

0896

藏

統計学数学方法

第一分册

哈雷德·克拉美著

7
058

高等教育出版社

3107
/4058

270896

下

統計學數學方法

第一分冊

哈雷德·克拉美著

鄭朴 吳錦譯

高等教育出版社

000075

本书是根据哈罗德·克拉美(Harald Cramer)著“统计数学方法”(Mathematical Methods of Statistics)一书1946年版译出。全书分三大部分:数学的基础知识,随机变量及概率分布,数理统计。书前并加上俄译本的序言及我社另请有关教师写的“关于克拉美一书的哲学观点”。

第一分册专讲数学的基础知识,它的主要内容是:点集论, R_1 中的测度论及积分论, R_n 中的测度论及积分论,综合性问题。

统计数学方法

第一分册

哈罗德·克拉美著

郑朴 吴锦译

高等教育出版社出版 北京宣武门内承恩寺7号
(北京市书刊出版业营业许可证出字第054号)

上海大东集成联合印刷厂印刷 新华书店发行

统一书号 13010·724 开本 850×1168 1/32 印张 4 13/16
字数 113,000 印数 1—9,000 定价 (5) 羊 0.60
1960年3月第1版 1960年3月上海第1次印刷

俄譯本序言

克拉美 (Cramer) 这本书的任务首先是純学术性的: 为数理統計建立一套能满足現代要求的叙述体系。近年来, 許多人对于这一体系的大致輪廓是清楚的, 而且多次在苏联和英美作家的一系列杂志文章中闡明过。虽然如此, 至今所有的数理統計教程仍然建立在完全不能适应現代要求的理論基础上, 因而它的实用部分在很大程度上具有純方法性。在这种傳統下写成的教程中, 全世界不能不認为罗曼諾夫斯基 (В. И. Романовский) 的俄文教程 (“数理統計”, 1938) 是最好和最完整的。然而, 近来在苏联学者, 包括罗曼諾夫斯基本人在內的著作中, 关于假設的統計檢驗和参数的統計估值 (或者分布的直接“非参数的”估計) 的一般原則性研究, 获得了很大的进展, 这引起了从本質上重新叙述数理統計基础的必要。既然对数理統計若干專門問題的研究, 超过了所有教本中沿用的以数学与概率論为前題的叙述水平, 人們逐漸明确, 必須及时地从完全現代的立場, 来系統地叙述数理統計的一些原則性問題。显然, 这一新的叙述体系, 只能在它完成了对各方面具体材料的巨大整理工作以后, 才会有最后的說服力。本书便是实现这一計劃的嘗試。

这本书不是沒有缺点的。数理統計中若干重大的研究方向, 书中沒有应有的反映, 例如: 主要結果由 H. B. 斯米尔諾夫得到的“非参数問題”; 严格叙述建立在一般随机过程論上的時間序列; 随机变数的置信界 (在英文名詞中, tolerance limits 不同于 fiducial limits, 在英文著作中, 只对非随机的参数称置信界); 和才开始发

展的“序列分析”(sequential analysis)。另方面,将来一般基础理論的叙述也許會变得更初等和更易于接受[这里,我指的不是放弃运用一般测度論、波雷耳(Borel)可測性的观念及 Lebesgue 积分,而是指更易懂地、附以直接涉及概率論与数理統計的例題,来叙述这些观念]。最后,至于 Cramer 把科学研究的任务归結为“描述(Description)”、“分析(Analysis)”及“預言(Prediction)”(見第十三章)的总的想法,則具有明显的經驗論的色彩(很难多說,因为在这些問題上,作者吝于发言)。

因此,克拉美一书的出現無論如何也不会取消重新写作具有独创性的苏联数理統計书的任务,更正确些,甚至两个任务:(1)創作巨大的完全近代化的数理統計論文;(2)在初等教程中,以尽可能合乎理想的邏輯明确性,圍繞假設的統計檢驗及統計估值的基本思想,来叙述数理統計。然而,在任何情況下,第一个任务的完成都需要相当长的時間。因此,毫无疑問,在我們現有关于数理統計的文献中,克拉美一书是很有益的。

为了閱讀本书,必須具有較好的古典数学分析知識。这范围以外的一切輔助数学工具,在本书第一部分都有詳細的叙述。那里讀者会接触到 n -維欧氏空間內的几何知識,这对了解概率論与数理統計中許多“古典”結論的真实思想是非常重要的,此外,还会遇到綫性代数中对应于这些几何知識的一些結果,以及一維和 n -維傅立叶变换。在这部分中,对非数学工作者來說,最难的也許是叙述测度論和积分論的章节。至于已經学过概率論的讀者,則应注意勒貝克积分的定义在邏輯本質上无非重合于数学期望的定义,至于“度量性函数論”,則只是重复著名的契比雪夫(Чебышев)不等式的推論。

本书第二部分系統地叙述概率論。然而我們不想推荐它以代替普通的概率論教程。最好是,在讀本书以前,讀者已从另一教本

中获得了概率論的基本知識。如讀者是数学工作人員，則在本书第一和第二部分之間，我們建議他讀完 A. H. 柯莫果洛夫 (Комогоров) 所著的小冊子“概率論基本概念” (有丁寿田的漢譯本——譯者)。對已熟悉概率論的讀者 [例如，讀過 C. H. 培恩斯坦 (Бернштейн) 的教程]，在閱讀本书第二部分時，可以滿足于只是為了系統地整理與補充在第三部分中將要用到的那些方面的知識。

本书第三部分是基本的，它敘述数理統計本身。如果讀者希望更一般地更綜合地了解這一部分中的若干主要思想，可以閱讀“数学科学的成就” (“Успехи математических наук”) 第十卷及 1942 年的苏联科学院通报 (“Известия АН СССР”) 上分別由 Ю. 牛曼 (Нейман) 和 A. H. 柯莫果洛夫写的文章。克拉美本人原則性的見解主要在 32、33、34 及 35 各章中敘述。也許，它們在我們的文獻中是值得討論的。看來，這幾章可以視為在清除了英美學派奠基人 R. A. 菲歇 (Fisher) 的工作中不明確性與直接錯誤以後，該學派主導觀點的一篇優秀綜合報告 (關於 R. A. 菲歇觀點的批評，見 1941 年苏联科学院通报上 C. H. 培恩斯坦的文章)。

第三部分的敘述在很大程度上遵循着直觀的路綫。首先討論了統計估值問題的一般特點 (25—26 章)，研究了一系列的特殊問題 (27—31 章)，在這以後，才敘述上面提到的、從一般理論看來是基本的 32—35 章，然後再轉過來敘述更複雜的特殊問題 (36—37 章)。最後兩章——36 (方差分析) 和 37 章 (迴歸方程)，写得相當概略，這與 27—31 各章不同，那里的敘述詳細到列舉出來自現實統計實踐中的數值例題。如果計算第三部分的篇幅 (英文版共 233 頁)，那麼應當承認，其中的具體材料是很豐富的。然而作為專門的統計方法和公式手冊，克拉美的書仍然不能代替 B. H. 羅曼諾夫斯基的書，那里更多地按教科書的形式敘述了更多的材料。

如上所述，既然克拉美的書主要是為有修養的讀者着想而不

能当作数理統計的初等課本,所以我們认为对它加工或补写附录都不适宜,而宁肯让它給有修养的苏联讀者留下在一定阶段上国外科学发展的概况[⊖]。

和原著比較,俄譯本只有下列变动:

(1)索引内国外教本换为俄文教本。杂志文章的作者索引则保留未变。

(2)一般名詞的索引分为两部分。第一部分中包含概率論与数理統計中的名詞。那里在括号中标明了定义所在的頁次和对应的英文名詞。譯者与校者希望这张专用名詞表能对俄文名詞的标准化有所贡献,并乐于听到关于这方面的批評意見。

A. H. 柯莫果洛夫

南开大学王梓坤譯

⊖ 本书俄譯本第一次出版于1948年——譯者注。

关于 H. 克拉美一书的哲学观点

哈·克拉美一书汉译本的出版,无疑地会給我国广大讀者带来很大的好处。这本书在两方面取得了显著的成就:第一,它在严格的数学基础上,首先是在奠基于 A. H. 柯莫果洛夫(Комоголов)公理系的近代概率論基础上,系統而又清楚地叙述了数理統計中的基本知識和若干特殊問題。在全书中基本上貫徹了計算与証明到底的精神,这是一般数理統計书所不能胜任的;其次,本书中所用的数学工具虽然不很簡單而且多种多样,但对讀者却只要求普通的数学分析知識(相当于 B. H. 斯米尔諾夫“高等数学教程”第一及第二卷,除去其中微分方程部分),由于全书写得平易近人,只要循序漸进地讀下去,是不难接受的,因此,从教学观点看来,本书也是很有益的。誠然,它也有一些內容上的缺点,这在俄譯本序言中已評論过。主要問題是:本书不仅缺乏对数理統計中若干重大方面的应有反映,而且关于本学科中更能联系实际的章节,如方差分析、迴归方程等,也叙述得过于簡略。因此,作为綜合性大学教本,它就有不足之处,最好是能再参考几本其他的书。目前,由于理論联系实际原則的坚决貫徹,我国在数理統計的研究中,特别是在应用数理統計于社会主义建設中,取得了巨大的成績。我們希望,在不久的将来,会出现密切結合我国生产实际的、更好的数理統計教程或結合某些专业的数理統計課本,这是十分必需的,也是完全可能的。

本书的数学叙述虽然相当严整而且自封,但作者在本书中提出的或者反映的一些哲学观点,却不是无可非議的。作为本书的

热心讀者，我們希望在对它进行批判以后能給我国讀者带来最大限度的好处。因此，这里試提出几个問題，进行一些初步的討論。

(一)关于数学的作用与对象：辯証唯物主义哲学认为，每一門科学都有两方面的任务：首先，它必須深刻地認識它所研究的对象的多多种多样的特性，揭示它的內在規律性；然而科学的任务决不止于認識世界，决不止于对客觀对象发展規律的自我欣賞与自我陶醉，科学的最主要的任务，是为了改造世界，人們掌握了所研究的对象的客觀規律以后，便應該利用它来能动地征服世界。

数学，作为一門科学，它的任务也是如此。它的对象，正如恩格斯所指出，是现实世界的空間形式与数量关系。这句话不仅清楚地說明了数学的对象，而且还指出了下列极其重要的两点：数学来源于现实世界而不是脱离物質，不是理性的任何自由創造都有存在的价值；其次，在数学的抽象中，應該舍弃事物的具体内容，以便在純粹状态下研究现实世界的空間形式与数量关系。

哈·克拉美书中 13.4 节是专门用来討論数学的对象的。作者写道：“在某一群观察到的現象中，当发现某种确定的規律性时，我們可以試图建立它的数学理論”；“于是，我們选出从資料中观察到的規律性的最主要与最基本的特点作为出发点。用簡單化与理想化的形式，把它們表达为数学命題，这就是我們的理論的基本公理。从这些公理出发，用純粹的邏輯推演而不再求助于經驗，得到各种命題。在公理基础上这样建立起来的邏輯相容的命題系統就构成我們的数学理論”。

在这些話里，作者虽然正确指出了数学理論的泉源是现实世界，但是沒有說明数学对象到底是什么？是客觀事物全部，連它的具体内容都包含在內嗎？显然，这样的了解必然不能把数学与其他的科学区分开来，必然会夸大数学的作用，企图用只关于空間形式与数量关系的科学来研究具体事物的全部規律，結果必然会失

望以至最后走上否認数学作用的道路。其次，作者在說明建立数学理論的公理系統时，使人感到，似乎任何一种規律性的特点都可作为出发点，似乎数学在研究人类社会等等具有质的特殊性与多样性的科学领域中，也会成为主要工具。在这种錯誤的理解下，必然会混淆数学的应用范围。由此可見，我們所以要进行下列第(三)个問題的討論，就不是偶然的了。

这样建立起来的数学理論的每个命題是否都是真实的呢？作者回答說（仍見 § 13.4）：“在数学意义上，这一系統的每个命題都真实(true)，只要它是从公理正确地推导出来的。另方面，重要的是要強調指出，任何数学理論的命題都沒有証明关于将要实际发生的事件的任何事情。在純粹几何中考虑的点、綫、面等等并不是我們从直接經驗中感觉到的东西。純粹的理論完全属于概念范围，它所处理的是抽象的对象，后者完全由公理表达的性質所决定。对于这些对象，理論的命題是准确地严格地真实的。但是关于这些概念对象的任何命題，却永不会包含关于經驗中感觉之物的性質的邏輯証明。数学論証基本上不可能証明物理事实”。

这样，按照作者的意思，公理及其上层建筑构成了一个与现实世界完全隔絕的封閉系統，客觀对象（作者称之为經驗中感觉之物）与“概念对象”分裂开来，一切命題对“概念对象”都是絕對正确的，至于对客觀对象是否正确，則不是数学理論所关心的問題，也不是它所能解決的問題。这里，判断是非的标准完全与客觀对象无关，完全与实践无关，当然更談不上反过来服务于实践。因而，每一套数学理論，只要它是邏輯相容的，不管它能否反映现实，都可以由理性自由創造，自由发展，都有存在的价值。显然，这种观点与辯証唯物主义的观点是不相容的。我們認為，理論来源于实际。然而，只看到这点是不够的，更重要的是，理論要能反映与揭示实际的全部发展过程的規律性，并能服务于实践。这里，判断理

論是否正确的标准是现实世界,是客觀对象,是革命的实践。只有在实践中经过考驗而証明其正确的理論才是真正的理論,才是有存在价值的理論。

然后,作者从各种理論中,区分出那种能真正反映现实的理論来(我們看来,除了这种理論外,不需要其他的“理論”),用作者的話說,即那种获得了“实际价值”的理論。只是从这时起,作者才又重新回到现实中来,并且指出,这种理論的主要作用是描述(Description)、分析(Analysis)与預言(Prediction)。在第 26 章中,并解釋了它們在数理統計中的具体内容(具体内容的解釋是正确的)。把数学的作用归納为这三点是不充分的,它只說明了数学在認識世界,揭示所研究的对象关于空間形式与数量关系的規律性这一方面的作用,而对于在改造世界这方面的能动性則估計得不够;因而低估了数学理論的巨大价值,正如俄譯本序言所說,染上了經驗論的色彩。應該指出,对数学作用这样的理解容易使人停留于对数学理論的自我欣賞上,停留于描述分析上,停留于远离实际的預言上,使人满足于智慧的乐趣,满足于数学規律邏輯严整性的美的享受,而忘記了必須面向实际、改造现实的革命任务。

在提出上述問題的同时,当然也應該公正地指出,只要我們采用了辯証唯物主义的正确观点,本书第 13.4 节仍然是值得批判地閱讀的。

(二)关于概率論与数理統計中的若干基本观念:这里只討論“随机性”与“概率”两个。

本书中未正式給出随机性(或称偶然性)的定义,而只举了一些例子來說明几种类型的随机性(見 § 13.2),即如:开始条件的微小变动可以大大影响最后結果;現象的規律虽然完全确定,但由于它的复杂性,以致实际的計算不可能;微小的难以控制的外界干扰因素大大影响了預期的結果。

这里有两点值得指出：我們所說的随机性及随机事件，总是指对一組固定的开始条件而言的，在固定的开始条件組下，可能发生也可能不发生的事件称为随机事件。如果允許开始条件組变动，結果必然会混淆决定性与随机性这两个不同的观念；其次，也是更主要的，随机性是客观地不依赖于人們的意識而存在的。因此，它产生的原因决不是因为我們的知識不充分或計算不精确。看来，作者把两件不同的事等同起来了：随机性产生的原因是一回事，人們在知識不够充分时不得不采用处理随机事件的方法是另一回事（請參看 § 13.2 关于日蝕的例）。

在 § 13.5 中，作者采用了概率的統計定义，然后在第十四章中介绍了 A. H. 柯莫果洛夫公理化結構，这一切都无可非議。問題在于，同时还介绍了 von Mises 的实质上与馬赫哲学相符的定义，Keynes 和 Jeffreys 把概率当作認識主体的“信念程度”的主观唯心論的学說。当然，要求作者对这些說法进行哲学的批判是不现实的[关于这方面的批判，請參看 B. B. 格涅坚科(Гнеденко)著“概率論教程”，丁寿田譯，第一章]。

(三)关于数理統計适用范围与举例：这問題实际上对全部数学都存在，不过对数理統計更为突出。事实是这样：一方面，数学由于它的高度抽象性而获得了广泛的应用，另方面又由于它只研究事物的空間形式与数量关系这一側面而使它不能充分研究具体事物全部的規律性。一种事物或現象，如果支配它的主要是关于空間形式与数量关系的規律，如天体力学，則数学的作用越显著，否則，它的作用就减弱，这时，只有把数学与其他研究該具体現象的深刻理論結合起来，才能恰如其份地發揮和理解数学的作用。在生物学心理学上如此，在社会科学中尤其如此。

数理統計的应用問題尤有特殊的现实意义。为了要掩蓋阶级本质，资产阶级的学者們常常把资本主义社会制度所固有的許多

現象解釋为自然的偶然的現象，因而夸大概率論与数理統計在研究社会現象中的作用，这是不恰当的。

在本书中，作者沒有明确地涉及这个問題，然而就书中列举的許多例題以及分散在各处的个别言論看来，作者力图显示数理統計適用范围的极其广泛性，从农业、气象、人口調查以至于生物、心理和各种社会科学。这些例子，作为一般理論的解釋，从数学的教学观点看来是可以参考的，但必須充分警觉地注意到这是来自資本主义社会的統計調查，而統計調查一般是决定于調查的目的与調查人的立場的，这就不能不以批判的眼光来看待它們的实际内容和意义了。

最后，應該指出，本书中多处引用生物学（如 § 13.2）及 G. 孟德尔（Mendel）的学說（如 § 90.2）来解釋某些基本概念或理論的应用，这都是很不恰当的，問題不仅在于孟德尔学說本身，而且还在于忽視了現象本質的方法論上的錯誤。

由于笔者水平低下，以上意見未必正确，更不会全面，敬請批評指正。

南开大学王梓坤

1959.11.21.

原 序

在晚近二十五年中，統計科學[⊖]取得了巨大的進展，這要歸功於英國的著名學派和美國的統計學家。而貢獻居于首位的，當推菲歇（R. A. Fisher）教授。在此時期內，大部分由於法國和蘇聯數學家的工作，古典概率論已發展成為純粹的數學理論，從嚴密性來講已達到了近代的水準。

本書的目的，是要綜合這兩方面的发展而對以概率概念為基礎的近代統計方法中的數學理論作一闡述。要充分理解這些方法的理論，要求有較高的純粹數學的知識。我是本着讀者只掌握了微積分、代數與解析幾何的基本知識這一觀點來寫這本書的。

本書的第一部分，可視為一種數學引論。在這裡，有一些數學知識對讀者可能是較為生疏而對於學習第二、第三部分又是必需的。其中特別以分布及關於一個分布的積分的基本概念為重點。在第四、第五兩章中，對勒貝克測度和積分的理論作了簡單的敘述，作為分布及分布的積分等基本概念的一個引言。而在第六、第七兩章中，則概述這些基本概念的直接推廣。

本書的第二部分，包含了隨機變量和概率分布的一般理論。第三部分則對抽样分布理論、統計估計及顯著性檢定等作了闡述。最後一部分所討論的問題的選擇必然有些隨意性，但我盡量集中討論一般的重要問題。當讀者已充分掌握這些知識後，就能夠自己解決在應用中遇到的特殊問題了。為了給本書的篇幅以一個適當的限制，不得不舍弃我原來打算討論的某些很有興趣的題目，例

⊖ 這裡的統計科學是指數理統計而言——譯者注。

如随机过程的理論、統計時間序列及周期图。

統計檢驗的理論可借用各种应用領域內的数字的例子來說明。限于篇幅，例題的数目必然要作很大的縮減。关于数值計算实际步驟的問題，也必須不加討論。

要学习本书的其余部分，并不必要先学完整个第一部分。讀者若急于要学习第二、第三部分，可先熟悉一下前面提到的那些基本概念。为此，只須閱讀了第一至三章及 4.1—4.2、5.1—5.3、6.1—6.2、6.4—6.6、7.1—7.2、7.4—7.5、8.1—8.4 諸节之后，即可开始閱讀第十三章，在閱讀过程中可随时參閱第一部分中的有关問題。

本书是以我自 1930 年以来在大学中的講稿为基础，其中大部分是于 1940—1942 年写成。由于战争的原因，这些年中，在瑞典能用作参考的国外科学著作极不完备，而且得到的很迟。因此，本书可能遺漏了一些應該引用的材料及参考文献。

本书斯塔的納維亞版承瑞典皇家科学院等研究机关出資而得以印行，謹向它們表示感謝。

承普林斯頓数学丛书的編輯們將此书列入該丛书內，并允許单独印行斯塔的納維亞版，我也向他們致謝。

承菲歇教授及奥利弗(Oliver)、波伊特(Boyd)两先生的允許，得以从“研究工作者用統計方法”(Statistical methods for research workers)一书中抄录了 t -分布及 χ^2 -分布的表，特此表示感謝。

当我写此书时，还得到不少朋友的寶貴的幫助。波耳(Harald Bohr)及雅可布斯太尔(Ernst Jacobsthal)两教授在瑞典避難的期間，曾審閱了部分原稿和校样，并提出了有启发性的批評和意見。沃尔特(Herman Wald)教授在校样上就全书作了非常仔細的审查，我从他的寶貴的意見中获益很多。阿尔蒙喀維斯脫(Gösta Almqvist)、容格(Jan Jung)、林得布罗蒙(Sven G. Lindblom)

及馬吞 (Bertil Matern) 等幫助進行數字計算，原稿校訂和校對工作，我對他們表示由衷的感謝。

哈雷德·克拉美

斯德哥爾摩大學

数理統計系

1945年5月

第一分册 目录

俄譯本序言	i
关于 H. 克拉美一书的哲学观点	v
原序	xi

第一部分 数学的基础知識

第一至三章 点集

第一章 集合的一般性質	1
1.1. 集合 1.2. 子集合, 空間 1.3. 集合的运算 1.4. 集合的叙列 1.5. 单調叙列 1.6. 集合的可加族	
第二章 綫性点集	9
2.1. 区間 2.2. R_1 中集合的多种性質 2.3. 波雷耳集	
第三章 n 維空間內的点集	13
3.1. 区間 3.2. R_n 中集合的多种性質 3.3. 波雷耳集 3.4. 綫 性集 3.5. 子空間, 乘积空間	

第四至七章 R_1 中的測度与积分論

第四章 綫性点集的勒貝克測度	18
4.1. 区間的长 4.2. 推广 4.3. 区間的和的測度 4.4. 有界集 的外測度与內測度 4.5. 可測集与勒貝克測度 4.6. 可測集族 4.7. 可測集与波雷耳集	
第五章 一元函数的勒貝克积分	35
5.1. 有界函数在一具有有限測度集合上的积分 5.2. B -可測函数 5.3. 积分的性質 5.4. 在一具有有限測度的集合上的无界函数的 积分 5.5. 无限測度的集合上的积分 5.6. 作为一个可加集函数的 勒貝克积分	
第六章 R_1 中的非負可加集函数	48
6.1. 勒貝克測度和勒貝克积分的推广 6.2. 集函数与点函数	