# 数学专题讲座

方金秋 主编

北京科学技术出版社

# 数学专题讲座

方金秋　　主编

北京科学技术出版社

## 内 容 提 要

本书收集了六篇数学专题讲座：1. 关于数的整除性；2. 抽屉原则浅谈；3. 二次函数的极值；4. 曲线族及其应用；5. 递推方法；6. 不定方程解法。这些专题讲座都是在北京市中师数学邀请赛前的讲座稿基础上，经整理、修改而成的。

本书文字通俗、内容深入浅出，各专题之末均附有练习题及其解答或提示．为读者学习巩固带来方便．

本书可供中师生、中学生、小学数学教师、青年数学爱好者阅读，也可供中学数学教师开展第二课堂活动使用与参考。

**数学专题讲座**

方金秋　主编

*

北京科学技术出版社出版

（北京西直门外南路19号）

新华书店首都发行所发行　各地新华书店经售

北京通县马驹桥印刷厂印刷

*

787×1092毫米　32开本　4.5印张　99000字

1987年8月第一版　1987年8月第一次印刷

印数1—7,000册

统一书号17274·061　定价0.85元

# 前　言

本书所集的六篇数学专题讲座稿，都是于1985年北京市中等师范学校数学邀请赛之前在全市范围内讲过后，经修改而成的讲稿。每个专题集中讲一个问题。这些专题讲座的内容都能为中师学生、中学生（特别是高中生）所接受，然而其深度与广度又较现行中学课本、中师课本略高、略宽些，各讲之末都附有练习题，供读者练习之用。每个练习题都有提示或解答。书末还附有北京市一九八五年中师数学邀请赛试题及解答。

开展数学竞赛讲座，目的在于开阔学生视野，培养学生的解题能力，提高学生对数学学习的兴趣。我们把这个小册子奉献给中师生、中学生、小学数学教师以及青年数学爱好者，希望对他们的学习能有所裨益。

限于水平，书中缺点、错误在所难免，望读者批评指正。

编　者

1985年12月于北京

# 目　　录

# 第一讲　关于数的整除性

吕　嘉　陵

数的整除性是整数理论中相当重要而又基础的知识，又是训练我们逻辑思维能力的一个良好工具．在这里只介绍一些浅显问题的思考方法，所涉及的内容只限于师范生或中学生所掌握的知识范围内．

## 一、数的整除特征

### 1．数的整除特征

（1）能被 2 整除的数的特征是它的个位数字是偶数；能被 5 整除的数的特征是它的个位数字是 0 或 5；

（2）能被 4 或25整除的数的特征是它的末两位数能被 4 或25整除；

（3）能被 8 或 125 整除的数的特征是它的末三位数能被 8 或125整除；

（4）能被 3 或 9 整除的数的特征是它的各个数位上的数字之和能被 3 或 9 整除．

以上的命题证明不难，仅证明(4)。

设被除数 $N=a_n\cdot 10^n+a_{n-1}\cdot 10^{n-1}+\cdots+a_3\cdot 10^3+a_2\cdot 10^2+a_1\cdot 10+a_0$。

$\because\quad 10=9\times 1+1$

$\quad\quad 10^2=9\times 11+1$

$\quad\quad 10^3==9\times 111+1$

……

$$10^{n-1}=9\times\overbrace{111\cdots1}^{(n-1)\text{个}1}+1$$

$$10^{n}=9\times\underbrace{111\cdots1}_{n\text{个}1}+1$$

令$M_i=\overbrace{111\cdots1}^{i\text{个}1}$，$i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n$

$$\begin{aligned}\therefore\quad N&=a_n10^n+a_{n-1}10^{n-1}+\cdots+a_2 10^2+a_1\cdot10+a_0\\&=a_n(9M_n+1)+a_{n-1}(9M_{n-1}+1)+\cdots+\\&\quad+a_2(9M_2+1)+a_1(9M_1+1)+a_0\\&=9[a_nM_n+a_{n-1}M_{n-1}+\cdots+a_2M_2+a_1M_1]+\\&\quad+(a_n+a_{n-1}+\cdots+a_2+a_1+a_0)\end{aligned}$$

显然 $9|N\Longleftrightarrow9|(a_n+a_{n-1}+\cdots+a_2+a_1+a_0)$

$3|N\Longleftrightarrow3|(a_n+a_{n-1}+\cdots+a_2+a_1+a_0)$

（5）能被11整除的数的特征是它的奇位上的数字和减去偶位上的数字和，所得的差能被11整除。

（6）能被7，或13，或17，或19整除的数的特征，由割尾法可得出下表：

| 整数 $N$ | 数$P$ | 能被$P$整除的特征 |
|---|---|---|
| $10x+y$（$y$是末位数字） | 7 | $x-2y$能被7整除 |
| | 13 | $x+4y$能被13整除 |
| | 17 | $x-5y$能被17整除 |
| | 19 | $x+2y$能被19整除 |

若整数$N$是大于1000的数还可以用截末三位之方法来判定被7或13整除：

$y$是末三位数，$x$是其余数字表示的数．由此，$N=1000x+y$

若$7\mid(x-y)$，则$7\mid N$

若$13\mid(x-y)$，则$13\mid N$

**2．例题**

**例1**　已知$N=\overline{13xy45z}$能被792整除，试求$x$，$y$，$z$。

**解**：$792=8\times9\times11$

（1）$\because 8\mid N$，$\therefore 8\mid\overline{45z}$，$\therefore z=6$

（2）$\because 9\mid N$，由整除特征可知：

$9\mid S(N)$　$S(N)$表示$N$之数字和。

即　$9\mid(19+x+y)$

只有$x+y=8$，或$x+y=17$

（3）$\because 11\mid N$，由整除特征可知

11整除奇数位数字和与偶数位数字和之差。

即$11\mid(3+x-y)$

只有$x-y=8$，或$x-y=-3$

由（2）、（3）所得之方程可得$x$、$y$的四组方程：

$\begin{cases}x+y=8\\x-y=8\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x+y=8\\x-y=-3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x+y=17\\x-y=8\end{cases}$

或 $\begin{cases}x+y=17\\x-y=-3\end{cases}$

合题意之解为$x=8$，$y=0$

即该数$N=1380456$

**例2**　由1—9这九个数字不重复组成九位数中，被11整除的最大数、最小数是什么？

**解**：设九位数$N=\overline{a_1a_2\cdots a_9}$

$\because$　$11\mid\overline{a_1a_2\cdots a_9}$

$$\therefore\quad (a_1+a_3+a_5+a_7+a_9)-(a_2+a_4+a_6+a_8)=11R$$

$$R\in Z$$

此差的最大可能是 $(9+8+7+6+5)-(1+2+3+4)=25\quad\therefore\quad R>3$

此差的最小可能是 $(1+2+3+4+5)-(9+8+7+6)=-15\quad\therefore R>-2$

由此 $R$ 只可能取 $-1$，0，1，2。

又 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_9=11R+2(a_2+a_4+a_6+a_8)$

左边 $=45$

$\therefore\quad R$ 只能取 $-1$，1

令 $A=a_1+a_3+a_5+a_7+a_9$，$B=a_2+a_4+a_6+a_8$

$\therefore\begin{cases}A+B=45\\A-B=\pm 11\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}A=28\\B=17\end{cases}$ 或 $\begin{cases}A=17\\B=28\end{cases}$

现求合要求之最大数：

为使最大，试取 $a_1=9$，$a_2=8$，此时不可能有 $B=28$，事实上，即使 $a_4=7$，$a_6=6$，$a_8=5$，也只能有 $a_2+a_4+a_6+$ $+a_8=26$。

$\therefore$ 取 $A=28$，$B=17$ 这一组解，此时

$a_4+a_6+a_8=B-a_2=9$

$a_4$，$a_6$，$a_8$ 只能从以下的三组中取得：

6，2，1；5，3，1；4，3，2。

为保证最大，取 $a_4=6$，$a_6=2$，$a_8=1$

剩下只有4个数字3，4，5，7，分别定为 $a_9$，$a_7$，$a_5$，$a_3$。

$\therefore$ 合要求之最大数为987652413。

再求合要求之最小数：

为使最小，试取 $a_1=1$，$a_2=2$，此时充其量 $a_2+a_4+a_6+$

$+a_8=2+7+8+9=26$，故不能满足$B=28$。

∴取 $A=28$，$B=17$这一组解，此时

$a_4+a_6+a_8=17-a_2=15$，$a_4$，$a_6$，$a_8$只能从以下两组中取得：

3，4，8；4，5，6。

为使结果最小，故取$a_4=4$，$a_6=5$，$a_8=6$

此时剩下的四个数字是3，7，8，9 分别定为 $a_3$，$a_5$，$a_7$，$a_9$。

∴合要求之最小数为123475869。

**例 3** 将0，1，2，3，…，9这十个数码按照任意一种顺序填入下面数字序列的空白处形成一个28位数：

5△383△8△2△936△5△8△203△9△3△76，

那么所得的数有多少种能被396整除？

**解**：$396=4\times11\times9$ 设该28位数为$N$。

（1）$N$之末两位数是76，∴$4|N$

（2）“空白”皆处于奇数位，而偶数位数字之和$U=73$，奇数位数字之和$V=17+45=62$。

$U-V=11$，∴$11|N$

（3）所有数字和$=90+45=135$，显然$9|135$

∴$9|N$

由以上三点可得结论：不论按什么顺序填入空白，数$N$皆可被396整除，∴共有10!种。

**例 4** 如果不大于四位数的整数能被99整除，那么它们的各位数字之和能被18整除。

**证**：设$N=\overline{abcd}$为满足条件的数（注意，$a$，$b$，$c$，$d$ 皆可为0）。

∵$9|N$，$11|N$，$(9,11)=1$

$\therefore a+b+c+d=9m$

$(a+c)-(b+d)=11n$

其中$m$，$n\in Z$

由于$a$，$b$，$c$，$d$是从0，1，2，…，9十个数码中取得，

$\therefore 0\leqslant a+b+c+d\leqslant 36$

$$-18\leqslant(a+c)-(b+d)\leqslant 18$$

又$(a+c)-(b+d)=11n$，$\therefore$上式不可能有等号，即

$$-18<(a+c)-(b+d)<18$$

由于9999与0被99整除且合题意，所以，

只需考虑：$0<a+b+c+d<36$

于是，$0<9m<36$　$-18<11n<18$

$\therefore$　$m=1, 2, 3$　$n=-1, 0, 1$

又$\because$　$a+c=\dfrac{9m+11n}{2}\in Z$

$$b+d=\frac{9m-11n}{2}\in Z$$

$\therefore m$，$n$必同奇或同偶。

当$m=1$　$n=1$时，$b+d=-1$

当$m=1$　$n=-1$时，$a+c=-1$

当$m=3$　$n=1$时，$a+c=19$

当$m=3$　$n=-1$时，$b+d=19$

这些都是不可能的，

只有$m=2$　$n=0$

$\therefore$　$a+c=9$　$b+d=9$

即总有$a+b+c+d=18$必被18整除。

命题得证

## 二、整数$N$总可写成$N=aq+r$之形式

在讨论整数的性质时，经常用到把整数$N$记作$N=aq+r$的形式（$a>1$的整数，$q$、$r$为整数），这种形式在整除或带余数的除法，或同余中等起着很大的作用。在前面提到的数的整除特征，它们的证明就实质而言，也是利用这个形式。显然，我们研究$N$是否被$a$整除时，只需讨论$r$是否被$a$整除。

从下面例题的解法中，我们可以看出这种思考方法的作用。

**例 5** 已知$N=\overline{2x78}$，若$17|N$，求$x$。

**解**：$N=2078+100x=17(122+6x)+(4-2x)$

$\because 17|N \quad \therefore 17|(4-2x) \quad$ 即$17|2(2-x)$

$\therefore 17|(2-x) \quad \therefore x=2$

另解：由整除特征（见第 2 页表）$17|\overline{2x78}$

必有$17|(\overline{2x7}-5\times 8)$

而$\overline{2x7}-5\times 8=2\times 100+10x+7-40$

$=167+10x=17\cdot 9+(10x+14)$

$\therefore 17|(10x+14) \quad \because 10x+14$末一位数是 4

$\therefore$只有$x=2$。

**例 6** 试证不能被 3 整除的整数的平方与 1 的差，能被 3 整除。

**证**：由题意，设该数$N=3q+r$，$r=1$，2，$q\in Z$。

则
$$N^2-1=(3q+r)^2-1=9q^2+6qr+r^2-1$$
$$=3(3q^2+2qr)+(r^2-1)$$

当$r=1$时，$r^2-1=0 \quad \therefore 3|(N^2-1)$

当$r=2$时，$r^2-1=3 \quad \therefore 3|(N^2-1)$

命题得证

**例 7** 试证整数 $a$ 不能被2，3整除，则$a^2+23$必能被24整除。

**证**：设$a=12n+b$，其中$n$，$b\in Z$且$0\leqslant b\leqslant 11$

由题意$2\nmid a$，$3\nmid a$，$\therefore b$只能取1，5，7，11四个值.

$a^2+23$只可能有以下四种情形：

$a^2+23=(12n+1)^2+23=144n^2+24n+24$

或$a^2+23=(12n+5)^2+23=144n^2+120n+48$

或$a^2+23=(12n+7)^2+23=144n^2+168n+72$

或$a^2+23=(12n+11)^2+23=144n^2+264n+144$

显然，不论哪一种情形皆能被24整除。

命题得证

**例 8** 对于任何整数$n$，试证$n^7-n$能被 7 整除。

**证**：$n$ 为任意整数，必可表示成如下形式之一：

$n=7R+r \quad r=0,\ \pm1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5 \quad R\in Z$

而$n^7-n=(n-1)n(n+1)(n^2-n+1)(n^2+n+1)$。

若 $n=7R$ 或 $n=7R\pm1$，由 $n^7-n$ 之前三个因式可知：$7|(n^7-n)$

若 $n=7R+2$ 则 $n^2=7R'+4$，$R'\in Z$，由 $n^2+n+1$ 可知：$7|(n^7-n)$

若 $n=7R+4$ 则 $n^2=7R_1'+2$，$R_1'\in Z$，由 $n^2+n+1$ 可知：$7|(n^7-n)$

若$n=7R+3$或$n=7R+5$，由$n^2-n+1$可知：

$7|(n^7-n)$

命题得证

**定理 把整数写成百进制的数，若数字和能被11整除，则该数能被11整除.**

此命题告诉我们一个判别被11整除的新方法，

如数 2889304，按百进制，即自左至右两位分段 $2'88'93'04$，而 $2+88+93+04=187$，再分段 $1'87$，$1+87=88$ $\because 11|88$，$\therefore 11|2889304$

证：将此数记作 $P$，不妨假设 $P\geqslant 0$

$P$ 可表示成：

$P=b_n 100^{n-1}+b_{n-1}100^{n-2}+\cdots+b_2 100+b_1$

其中 $0\leqslant b_i\leqslant 99$ 之整数，$i=1, 2, 3, \cdots, n$

我们知道用11去除 100 的正整数幂皆余 1。所以 $P$ 的前 $n-1$ 项总可以写成 $b_i(11R_i+1)$ 的形式，其 $R_i$ 是整数，$i=2, 3, 4, \cdots, n$

$\therefore P=11R+(b_n+b_{n-1}+\cdots+b_2+b_1) \quad R\in Z$

当且仅当 $11|(b_n+b_{n-1}+\cdots+b_2+b_1)$ 时 $11|P$

证毕

用此方法解下面这道题是容易的。

例如，求一个能被11整除的最小六位数，其首位是 7，其余各位数字均不相同。

**解**：由题意，设该六位数为 $N=\overline{70123x}$

$70+12+\overline{3x}=82+\overline{3x}=110+(2+x) \quad \therefore x=9$

$\therefore N=701239$

上面之定理与被11整除的特征是一致的。

事实上，$N=\overline{a_1a_2a_3\cdots a_n}$

若 $N$ 有偶位数，即 $n$ 为偶数，则两位分段为

$N=\overline{a_1a_2'a_3a_4'\cdots' a_{n-1}a_n}$

$\overline{a_1a_2}+\overline{a_3a_4}+\cdots+\overline{a_{n-1}a_n}$

$=(a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{n-1})\times 10+(a_2+a_4+\cdots+a_n)$

$=11(a_1+a_3+\cdots+a_{n-1})+[(a_2+a_4+\cdots+a_n)-$

$-(a_1+a_3+\cdots+a_{n-1})]$

$\therefore$ 当且仅当 $11 \mid (\overline{a_1a_2} + \overline{a_3a_4} + \cdots + \overline{a_{n-1}a_n})$ 时，

则 $11 \mid [(a_2 + a_4 + \cdots + a_n) - (a_1 + a_3 + \cdots + a_{n-1})]$

若 $N$ 有奇位数（即 $n$ 是奇数），则两位分段

$$N = \overline{a_1'a_2a_3'a_4a_5'\cdots'a_{n-1}a_n}$$

$$a_1 + \overline{a_2a_3} + \overline{a_4a_5} + \cdots + \overline{a_{n-1}a_n}$$

$$= (a_2 + a_4 + \cdots + a_{n-1}) \times 10 + (a_1 + a_3 + a_5 + \cdots a_n)$$

$$= 11(a_2 + a_4 + \cdots + a_{n-1}) + [(a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_n) -$$

$$- (a_2 + a_4 + \cdots + a_{n-1})]$$

当且仅当 $11 \mid (a_1 + \overline{a_2a_3} + \overline{a_4a_5} + \cdots + \overline{a_{n-1}a_n})$

则 $11 \mid [(a_2 + a_4 + \cdots + a_{n-1}) - (a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_n)]$

读者可以推广一下，若判别一个较大的数是否被 11 整除，还可以用“四位分段”，然后求其和，视其和能否被11整除，从而确定该数是否被11整除。

## 三、算术基本定理

我们知道每一个大于 1 的整数 $a$ 都能用质数连乘积来表示。**如果不计这些质因数的顺序，则只有一种方法可以把一数 $a(>1)$ 分解成质因数的连乘积。这就是说，如果把相同的质因数合并为它的幂数，则任一个整数 $a>1$，分解成下面的形式是唯一的。**

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \cdots\cdots p_n^{\alpha_n} \quad n \geqslant 1$$

其中 $p_1$，$p_2$，$p_3$，…，$p_n$ 是各不相同的质数，$\alpha_1$，$\alpha_2$，…，$\alpha_n$ 都是自然数，我们把

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \cdots p_n^{\alpha_n}$$

叫做 $a$ 的标准分解式，这就是**算术基本定理**。

算术基本定理在理论与实际计算中都有很重要的用处，举例如下。

**例 9**　360能被多少个不同的自然数整除？

**解**：这个问题就是求"360有多少个约数"？

$\because 360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$

$\therefore$ 360的所有约数都具有

形式、$d = 2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5^\gamma$　其中$\alpha$可以从0，1，2，3这 4 个中任取一个，$\beta$可以从0，1，2 这 3 个中任取一个，$\gamma$ 可以从0，1这两个数中任取一个.

所以总共有$4 \times 3 \times 2 = 24$个，即360能被24个不同的自然数整除（其中包括 1 和360）。

许多数论的书上都介绍了一般情形：

如果整数$N = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_n^{\alpha_n}$（$p_1$，$p_2$，…，$p_n$为各不相同之质数），

则$N$的约数个数为$F(N) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_n + 1)$

**例10**　求在100以内具有10个约数的自然数.

**解**：由以上的约数公式

（1）$F(N) = 10 = 2 \cdot 5$具有10个约数的自然数应有形状　$N = p_1^1 p_2^4$（$p_1$，$p_2$为不同质数）

取$p_1 = 3$　$p_2 = 2$　$\therefore N = 3^1 \cdot 2^4 = 48$

取$p_1 = 5$　$p_2 = 2$　$\therefore N = 5^1 \cdot 2^4 = 80$

$p_1$，$p_2$再不能取其他质数.

（2）$F(N) = 10 = 1 \cdot 10$　则$N = p^9$

此时$p$取最小质数 2，$2^9 > 100$　不合要求.

所以，100以内具有10个约数的自然数是48和80.

读者可以计算具有15个约数的最小自然数是什么？

**例11**　求一个最小自然数，使它的一半是平方数，它的$\frac{1}{3}$是立方数，它的$\frac{1}{5}$是五次方数.

**解**：由题意，可知该数必同时被2，3，5整除。设该数为$N$，又∵$N$是所求最小自然数，所以

$$N=2^{\alpha}\cdot 3^{\beta}\cdot 5^{\gamma}$$

又$\dfrac{N}{2}=2^{\alpha-1}\cdot 3^{\beta}\cdot 5^{\gamma}$是平方数，

$\therefore 2|(\alpha-1)\quad 2|\beta\quad 2|\gamma$

而$\dfrac{N}{3}=2^{\alpha}\cdot 3^{\beta-1}\cdot 5^{\gamma}$是立方数，

$\therefore 3|\alpha\quad 3|(\beta-1)\quad 3|\gamma$

又有$\dfrac{N}{5}=2^{\alpha}\cdot 3^{\beta}\cdot 5^{\gamma-1}$是五次方数，

$\therefore 5|\alpha\quad 5|\beta\quad 5|(\gamma-1)$

由$3|\alpha\quad 5|\alpha\quad \therefore\alpha$最小是15，此时正好$2|(\alpha-1)$

由$2|\beta\quad 5|\beta\quad \therefore\beta$最小是10，此时正好$3|(\beta-1)$

由$2|\gamma\quad 3|\gamma\quad \therefore\gamma$最小是6，此时正好$5|(\gamma-1)$

所以　所求之数$N=2^{15}\cdot 3^{10}\cdot 5^{6}$

**例12**　试求出数列1985，19851985，198519851985，…，$\underbrace{19851985\cdots1985}_{n个1985}$，…

各项中能被11整除的最小项。

**解**：据前面“二”之结尾处提到的“四位分段”来判断，设最小项是第$m$项，则

$$\underbrace{1985+1985+\cdots+1985}_{m个1985}=11R,\quad R是整数。$$