取值范围 D 称为函数的定义域。

3. 有关函数的几点说明

(1) 函数的记号

函数是自变量和因变量之间的一种对应关系,在 $y=f(x)$ 中,这种对应关系用字母 f 来表示。也可以用其他字母来表示函数关系,如 $y=g(x)$, $y=h(x)$ 或 $y=F(x)$,但同一函数在讨论中应取定一种记号,在同一问题中涉及多个函数时,则应取不同记号分别表示它们各自的对应规则。

(2) 对应规则

函数是一种对应规则,在函数 $y=f(x)$ 中, f 表示函数, $f(x)$ 是对应于自变量 x 值的函数

值,但在研究函数时,这种对应关系总是通过函数值表现出来的,所以习惯上常把在 x 处的函数值 y 称为函数,并用 $y=f(x)$ 的形式表示 y 是 x 的函数。但应正确理解,函数的本质是指对应规则 f ,不是指因变量 y 。例如 $f(x)=2x^3+4\sin 3x-6$ 就是一个特定的函数, f 确定的对应规则为

$$f(\quad)=2(\quad)^3+4\sin 3(\quad)-6$$

就是一个函数。

(3) 定义域

函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 是自变量 x 的取值范围,而函数值 y 又是由对应规则 f 来确定的,所以函数实质上是由其定义域 D 和对应规则 f 所确定的,因此将函数的定义域和对应规则称为函数的两要素。也就是说,只要两个函数的定义域相同,对应规则也相同,就称这两个函数为相同的函数,与变量用什么符号表示无关,如 $y=|x|$ 与 $s=\sqrt{t^2}$,就认为是相同的函数。

2.2.2 函数的四种特性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为区间 D ,函数的四种特性如表 2.1 所示。

表 2.1 函数的四种特性

函数的特性	定 义	图像特点
奇偶性	设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称,若任意 $x \in D$,满足 $f(-x)=f(x)$,则称 $f(x)$ 是 D 上的偶函数;若任意 $x \in D$,满足 $f(-x)=-f(x)$ 则称 $f(x)$ 是 D 上的奇函数。既不是偶函数也不是奇函数的函数,称为非奇非偶函数	偶函数的图像关于 y 轴对称,奇函数的图像关于原点对称
单调性	若任意 $x_1, x_2 \in (a, b)$,当 $x_1 < x_2$ 时,有 $f(x_1) < f(x_2)$,则称函数 $y=f(x)$ 是区间 (a, b) 上的单调增加函数;当 $x_1 < x_2$ 时,有 $f(x_1) > f(x_2)$,则称函数 $y=f(x)$ 是区间 (a, b) 上的单调减少函数。单调增加函数和单调减少函数统称为单调函数,若函数 $y=f(x)$ 在 (a, b) 上为单调函数,则称区间 (a, b) 为函数的单调区间	图像在单调区间 (a, b) 上,单调增加的函数的值随着 x 的增大而增加,单调减少的函数的值随着 x 的增大而减少
有界性	如果存在 $M > 0$,使对于任意 $x \in D$,满足 $ f(x) \leq M$,则称函数 $y=f(x)$ 是有界的	图像在直线 $y=-M$ 与直线 $y=M$ 之间
周期性	如果存在常数 T ,使对于任意 $x \in D, x+T \in D$,有 $f(x+T)=f(x)$,则称函数 $y=f(x)$ 是周期函数,通常所说的周期函数的周期是指它的最小正周期	在每一个周期内的图像是相同的

2.2.3 基本初等函数

六种基本初等函数见表 2.2。

表 2.2 六种基本初等函数

函 数	解析表达式
常函数	$y=c(c \text{ 为常数})$
幂函数	$y=x^a(a \text{ 为常数})$
指数函数	$y=a^x(a>0 \text{ 且 } a \neq 1, a \text{ 为实数})$
对数函数	$y=\log_a x(a>0 \text{ 且 } a \neq 1, a \text{ 为实数})$
三角函数	$y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x, y=\sec x, y=\csc x$
反三角函数	$y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x, y=\operatorname{arccot} x, y=\operatorname{arcsec} x, y=\operatorname{arccsc} x$