黎曼幾何與張量算法

C. E. Weatherburn 著
周 紹 濂 譯

商 務 印 書 館

大學叢書

黎曼幾何與張量算法

C. E. Weatherburn 著
周紹濂 譯

商務印書館

黎曼幾何與張量算法內容提要

這本書是從劍橋大學出版社 1942 年重印的 C. E. Weatherburn 著的 An Introduction to Riemannian Geometry and the Tensor Calculus 翻譯出來的；與譯者前譯"微分幾何"和"曲面幾何"兩書成爲系統。這本書是從歐幾里得三維空間的微分幾何進而學習高深的多維空間的微分幾何的橋梁。全書用張量算法爲工具。書末並附有關於多維空間研究和黎曼幾何發展過程的史略。

大學叢書

黎曼幾何與張量算法

周紹濂譯

商務印書館出版
上海河南中路二一一號

中國圖書發行公司發行

商務印書館上海廠印刷
㊥(52623)

1953年5月初版　版面字數151,000
印數1—2,000　定價¥14,000

上海市書刊出版業營業許可證出〇二五號

譯者序

自從 1887 年李西 (Ricci) 創用張量算法，建立完美且易了解之符號，使分析幾何物理各方面皆便於採用，黎曼幾何研究範圍因之大加推廣。1913—1916 年間愛因斯坦以四維黎曼空間爲基礎，以張量算法爲工具，發表其一般相對論之理論，更造成研究張量算法與黎曼幾何之絕大動力。前此之治此學者，多屬爲治此學而治此學。自一般空間之幾何學在物理與天文學中具同樣之重要性後，研究此學之人士驟增。時至今日黎曼幾何與張量算法，不獨爲治分析與幾何學者所不可不讀，即研究物理、天文與夫欲求了解宇宙者，均應人手一篇。

本書取材適宜，說理淸晰，爲由三維歐氏空間微分幾何進習一般高維空間微分幾何之津梁。全書用張量算法使分析化簡而幾何之理益明。其論子空間之幾何，則採用美也 (Mayer) 所創推廣協變微分法更便研究。1940 年余講授黎曼幾何於重慶大學與中央大學，即以此爲講稿，深覺其合乎我國學生程度，既爲優良教本復爲一美好之參考書籍，乃送香港商務印書館出版。自太平洋戰事發生後，此稿即無消息。客秋查詢，方悉未成灰燼，即利用在復旦大學講授黎曼幾何之便，重復閱讀，覺其內容仍屬十分新穎，且爲祖國所急需者，特以付梓。

本書譯名力求簡單明瞭，凡通行之名詞可以採用者儘量採用。惟 Normal line 一詞有譯爲法線者，似未能聯繫實際，而有矯正之必要，爰按其正交之性質，譯爲正線。又本書中 Hypersurface 和 Hypersphere 爲超凡曲面和超凡球面，他書有譯爲超曲面，超球面者。吾國數學術語尙在釐訂之中，譯者譾陋，譯述未妥之處，在所難免，祈海內學者賜教指正。

周紹濂，1952 年 8 月，於上海復旦大學。

著者序

本書編著目的在樹立由三維歐氏空間微分幾何進習高深一般空間微分幾何之津梁。全書敍述以李西(Ricci)及萊維西維太(Levi-Civita)之張量算法爲工具；爲此算法及黎曼幾何二者之通論。余力圖分析化簡而加強幾何觀念。由應用 1930 年美也 (Mayer) 所創及其他數學家所完成之一般協變微分法于空間之幾何業已簡化。本書更採用義大利與璞玲賽敦(Princeton)二派之記號與方法；並依萊維西維太之先例應用克拉蘭頓(Clarendon)符號表有協變分量且兼有逆變分量之向量。

百年來多維空間微分幾何因爲其本身上之價值引起學者之研究；近則由其對一般相對論之應用而增加其重要性。故余冀本書對注意於相對論之數學理論者有所臂助。書末附以史略，藉增興趣，而此不列入卷首者，蓋以讀者必須先有書中之一部份知識而後始能鑑賞也。

C. E. Weatherburn

1938 年 3 月於西澳大利亞白城 (Perth, W. A.)

目　錄

黎曼幾何與張量算法

第一章　緒論

1. 行列式・總和記法.

在敍述微分幾何主題以前，略言今後需用之代數及分析之若干結果,並解釋所用之符號。

本書爲假定讀者已知行列式之基本性質。若 i,j 二數能爲由1至 n 間之所有正整數,則 n^2 個量 a_j^i 可取爲一 n 級行列式之元素,即

$$a=\begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots\cdots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots\cdots & a_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^n & a_2^n & \cdots\cdots & a_n^n \end{vmatrix}, \qquad \cdots(1)$$

此爲諸元素之齊 n 次多項式。符號 a_j^i 之上誌 i 爲表該元素所在之行,而下誌 j 爲表列。此行列式又常簡表爲 $|a_j^i|$。若對 i 及 j 之所有值 $a_j^i=a_i^j$,則行列式爲對稱 (Symmetric)；又若 $a_j^i=-a_i^j$, 則爲反對稱 (Skew-Symmetric)。

命 A_i^j 表行列式 a 內元素 a_j^i 之餘因子,則 i 行(或列)之元素與 j 行(或列) 之相應元素之餘因子之乘積之和當 $i=j$ 時爲 a, 當 $i\neq j$ 時爲零。由是

$$a_1^i A_j^1+a_2^i A_j^2+\cdots\cdots+a_n^i A_j^n=a\delta_j^i,$$

其中符號 δ_j^i 定之如次:

$$\left.\begin{array}{ll}\text{若 } i=j, & \delta^i_j=1 \\ \text{若 } i\neq j, & \delta^i_j=0\end{array}\right\}。\qquad \cdots(2)$$

又

此等符號曰克若尼克德塔(Kronecker deltas),今後常用之,上之方程式,及由行列交換而得者,可表之爲

$$\sum_k^{1,\cdots,n} a^i_k A^k_j = a\delta^i_j,$$

及

$$\sum_k^{1,\cdots,n} a^k_i A^j_k = a\delta^j_i。$$

由愛因斯坦(Einstein)之總和記法(Summation convention)可略去總和之符號而簡書爲

$$a^i_k A^k_j = a\delta^i_j, \qquad \cdots(3)$$

及

$$a^k_i A^j_k = a\delta^j_i。 \qquad \cdots(3')$$

依此,當同一指標出現於任一項內爲一上誌及一下誌時,此項表該指標取其可能之值而得之諸項之和。在(3)或(3′)內指標 k 出現於同一項內爲下誌及上誌;則此單獨一項代表 n 項之和。重複指標曰虛位(Dummy 或 Umbral)指標,蓋算式之值與此指標所用之符號爲無關也。由是

$$a^i_k A^k_j = a^i_h A^h_j。$$

又依總和記法而有

$$\delta^i_i = \delta^1_1 + \delta^2_2 + \cdots\cdots + \delta^n_n = n。 \qquad \cdots(4)$$

故有書方程式(2)之前一式如其形之必要。

(1)之元素之 n^2 個餘因子 A^j_i 之行列式曰 a 之附屬式(Adjoint),並以A表之。由是

$$A=|A^j_i|。$$

在此易知❶

$$A=a^{n-1}。 \qquad \cdots(5)$$

❶ 見 Bôcher, 1907, 1, p. 33。參考書名見書末之參考文獻。

作同級二行列式之乘積之法則可以總和記法表之。據此法則行列式$|a^i_j|$及$|b^i_j|$之乘積爲一行列式，其元素爲

$$p^i_j = a^i_k b^k_j。$$

由是

$$|a^i_j| \cdot |b^i_j| = |a^i_k b^k_j|。$$

再應用此規則得示

$$|a^i_j| \cdot |b^i_j| \cdot |c^i_j| = |a^i_k b^k_l c^l_j|,$$

餘類推。

2. 行列式之微分法.

若行列式 a 之元素皆爲獨立變數 $x, y, \cdots\cdots$ 之函數，則 a 對此等變數之導微函數爲由具

$$\frac{\partial a}{\partial x} = A^j_i \frac{\partial}{\partial x} a^i_j \qquad \cdots(6)$$

形之公式定之，其中右端表一二重和，重複指標 i, j 各取由 1 至 n 之所有整數。

欲證此公式，試觀此行列式之展式爲包含諸項之和，而各項爲 n 個元素之乘積。此和之導微函數亦爲諸項之和。其中各項爲 $n-1$ 元素與另一元素之導微函數之乘積；而各元素之導微函數皆出現於和之中。若彙集所有含元素 a^i_j 之導微函數之諸項，則由(3)易見此導微函數之係數爲 A^j_i。由是，表 a 之導微函數之總和爲具

$$A^j_i \frac{\partial}{\partial x} a^i_j$$

形之諸項之和，此總和包括對行列式之所有元素，即包括所有各行及所有各列者。但此總和已由上述該項內重複指標指明之。故有公式(6)。

3. 矩陣・矩陣之秩.

mn 個量之一系，依 m 行及 n 列排列者，曰矩陣(Matrix)。以 a^i_j 表

此 mn 個量，i 之值爲 $1,2,\cdots,m$ 及 j 之值爲 $1,2,\cdots,n$。則矩陣恆表如次形

$$\begin{Vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots\cdots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots\cdots & a_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ a_1^m & a_2^m & \cdots\cdots & a_n^m \end{Vmatrix}$$

或簡爲

$$\|a_j^i\| \qquad \begin{pmatrix} i=1,2,\cdots,m \\ j=1,2,\cdots,n \end{pmatrix}.$$

若 $m=n$，則此矩陣曰 n 級之方陣(Square matrix)；行列式 $|a_j^i|$ 曰此方陣之行列式。

由棄去矩陣之若干行或列(或二者)可得其他矩陣。特別依此可得若干方陣，其行列式曰原矩陣所含之行列式。若矩陣由 m 行 n 列組成，則此矩陣含有由一至 m,n 二整數之小者之所有各級行列式，但常遇高於某整數之各級行列式皆爲零者。矩陣所含之最高級非零之行列式之級曰此矩陣之秩(Rank)。由是，若秩爲 r，則矩陣至少含一 r 級之行列式其值非零，而其級高於 r 之所有行列式皆爲零。

4. 一次方程式・克蘭曼法則.

研究一系 n 個一次方程式

$$\left.\begin{array}{l} a_1^1x^1+a_2^1x^2+\cdots\cdots+a_n^1x^n=b^1 \\ a_1^2x^1+a_2^2x^2+\cdots\cdots+a_n^2x^n=b^2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_1^nx^1+a_2^nx^2+\cdots\cdots+a_n^nx^n=b^n \end{array}\right\} \qquad \cdots(7)$$

其中 n 個未知數 $x^1,x^2,\cdots\cdots,x^n$ 之上誌僅爲區別各異之指示，並無"乘方"之關係。諸式左端之係數行列式 $|a_j^i|$ 爲行列式(1)；其值將以 a 表之；又 A_i^j 與上同，將用以代表元素 a_j^i 之餘因子。

應用總和記法可書方程式(7)之第 i 式爲

$$a_j^i x^j = b^i。\quad \cdots(8)$$

若乘以 A_i^k,並求對 i 由 1 至 n 之所有值之和,則

$$A_i^k a_j^i x^j = A_i^k b^i,$$

此由(3′)爲相當於

$$a\delta_j^k x^j = A_i^k b^i。$$

今於此方程式左端所表之和內,j 取 $1, 2, \cdots\cdots, n$ 諸值,除 j 之值爲 k 外,所有諸量 δ_j^k 皆爲零。由是方程式化爲

$$ax^k = A_i^k b^i,$$

因此祇要 a 不爲零,系(7)之解爲

$$x^k = \frac{A_i^k b^i}{a}。\quad \cdots(9)$$

此爲解一次方程式之克蘭曼 (Cramer) 法則。次設有一系含 n 個變數之 m 個方程式,

$$\left.\begin{array}{l} a_1^1 x^1 + a_2^1 x^2 + \cdots\cdots + a_n^1 x^n = b^1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_1^m x^1 + a_2^m x^2 + \cdots\cdots + a_n^m x^n = b^m \end{array}\right\}。\quad \cdots(10)$$

矩陣

$$\|a_j^i\|, \qquad \begin{pmatrix} i=1, 2, \cdots\cdots, m \\ j=1, 2, \cdots\cdots, n \end{pmatrix}$$

曰方程式系之矩陣,同時

$$\left\|\begin{array}{ccccc} a_1^1 & a_2^1 & \cdots\cdots & a_n^1 & b^1 \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^m & a_2^m & \cdots\cdots & a_n^m & b^m \end{array}\right\|$$

曰增廣矩陣 (Augmented matrix)。吾人可證方程式系爲相容之必要

兼充分之條件爲此系之矩陣與增廣矩陣爲同秩[1]。若此條件適合，及 r 爲二矩陣之公秩，則 $n-r$ 未知數之值可以任意指定，而其餘未知數因此各有唯一之定值。

最後研究由(10)命所有諸量 b 等於零而成之齊一次方程式系。因增廣矩陣與方程式系矩陣必須爲同秩，則該系有一或多個解。又若系之秩爲 r，則如上之所述其中 $n-r$ 個未知數之值可任意指定，而其餘則因此各有唯一之定值。若 $r=n$，則僅有一解而易見爲

$$x^1=x^2=\cdots\cdots=x^n=0。\qquad\cdots(11)$$

欲可有異於(11)之一解存在，方程式系之秩必須小於 n。特例，若方程式之個數小於未知量之個數，則方程式常有異於(11)之解。若 $m=n$，則有一解異於(11)之必要兼充分之條件爲係數行列式爲零。

5. 一次變換.

在研究代數或分析問題中，爲便利起見有時須作變數變換，即取原有變數之某數函數爲新變數，一特殊重要者爲新變數爲原有變數之齊一次多項式。變數如此變換曰齊一次（或線性）變換（Homogeneous linear transformation）。若 $x^1,x^2,\cdots\cdots,x^n$ 爲原有變數及 $y^1,y^2,\cdots\cdots,y^n$ 爲新變數，則變換可以次之方程式表之：

$$\left.\begin{array}{l} y^1=a^1_1x^1+a^1_2x^2+\cdots\cdots+a^1_nx^n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y^n=a^n_1x^1+a^n_2x^2+\cdots\cdots+a^n_nx^n \end{array}\right\}\qquad\cdots(12)$$

其中係數 a^i_j 爲常數。若此諸常數皆爲實數，則變換曰實變換。矩陣 $\|a^i_j\|$ 曰變換矩陣，其行列式曰變換行列式，若此行列式爲零則變換曰爲降秩者（Singular）；否則曰爲滿秩者（Non singular）。依總和記法，變換(12)可簡表爲

[1] Bôcher, 1907, 1, p.46；或 Dickson, 1940, 4, p.63。

$$y^i = a^i_j x^j, \qquad \cdots(12)$$

$$(i, j = 1, 2, \cdots\cdots, n)。$$

設變換爲滿秩者。解方程式(12)以諸 y 表諸 x，則依克蘭曼法則得

$$x^i = \frac{1}{a} A^i_j y^j。 \qquad \cdots(13)$$

(13)所表之變換曰(12)之反變換。因(12)爲滿秩者則(13)亦然；蓋由(5)，(13)之行列式之値爲

$$a^{-n} |A^i_j| = a^{-1}。$$

6. 函數行列式.

試研究 n 個變數之 n 個函數

$$y^i(x^1, x^2, \cdots\cdots, x^n), (i = 1, 2, \cdots\cdots, n)。$$

此各函數與其導微函數在所論之區域內爲有限且連續，則諸 y 對諸 x 之函數行列式 (Functional determinant)（或稚科比）爲一 n 級行列式，其元素爲諸函數對諸 x 之偏導微函數，即行列式

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x^1} & \frac{\partial y^1}{\partial x^2} & \cdots\cdots & \frac{\partial y^1}{\partial x^n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \frac{\partial y^n}{\partial x^1} & \frac{\partial y^n}{\partial x^2} & \cdots\cdots & \frac{\partial y^n}{\partial x^n} \end{vmatrix}.$$

此行列式亦可以

$$\frac{\partial(y^1, y^2, \cdots\cdots, y^n)}{\partial(x^1, x^2, \cdots\cdots, x^n)} \quad 或 \quad \left|\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right|$$

表之，或更簡以 $\left|\frac{\partial y}{\partial x}\right|$ 表之。

n 個函數 y^i，若其函數行列式不恆等於零，則曰獨立。在此情形方

程式

$$y^i=y(x^1,x^2,\cdots\cdots,x^n)$$

可就諸 x 解出而以諸 y 表之。

設 $z^i(y^1,y^2,\cdots\cdots,y^n)$ 爲諸 y 之 n 個獨立函數。則由求偏微分法之公式得

$$\frac{\partial z^i}{\partial x^j}=\frac{\partial z^i}{\partial y^1}\frac{\partial y^1}{\partial x^j}+\cdots\cdots+\frac{\partial z^i}{\partial y^n}\frac{\partial y^n}{\partial x^j},$$

此依總和記法可表爲

$$\frac{\partial z^i}{\partial x^j}=\frac{\partial z^i}{\partial y^k}\frac{\partial y^k}{\partial x^j},\qquad\cdots\cdots(14)$$

在此分母之上誌有總和記法內下誌之作用。由是依行列式之乘法而有函數行列式之重要關係式

$$\left|\frac{\partial z}{\partial x}\right|=\left|\frac{\partial z}{\partial y}\right|\cdot\left|\frac{\partial y}{\partial x}\right|。\qquad\cdots\cdots(15)$$

因函數行列式 $\left|\frac{\partial y}{\partial x}\right|$ 不爲零，可取

$$z^i(y^1,y^2,\cdots\cdots,y^n)=x^i$$

爲一特列，則關係式(14)成爲

$$\frac{\partial x^i}{\partial y^k}\frac{\partial y^k}{\partial x^j}=\delta^i_j,$$

而(15)化爲

$$\left|\frac{\partial y}{\partial x}\right|=\frac{1}{\left|\frac{\partial x}{\partial y}\right|}。\qquad\cdots\cdots(16)$$

7. 函數矩陣.

當函數 y^i 之個數 m 異於變數 x^j 之個數 n 時，吾人研究函數矩陣