中国矿业大学新世纪教材建设工程资助教材
创新教育系列教材

数学建模简明教程

shuxue jianmo
jianming jiaocheng

张兴永 编著

.4-43

国矿业大学出版社

935

O141.4-43
Z25

中国矿业大学新世纪教材建设工程资助教材
创新教育系列教材

数学建模简明教程

张兴永　编著

中国矿业大学出版社

责任编辑 姜志方
责任校对 杜锦芝

图书在版编目(CIP)数据

数学建模简明教程/张兴永编著. —徐州:中国矿业大学出版社,2001.9

ISBN 7-81070-406-0

Ⅰ.数… Ⅱ.张… Ⅲ.数学模型—建立模型—高等学校—教材 Ⅳ.O22

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 069441 号

安徽理工大学图書馆 藏書

中国矿业大学出版社出版发行
(江苏徐州 邮政编码 221008)
出版人 解京选
江苏徐州新华印刷厂印刷 新华书店经销
开本 787×1092 1/16 印张 12 字数 285 千字
2001 年 9 月第 1 版 2001 年 9 月第 1 次印刷
印数 1～2000 册 定价:18.00 元

前言

随着数学建模教育的普及和发展，全国各大专院校都在积极开设《数学建模》课程，由于这门课程是通过各种不同的实际问题介绍怎样用数学去解决它的各种方法和途径，培养学生应用数学去分析、解决实际问题的综合能力，所以它越来越受到全国许多大专院校的重视，数学建模教育的受益面将在逐步扩大。

由于数学建模教育正在全国各大专院校蓬勃发展，数学建模的课程建设及教学研究在不断的探索之中，现在虽然国内已出版了一些数学建模教育的教材及参考书，但仍缺乏数学建模教育的普及读物。作者自1994年以来一直从事本科生、研究生的数学建模教育工作，在长期的教学过程中，积累了丰富的教学经验，收集了大量的教学资料，并编写了《数学建模》课程讲义。为了扩大数学建模教育的受益面及满足各院校数学建模教学的需要，在对原讲义进一步修改和完善的基础上，参阅了国内外大量的资料，编写了这本《数学建模简明教程》。本书共分6章，分别介绍了数学模型的基本概念、古典模型、微分方程模型、随机模型、运筹与优化模型及建模范例，书中给出了大量的思考题及供读者练习的各种实际问题。

本书在编写和出版过程中，得到了东南大学朱道元教授、空军后勤学院袁新生教授及中国矿业大学数学建模竞赛教练组成员周圣武副教授、薛秀谦教授、吴宗翔副教授及朱开永副教授的大力支持和帮助，特别是本书获得了中国矿业大学教材出版基金的资助，在此向各位老师、中国矿业大学教材评审委员会、教务处及中国矿业大学出版社深表谢意。

本书的特点是注重解决实际问题的数学建模过程，介绍了大量实际问题的解决方法，由浅入深，通俗易懂，便于教学，特别适用于本科生入门及专科教学等数学建模教育的普及、推广。阅读本书的学生只需具备高等数学、线性代数、概率论的基本知识，个别地方出现的新知识授课教师只要稍加说明，学生即可接受，本书适用于40～60学时的教学。限于编者的水平及出版的时间仓促，编写过程中难免有不妥之处，恳请读者批评指正。

作者

2001年7月1日

目 录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第一章　数学模型基本概念

1.1 引　言

随着社会的进步和科学技术的飞速发展，人类已进入了以计算机、网络、数码、光纤、多媒体等为主要标志的信息时代，各个科技领域都进入了定量化和精确化的阶段，数学越来越广泛地渗透到自然科学、社会科学、工业技术和经济管理等各个领域之中。社会不仅仅需要一些数学家和专门从事数学研究的人才，而更重要和更大量的是需要在各部门中从事实际工作的人善于运用数学知识及数学的思维方法来解决他们每天面临的大量的实际问题，取得经济效益和社会效益。他们不是为了应用数学知识而寻找实际问题，而是为了解决实际问题需要用到数学知识，并且这些实际问题几乎都不能直接套用现成的数学公式，其中的数学奥妙不是明摆在那里等着你去解决，而是暗藏在深处等着你去发现。也就是说，你要对复杂的实际问题进行分析，发现其中的可以用数学语言来描述的关系或规律，把这个实际问题化成一个数学问题，这就称为数学模型，建立数学模型的这个过程就称为数学建模。因此，为了定量研究各领域中的实际问题，首先就必须建立其数学模型；特别是随着计算机的迅速发展，高新科学技术要进入生产，数学模型起着极为重要的作用，如飞机的设计如何在计算机里进行模拟、发射卫星为什么用三级火箭等等都是用的数学模型；再如，荣获诺贝尔医学奖的CT 技术，其核心就是由 X 光成像反推三维结构的数学模型—— Rador 变换。可以说高技术实际上是一种数学技术，因此数学建模在当今改革开放和高科技飞速发展的时代越来越显示其重要性。

数学建模教育及《数学建模》课程普遍进入中国学校虽然是近年来的事情，但这门新的课程一开设，立刻引起强烈的反响，现已在全国许多大专院校蓬勃发展起来，那么这门课程为什么有这么大的吸引力?因为它和其他的数学课程不同，其他的数学课程如《高等数学》等长期以来由于受传统教学思想的影响，着重于知识的传授，以至于大学数学课程学得不错的学生在遇到实际问题时，怎样应用数学知识及方法去解决它感到非常困难，所以学好数学知识不一定能够应用好数学知识，要把数学知识和方法应用到实际的科学技术中去，它不但需要应有的数学知识，把数学的基本思想、基本理论融会贯通，而且更重要的是要了解实际问题的工程、物理背景，即需要一种把数学与实际问题相结合的能力，这就是数学建模能力。而《数学建模》课程正是着重于用数学方法去解决实际问题的思路，着重于怎样解决实际问题的过程，它是通过各种不同的实际问题，介绍怎样应用数学去解决它们的各种方法、途径，培养学生应用数学方法去分析、解决实际问题的能力。

下面先举例解决几个简单的实际问题。

问题 1　已知甲桶中放有 10000 个蓝色的玻璃球，乙桶中放有 10000 个红色的玻璃球。

任取甲桶中 100 个球放入乙桶中，混合后再任取乙桶中 100 个球放入甲桶中，如此重复 3 次，问甲桶中的红球多还是乙桶中的蓝球多？

解：设甲桶中有 x 个红球，乙桶中有 y 个蓝球。

因为对蓝球来说，甲桶中的蓝球数加上乙桶中的蓝球数等于 10000，所以

$$10000 - x + y = 10000$$

即

$$x = y$$

故甲桶中的红球与乙桶中的蓝球一样多。

问题 2 某人早 8 时从山下旅店出发沿一条路径上山，下午 5 时到达山顶并留宿，次日早 8 时沿同一路径下山，下午 5 时回到旅店，则这人在两天中的同一时刻经过途中的同一地点，为什么？

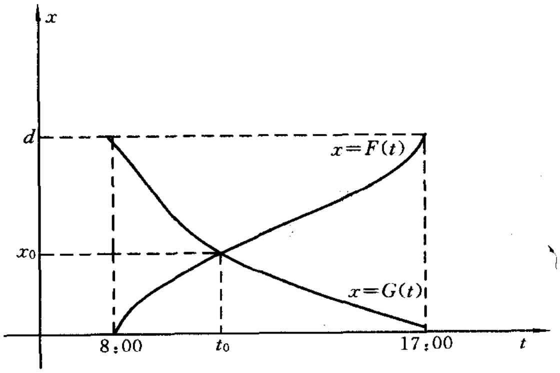

图 1-1

解法一：

将两天看作一天，一人两天的运动看作一天两人同时分别从山下和山顶沿同一路径相反运动，因为两人同时出发，同时到达目的地，又沿同一路径反向运动，所以必在中间某一时刻 t 两人相遇，这说明某人在两天中的同一时刻经过路途中的同一地点。

解法二：

以时间 t 为横坐标，以沿上山路线从山下旅店到山顶的路程 x 为纵坐标，从山下到山顶的总路程为 d；

在 t 时刻：

第一天的行程可设为 $x=F(t)$，则 $F(t)$ 是单调增加的连续函数，$F(8)=0, F(17)=d$；

第二天的行程可设为 $x=G(t)$，$G(t)$ 是单调减少的连续函数，且 $G(8)=d, G(17)=0$，在坐标系中分别作曲线 $x=F(t)$ 及 $x=G(t)$，如图 1-1，则两曲线必相交于 $P(t_0, x_0)$ 点，即这个人两天在同一时刻经过同一地点。

严格的数学论证：

令

$$H(t) = F(t) - G(t)$$

由 $F(t), G(t)$ 在区间 $[8,17]$ 上连续，所以 $H(t)$ 在区间 $[8,17]$ 上连续，又

$$H(8) = F(8) - G(8) = 0 - d = -d < 0$$

$$H(17)=F(17)-G(17)=d-0=d>0$$

由介值定理知在区间[8,17]内至少存在一点 t_0 使 $H(t_0)=0$，即

$$F(t_0)=G(t_0)\qquad (t_0\text{ 是惟一的，为什么？})$$

这说明在早 8 时至晚 5 时之间存在某一时刻 $t=t_0$ 使得路程相等，即这人两天在同一时刻经过路途中的同一地点 $x_0=F(t_0)=G(t_0)$。

思考题：

1. 若下山时，这人下午 3 点就到达山下旅店，结论是否成立？

2. 有一边界形状任意的蛋糕，兄妹俩都想吃，妹妹指着蛋糕上的一点 P，让哥哥过点 P 切开一人一半，能办到吗？

问题 3　在一摩天大楼里有三根电线从底层控制室通向顶楼，但由于三根电线各处的转弯不同而有长短，因此三根电线的长度均未知。现在工人师傅为了在顶楼安装电气设备，需要知道这三根电线的电阻。如何测量出这三根电线的电阻？

任何万用表也不能把一头放在十几层楼高的房间里的 a' 处，另一头放在底楼控制室的 a 处，这该怎么办？

方法：不妨用 a,b,c 及 a',b',c' 分别表示三根电线的底端和顶端，并用 aa',bb',cc' 分别表示三根电线，假设 x,y,z 分别是 aa',bb',cc' 的电阻，这是三个未知数。电表不能直接测量出这三个未知数。然而我们可以把 a' 和 b' 连接起来，在 a 和 b 处测量得电阻 $x+y$ 为 l；然后将 b' 和 c' 联接起来，在 b 和 c 处测量得 $y+z$ 为 m，联接 a' 和 c' 可测得 $x+z$ 为 n，这样得三元一次方程组

$$\begin{cases}x+y=l\\y+z=m\\x+z=n\end{cases}$$

由三元一次线性方程组解出 x,y,z 即得三根电线的电阻。

说明：此问题的难点也是可贵之处是用方程“观点”、“立场”去分析，用活的数学思想使实际问题转到新创设的情景中去。

问题 4　气象预报问题

问题：在气象台 A 的正西方向 300 km 处有一台风中心，它以 40 km/h 的速度向东北方向移动；根据台风的强度，在距其中心 250 km 以内的地方将受到影响，问多长时间后气象台所在地区将遭受台风的影响？持续时间多长？

此问题是某气象台所遇到的实际问题，为了搞好气象预报，现建立解析几何模型加以探讨。

以气象台 A 为坐标原点建立平面直角坐标系，设台风中心为 B，如图 1-2。

根据题意，B 点的坐标为(−300,0)，单位为 km，台风中心的运动轨迹为直线 BC，这里的 $\angle CBA=45°$，当台风中心在运动过程中处于以 A 为圆心、半径为 250 km 的圆内（即 MN 上）时，气象台 A 所在地区将遭受台风的影响。

因为圆的方程为：

$$x^2+y^2=250^2$$

直线 BC 的方程为：

$$\begin{cases} x = -300 + 40t\cos45^\circ \\ y = 40t\sin45^\circ \end{cases}$$

其中参数 t 为时间(单位为 h)。

当台风中心处于圆内时,有:

$$(-300 + 2\sqrt{2}t)^2 + (20\sqrt{2}t)^2 \leqslant 250^2$$

解得

$$2.0 \leqslant t \leqslant 8.6 \quad (\text{精确到 } 0.1)$$

所以,大约在 2 h 以后气象台 A 所在地区将会遭受台风的影响,持续时间大约为 6.6 h。

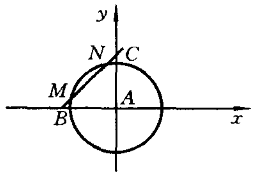

图 1-2

通过以上几个简单问题的解决可以看出,在我们周围的许多实际问题,甚至有些实际问题看起来好像与数学无关,但通过细致的观测、分析及假设,都可以应用数学方法简捷和完美地解决。这说明只要善于观察和分析,数学的应用是非常灵活和十分广泛的。

1.2 数学模型基本概念

1.2.1 模型

什么叫模型?虽然没有统一的定义,但其实质为:模型就是对现实原型的一种抽象或模仿。这种抽象或模仿自然要抓住原型的本质,抛弃原型中的次要因素。从这个意义上讲,模型既反映原型,又不等于原型,或者说它是原型的一种近似。如地球仪这个模型,就是对地球这一原型的本质和特征的一种近似和集中反映;一个人的塑像就是这个人的一个模型。按照这种说法,模型的含义非常广泛,如自然科学和工程技术中的一切概念、公式、定律、理论,社会科学中的学说、原理、政策,甚至小说、美术、表格、语言等都是某种现实原型的一种模型。

如:牛顿第二定律 $F=ma$ 就是"物体在力的作用下,其运动规律"这个原型的一种模型(数学模型)。

"吃饭"这句话就是人往嘴里送东西达到充饥的动作的抽象,如此等等都可看作是模型。

模型的含义既然如此广泛,那么它的意义是不可估量的。

如:我国改革开放的方针、政策就是我国实现四化的政策性模型之一,有了它我国的社会主义建设就稳步前进,人民生活不断改善。

在自然界里,许多实际问题的解决是通过模型实现的,如飞机的设计首先要制造模型;为了练习射击的准确性,通常是对着靶子练习而不是对着人练习;一项优化设计模型,既可使该项设计科学可靠,又可取得相当大的经济效益,如三峡工程模型、核电站设计模型等。因此模型在现实生活中具有重要意义。

那么什么是数学模型?

1.2.2 数学模型的几个简单例子

1. 万有引力定律:$F=K\dfrac{m_1m_2}{r^2}$

万有引力定律是描述物体之间的力学规律,它的发现是牛顿(1642~1727)在力学上的重大贡献之一。牛顿在研究力学的过程中发明了微积分,又成功地在开普勒三定律的基础上运用微积分推导出了万有引力定律,这一创造性的成就可以看作为历史上最著名的数学模

型之一。

牛顿认为一切运动都有其力学原因,开普勒三定律的背后必定有某个力学规律在起作用,他要构造一个模型加以解释,终于他以自己发明的微积分作为工具,在开普勒三定律和牛顿第二定律的基础上演绎出万有引力定律,这一定律只所以被视为牛顿在力学上的最伟大的贡献之一,被视为历史上最著名的数学模型之一,是因为这一定律成功地定量解释了许多自然现象,包括天体的星球运动,并且也为其后一系列的观测和实验数据所证实,因此成为物理学中的一个基本定律。

所以科学上常常建立(数学)模型或假设,最低限度必须满足下列两个条件:

(1) 它不仅能说明特定的两三个事情,而且必须能说明许多事实。

(2) 利用该模型所预测的事物,必须使任何人都承认是成立的。

因此,所建立的数学模型要能够统一地说明许多现象,而且希望它尽可能简单、精确一些。

2. 冷却问题

将温度为 $T_0=150$℃的物体放在温度为 24℃的空气中冷却,经 10 min 后,物体温度降为 $T_0=100$℃,问 $t=20$ min 时,物体的温度是多少?

分析:该问题仅涉及必然现象,且是一个冷却现象的物理问题,自然要用到牛顿冷却定律:物体在空气中的冷却速度与该物体的温度及空气温度之差成正比。因为冷却定律涉及到冷却速度,这反映在数学上必然要用到微分方程。经过上述分析,物体的物理规律和数学描述都搞清楚了,模型便可直接建立。

解:设物体的温度 T 随时间 t 的变化规律为 $T=T(t)$,则由冷却定律及条件可得:

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=-k(T-24)\\ T(0)=150\end{cases}$$

其中 $k>0$ 为比例常数,负号表示温度是下降的,这就是所要建立的数学模型。

由于这个模型是一阶线性微分方程,很容易求出其特解为:

$$T=126\mathrm{e}^{-kt}+24$$

由 $T(10)=100$,可定出 $k\approx 0.05$。

所以

$$T=126\mathrm{e}^{-0.05t}+24$$

当 $t=20$ 时

$$T(20)=126\mathrm{e}^{-0.05\times 20}+24\approx 64℃$$

此数学模型是通过数学手段直接建立的,由此知:对于实际问题要建立数学模型,不但要用到数学知识,而且更重要的要知道相关的专业知识,如本例若不知道冷却定律就很难建立数学模型。

思考题:估计凶杀的作案时间

某天晚上 11:00,在一住宅内发现一受害者的尸体,法医于晚上 11:35 赶到现场,立刻测量死者的体温为 30.8℃,一小时后再次测量死者体温为 29.1℃,法医还注意到当时室内温度为 28℃,试估计受害者的死亡时间。(要解决上面的问题还需要加什么条件?)

3. 七桥问题

在 18 世纪哥尼斯堡城(原苏联的加里宁格勒)有七座桥联系着两岛 A 和 B 及陆地 C 和

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

D,如图 1-3(a)。每当晚霞时,哥尼斯堡的大学生们都喜欢到桥上散步,久而久之,他们提出这样的问题:

(1) 能否不重复地一次走完七座桥?

(2) 能否不重复地一次走完七座桥又回到原地?

当时很多人对这个有趣的问题做了大量的试验均未成功,这就是著名的哥尼斯堡七桥问题。

那么这个问题是否有解?

后来有人写信向当时著名的数学家欧拉请教,据说欧拉用了两天两夜的时间解决了这个问题。

欧拉方法:岛 A、B 和陆地 C、D 无非都是桥的联结点,因此不妨把 A、B、C、D 看成 4 个点,把七桥看成联结这些点的七条线,如图 1-3(b)。

这样当然不改变问题的实质,于是一人能否不重复一次通过七座桥的问题等价于其网络图能否一笔画成的问题(这是思维的飞跃),此网络图 1-3(b)就是七桥问题的数学模型。

欧拉证明了七桥问题是无解的,并给出了一般结论:

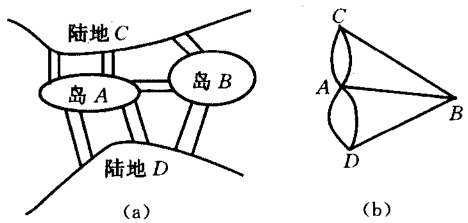

图 1-3

(1) 联接奇数个桥的陆地仅有一个或超过两个以上,不能实现一笔画。

(2) 联接奇数个桥的陆地仅有两个时,则从两者任一陆地出发,可以实现一笔画而停在另一个陆地。

(3) 每个陆地都联接有偶数个桥时,则从任一陆地出发都能实现一笔画,而回到出发点。

说明:

(1) 数学模型不一定都是数学表达式,如七桥问题的数学模型是一个网络图。

(2) 欧拉解决七桥问题时,超出了过去解决问题所用数学方法的范畴,充分发挥自己的想像力,用了完全崭新的思想方法(可称为几何模拟方法),从而使问题解决得十分完美,结论明确而简捷。由于他的开创性的工作,产生了"图论"这门学科,欧拉是人们公认的图论的创始人。

(3) 图论是一门非常有用的学科,很多实际问题都可化为图论问题解决。

问题:某仓库要存放 7 种化学药品,用 $V_1, V_2, \cdots, V_7$ 分别表示 7 种药品,已知不能存放在一起的药品为(V_1,V_2),(V_1,V_4),(V_2,V_3),(V_2,V_5),(V_2,V_7),(V_3,V_4),(V_3,V_6),$(V_4,V_5,)$,(V_4,V_7),(V_5,V_6),(V_5,V_7),(V_6,V_7),问至少应把仓库分成多少隔离区才能确保安全?

解:先把各种药品作为节点,节点集为 $V=\{V_1,V_2,V_3,V_4,V_5,V_6,V_7\}$,然后把不能存放

在一起的药品用边相连，这样就构成一个图，如图 1-4。

为了决定分区，要对药品进行分区编号，规则如下：

1. 各边的两个节点不能编在同一区号；

2. 为节省分区，以 A 区、B 区、C 区……顺序编号，且尽量使用小的区号。

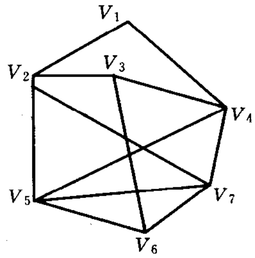

图 1-4

现按次序由规则将各节点逐个编号，先将 V_1 编在 A 区，因为 V_2 与 V_1 有边相连，所以把 V_2 编在 B 区，又 V_3 与 V_2 有边相连，但与 V_1 无边相连，故将 V_3 编在 A 区……依次类推，最后一点 V_7 既与 V_5 相连，也与 V_2，V_4 相连，所以 V_7 既不能编在 A 区，也不能编在 B 区，只好编在 C 区，从而这 7 种药品可用 3 个隔离区存放，每个区存放的药品分别为：

A 区：V_1，V_3，V_5；

B 区：V_2，V_4，V_6；

C 区：V_7。

对于 n 种药品，同样可根据上述规则，通过计算机依次编区。

4. 最佳场址的选择问题

设有 n 个车间位于不同的地点 $P_i(i=1,2,\cdots,n)$，现拟建一仓库 P，长期向各车间运送原材料和产品，问 P 应建在何处，才能使总运费在一定时期内达到最小？

如果我们抛弃次要因素，便可近似地认为运费等于货重与运输距离的乘积；取平面坐标系，设各 p_i 及 P 的坐标分别为 $p_i(x_i,y_i)$，$P(x,y)$。在一定时期内，各车间 p_i 需运进和运出的货物总重量为 w_i，则在该时期内的总运费为：

$$C(x,y)=\sum_{i=1}^{n} w_i\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}$$

所以问题变为寻求 $P(x,y)$，使 $C(x,y)$ 达到最小，这便是此问题的数学模型。

那么是否还有其他方法？

物理模拟法：

做一个坐标刻度的板面，在相应车间所在的坐标位置处钻洞，通过每一个洞穿过一条细绳，一端垂在板下并吊一个砝码，其重量 $\overline{w_i}$ 与车间用料及产品重量 w_i 相对应（取一个比例数即可），另一端都在板面上，且与同一个小环相连，最后小环停留下来的平衡位置，就是使总运费最小的那个位置 P。

5. 走路问题

问题：人在恒速行走时，步长多大才最省劲？

假设人的体重为 M，腿重为 m，腿长为 l，速度为 v，单位时间步数为 n，步长为 x，其中 $v=nx$。

人行走时所作的功可以认为由两部分组成：即抬高人体重心所需的势能与两腿运动所需动能之和。下面分别计算两部分的做功：

（1）重心升高所需的势能

将人的行走简化成如图 1-5 所示，若记重心升高为 δ，则

$$\delta = l - l\cos\theta = l - l(1-\sin^2\theta)^{\frac{1}{2}} = l - l\left(1 - \frac{x^2}{4l^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

假定$\frac{x}{l}$较小，取$\left(1-\frac{x^2}{4l^2}\right)^{\frac{1}{2}}$的二项展开式的前两项，得

$$\delta \approx l - l\left(1 - \frac{x^2}{8l^2}\right) = \frac{x^2}{8l}$$

于是，单位时间重心升高所需势能 W 为：

$$W = nMg\delta = \frac{Mgv}{8l}x \qquad (\text{其中 } v = nx)$$

(2) 腿运动所需的动能

我们将人行走视为均匀直杆(腿)绕腰部的转动，则在单位时间内所需动能 E 为：

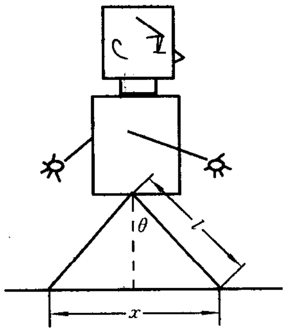

图 1-5

$$E = \frac{1}{2}I\omega^2 \cdot n$$

其中转动惯量

$$I = \int_0^l \frac{m}{l}r^2\mathrm{d}r = \frac{1}{3}ml^2$$

$$\omega = \frac{v}{l}$$

ω 为角速度。

所以

$$E = \frac{n}{2}\frac{ml^2}{3}\left(\frac{v}{l}\right)^2 = \frac{n}{6}mv^2 = \frac{mv^3}{6x}$$

于是，单位时间所作的功 P 为

$$P = W + E = \frac{Mgv}{8l}x + \frac{mv^3}{6x} \qquad (*)$$

因为做功少就省劲，所以问题就变成寻求步长 x 使单位时间内作的功 P 最小。

这是一个简单的极值问题。

令

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} = 0$$

所以

$$x = \sqrt{\frac{4mlv^2}{3Mg}}, n = \sqrt{\frac{3Mg}{4ml}}$$

若以 $M : m = 4 : 1$，$l = 1$ m 代人上式，可得

$$n \approx 5$$

即每秒 5 步，这显然太快了。

今对模型($*$)作如下修改：假设腿重集中在脚上，这样腿的运动所需动能即为脚作直线运动所需动能，于是

$$E' = n \cdot \frac{1}{2}mv^2 = \frac{mv^3}{2x}$$

从而

$$P' = \frac{Mgv}{8l}x + \frac{mv^3}{2x}$$

求极值可得

$$n = \sqrt{\frac{Mg}{4ml}} \approx 3$$

这是比较符合实际情况的。

1.2.3 数学模型基本概念

前面已介绍了几个数学模型实例，由此对数学模型的概貌有所了解，本节将介绍什么是数学模型及建立数学模型的方法和步骤。

1. 数学模型的定义

现在数学模型还没有一个统一的定义，因为站在不同的角度可以给出不同的定义。下面给出数学模型的一种定义。

数学模型就是指对于现实世界的某一特定对象，为了某个特定的目的，做出一些必要的简化和假设，运用适当的数学工具得到的一个数学结构；它或者能解释特定现象的现实性态，或者能预测对象的未来状况，或者能提供处理对象的最优决策或控制等。

具体说，数学模型就是为了某种目的，用字母、数字及其他数学符号建立起来的等式或不等式及图表、图像、框图等描述客观事物的特征及内在联系的数学结构。

2. 建立数学模型的方法和步骤

(1) 观察　在建模前应对实际问题的背景有深刻的了解，进行全面的深入细致的观察，明确所要解决问题的目的要求，并按要求收集必要的数据，且数据必须符合所要求的精确度。

(2) 现实问题的理想化　现实问题错综复杂，涉及面广，必须先将问题理想化、简单化，即首先抓住主要因素，暂不考虑次要因素。理清变量之间的关系，进行必要的假设，要注意的是不同的假设会得到不同的模型，这一步是建立模型的关键。

如果假设合理，则模型与实际问题比较吻合，如果假设不合理或过于简单(即过多地忽略了一些因素)，则模型与实际情况不吻合或部分吻合，就要修改假设，修改模型。

(3) 建立数学模型　根据已有假设，可以着手建立数学模型。

建立数学模型应注意以下几点：

① 分清变量类型，恰当使用数学工具。如果实际问题中的变量是确定性变量，建模时数学工具多用微积分、微分方程、线性规划、非线性规划、网络、投人产出、确定性存储论等。如果变量是随机变量，数学工具多用概率、统计及随机性存储论、排队论、对策论、决策论等。由于数学分支很多，加之相互交叉渗透，又派生许多分支，具体用什么数学知识，应看自己对哪方面比较熟悉精通，尽量发挥自己的特长。总之，对变量进行分析是建立数学模型的基础。

② 抓住问题的本质，简化变量之间的关系。因为模型过于复杂，则求解困难或无法求解，因此应尽可能用简单的模型如线性化、均匀化等来描述客观实际。

③ 建立数学模型时要有严密的数学推理。模型本身(如微分方程或图形)要正确，否则造成模型失败，前功尽弃。

④ 建模要有足够的精度。即要把实际问题(原型)本质的东西和关系反映进去，把非本质的东西去掉，同时注意要不影响反映现实的真实程度。

(4) 模型求解　不同的模型要用不同的数学知识求解，特别是要借助于计算机这个工具。

(5) 模型的分析、验证　一个模型是否反映了客观实际，可用已有的数据去验证，如果由模型计算出来的理论数值与实际数值比较吻合，则模型是成功的；如果理论数值与实际数值差别太大，则模型是失败的；如果理论数值与实际数值部分吻合，则可找原因，发现问题，修改模型(当然并非所有模型都要验证)。

(6) 模型的修改　因为数学问题往往比较复杂，但由于理想化抛弃了一些次要因素，因此模型与实际问题就不完全吻合了。此时，要分析假设的合理性，将合理部分保留，不合理部分修改，对实际问题中次要因素再次分析，如果某一因素被忽略而使前面模型失败或部分失败，则再建立模型时把它考虑进去。有时可能要去掉一些变量，改变一些变量的性质，如把变量看成常量，连续变量看成离散变量，离散变量看成连续变量。或改变变量之间的函数关系，如线性改为非线性等。

以上步骤也可用图 1-6 表示。

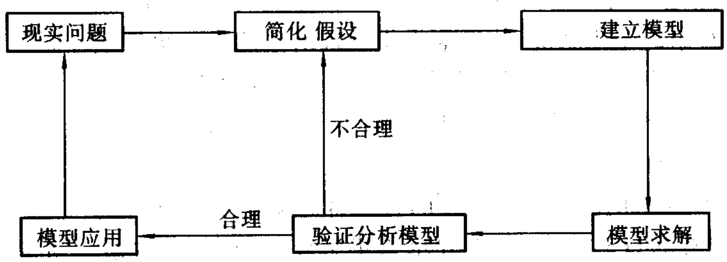

图 1-6

由上可知，要掌握好数学建模的方法并不容易，它是应用数学的艺术。由于数学建模的广泛性及重要性和实际问题的复杂性，要掌握这门艺术，必须见多识广，善于揣摩别人的思想方法，多实践，多体会。当然，并不是说所有建模过程都要经过这些步骤，有时各个步骤之间的界限也并不那么分明。建模过程中不要局限于形式上的按步就班，重要的是根据对象的特点和建模的目的，去粗取精，抓住关键，从简到繁，不断完善。

3. 数学模型的分类

模型分类在这门课程中并没有什么重要意义，因为问题本身以及解决问题的方法，按照人们的各种不同分法，它既可属于这个类型又可属于那个类型。下面简单介绍几种分类方法。

(1) 按变量性质分

$\begin{cases}\text{离散模型}\\ \text{连续模型}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\text{确定性模型}\\ \text{随机性模型}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\text{线性模型}\\ \text{非线性模型}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\text{单变量模型}\\ \text{多变量模型}\end{cases}$

(2) 按时间关系分

$\begin{cases}\text{静态模型}\\ \text{动态模型}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\text{参数定常的模型}\\ \text{参数时变的模型}\end{cases}$

(3) 按研究方法分

初等模型、微分方程模型、概率统计模型、运筹学模型等。

(4) 按研究对象所在领域分

经济模型、生态模型、人口模型、交通模型等。

……

下面我们并不是完全按照某个模型分类编排，而是适当结合研究问题所用的方法及研究对象所属的领域来编排，希望在学习中要把注意力集中在各个数学模型本身的内容上，通过学习各个模型建立的不同的数学思考方法，达到举一反三的目的，不要过多地考虑各章节的划分和标题的取名。

4. 建模课程对学生能力的培养

(1) “翻译能力”。即把一定抽象、简化的实际问题用数学语言表达出来，形成数学模型，再用数学方法进行推演或计算，得到结果后能把这些数学结果用“常人”能懂的语言翻译出来。

(2) 综合数学应用及分析能力。即把已学到的数学知识进行综合应用、分析，并能理解对实际问题进行合理简化及进行数学分析的重要性，在数学建模过程中发挥应用数学的能力。

(3) 发展联想能力。因为对于不少完全不同的实际问题在一定的简化层次下，它们的数学模型是相同的或相似的，这正是数学应用的广泛性的表现，通过熟能生巧真正发展建模能力并能逐步达到触类旁通的境界。

(4) 逐渐形成一种洞察能力，即抓住实际问题要点的能力。

由此可见，为了培养建模能力，首先要广泛地学习自然科学、工程技术和社会科学等有关的知识，掌握这些领域的定律、法则、规律和公式，这样才能有助于提高建模的实际工作能力；其次在学习过程中要自己动手解决一些实际问题，这是数学建模能力提高的不可缺少的基本训练。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com