应用数学系列丛书

最优化模型与实验

朱德通　编著

同济大学出版社

内容提要

本书系统地介绍了最优化数学模型中的各重要分支，包括线性规划与对偶理论、运输问题、分配问题、图与网络流、动态规划、计划排序、工程统筹、存储论、对策论、统计模型和排队论及其一些特殊优化问题与模型等内容．作者从实际的经济、金融与工程系统和管理等问题中引出最优化理论与方法中的基本模型，使用简洁的，易教、易懂和易操作的方式，系统地论述最优化数学模型在解决各类基本模型时的常用方法和原理及其数学实验．书中还详细地和系统地介绍了优化模型的软件 LINDO 与 LINGO，通过实例编制相关的程序，详细的求解与数学实验使读者便于解决实际应用问题．

本书可作为高等院校经济、管理和应用数学类各专业及运筹学课程的教材、实验或教学参考书，也可供研究生及相关工程技术与管理人员参考．

图书在版编目(CIP)数据

最优化模型与实验/朱德通编著．—上海：同济大学出版社，2003.4
ISBN 7-5608-2582-6

Ⅰ．最…　Ⅱ．朱…　Ⅲ．①最优化—数学模型 ②最优化—实验
Ⅳ．O224

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 007176 号

应用数学丛书
最优化模型与实验
朱德通　编著
责任编辑 李炳钊　责任校对 徐　栩　封面设计 李志云

出版发行　同济大学出版社
（上海四平路 1239 号　邮编 200092　电话 021-65985622）
经　销　全国各地新华书店
印　刷　江苏启东印刷厂印刷
开　本　787mm×960mm　1/16
印　张　28.25
字　数　565000
印　数　1—3000
版　次　2003 年 4 月第 1 版　2003 年 4 月第 1 次印刷
书　号　ISBN 7-5608-2582-6/O·230
定　价　35.00 元

本书若有印装质量问题，请向本社发行部调换

前　言

最优化模型与方法广泛应用于工业、农业、交通运输、商业、国防、建筑、通信、政府机关等各个部门、各个领域．它主要解决最优生产计划、最优分配、最佳设计、最佳决策、最优控制、最佳管理等优化问题，掌握优化思想并善于对遇到的问题进行优化处理，可为各级各类经济金融专业人员、管理人员与工程技术人员提供最佳决策与调控．伴随着计算机高速发展，数学理论与方法迅速进步，各种与数学相关的软件日新月异的开发与研制，为解决实际生活中各种数学模型与数学的应用提供了更新、更丰富的手段、技术和方法．最优化模型与方法就是帮助读者学会如何根据实际问题的特点、抽象出不同类型的数学模型，然后选择不同的方法进行计算并进行数值实现．

本书在编写中，尽力将课程系统化、模型化和科学化，注重从经济学、管理学和工程系统的角度介绍最优化模型的基本知识，试图以各种实际问题为背景，引出优化模型各分支的基本概念、基本模型和基本方法，并且侧重各种特殊的方法及其应用与实验．由浅入深，对其理论证明，用独立章节给出，可供有兴趣的读者选用．本书着重加强实际问题中建立数学模型的过程分析和综合，注意抽象、明白清晰和技巧性；强调建立模型是项**非常重要的数学应用和综合其他学科的创造性过程**．对于最优化模型中的各种算法，尽量运用直观方法和简洁通俗语言来说明其基本思想，并辅以丰富的实例与模型分析来说明求解的步骤，从而避免复杂的数学推导，使读者能真正做到知其然，更知其所以然，注重实践与应用，真正掌握最优化模型中各算法和建立模型的精髓，能灵活应用到实际问题中去．教学中，读者在掌握必修的教材内容的基础上，可以根据自己的情况选修“*”的章节，也可作为了解和参考的内容．

建立最优化模型的目的是为了解决实际问题，得到计算结果．本书把最优化模型的教学融合于现代科技的发展，特别是计算机迅速发展与应用的广泛深入，为此提供了实现的技术保障和各类优质的服务．书中较为详细地介绍和运用了在教育、科研、经济、管理与工业界得到广泛应用且专门用于求解最优化模型的软件包——LINDO，LINGO 软件，相应的章节着重地穿插了使用该软件包编制的程序，求解各类规划的例题和最优化模型，并对软件的内容作了相应的阐述，同时尽量用实例或详尽的例子来介绍最优化模型的方法与软件的编制．读者学习后可以熟炼地掌握如何使用 LINDO，LINGO 软件编制相应的程序包，求解大部分最优化模型，达到解决最优化模型和实际问题的效果．为了便于查阅，本书在附录中对 LINDO，LINGO 软件编制作了详细介绍．

最优化模型与方法在实际的生活中有着广泛的应用背景和发展前景．目前国内尚未见相关的专门论述最优化的数学模型与实验教材．本书将为数学模型中最优化领域的学习提供很好的教学、实验、参考的内容．目前，本书中的大部分内容已在高等院校开设的大学生数学建模竞赛课程中讲授，部分内容也在上海市数学建模竞赛开设的系统培训中作简单的介绍，实际效果和反映都非常好，深受欢迎，并在竞赛中也获得了很好的应用与实践．本书为数学模型和实验中的最优化理论与方法的专题提供最新的，引人关注，富有创新和挑战的数学模型与方法和实验教材．

本书可作为各专业应用数学类和运筹学课程的本科教材或教学参考书，也可作为管理学类、经济学类、工程管理类和应用数学（运筹学）相关层次学生的教材或参考书，同时，更注重最优化横型建立，方法应用和算法的软件实现。为便于读者自学，本书每章都配有适当习题供读者练习，以便于巩固基础，加深理解，融会贯通．

作者希望本书为应用数学、运筹学与数学模型的教学、实验与研究提供有益的，有特点的最优化模型与实验的教材和参考资料．虽然书中许多章节都有着作者长期的教学与研究的经验和实践的积累，但整体应用还有待于进一步经过教学实践的检验．作者诚挚的希望读者对本书的错误和不妥之处提出批评与建议并指正，在此表示衷心的感谢．在本书出版之际，作者衷心地感谢本课程获上海市教育委员会课程建设项目和上海师范大学应用数学重点学科项目的资助．

作者

于上海师范大学

2002 年 12 月

目　　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

绪　论

最优化模型与方法是近几十年发展和形成的一门新兴的应用性学科．通过运用数学方法和数学技术研究各种系统和实际问题的优化设计，控制和管理的途径及策略．为决策者和管理者提供科学决策的理论依据和实际操作手段与方法．最优化模型与方法特指用科学的方法研究某一系统最优管理和控制，或者分析研究某一系统的运行状况有关理论和运行过程；以及系统的管理问题和生产经营活动．主要研究方法是定量化、系统化和模型化方法，特别是运用各种数学模型和技术来解决问题．

最优化模型与方法和实验作为一门定量决策科学，利用数学、计算机科学以及其他科学的新成就，研究各种系统尤其是经济、工程、管理系统中运行的数量化规律，合理地使用与统筹安排人力、物力、财力等资源，为决策者提供有依据的最优方案，以实现最有效的管理和决策并获得满意的经济效益和社会效果．最优化模型与方法的理论与应用的主要特点归纳如下：

(1) 理论的基础是最优化理论与技术，并强调系统整体最优．系统地研究各组成部分的功能及其相互间的影响关系，平衡各组成部门之间的利益，求出所研究问题达到最佳效果的解，并寻找一个整体目标最优化的行动方案付诸实施．

(2) 综合应用各种学科交叉的方法，体现综合性、实践性、系统性和应用性．

(3) 使用系统分析特征，建立数学模型和创造完善有效的数学方法以及研制计算机软件进行求解．伴随着计算机技术日新月异的发展，提供了实现的技术保障和各类优质的服务，同时自身也迅速得到发展．

(4) 调整与完善原来的模型和方法的解或方案，通过不断研究，获得新的更好的效果．

最优化模型与方法的工作步骤如下：

1) 发现、提出并形成问题，进行抽象、简化、归纳和综合．必须要明确问题的目标，各种约束，问题的可控变量以及有关参数，搜集有关资料；

2) 建立模型．经过合理的假设，确定变量、参数和目标与约束之间的关系，使用有效的模型来表示；

3) 求解．使用和创立各种数学方法和数学技术，将模型求解(如最优解、次优解、近似解)．借助于计算机软件进行求解复杂的模型并进行各种分析；

4) 解的检验和控制．首先检查求解步骤和程序有无错误，然后检查解是否反映现实问题并进行灵敏度分析．

最优化模型与方法是研究者对客观问题显示经过思维抽象、简化后用数学的参数和关系式以及实体模型来反映的客观对象．模型的有关参数和关系式应选用合适的与现实系统或问题有关的，并将这些参数和因素及其相互关系归纳成一个或一组数学表达式，可以用现有的数学方法的分析和计算进行求解，有助于问题的分析和研究．利用模型可以进行计算、求解和一定预测、灵敏度分析等，以实现反映现实系统变化规律的主要目标．

最优化方法和实验所使用的数学模型，一般是由决策变量、约束或限制条件以及目标函数所构成，其实质表现为在约束条件允许的范围内，寻求目标函数的可行解或最优解．其中决策变量又称为可控制变量，是模型所代表的系统中受到控制或能够控制的变量，在模型中表现为未知参数（变量），对模型进行分析研究，最后通过选定决策变量来实现其最优解；约束条件即决策变量客观上必须满足的限制条件，它反映出实际问题中不受控制的系统变量或环境变量对受控制的决策变量的限制关系；目标函数是模型所代表的性能指标或有效性的宏观价值度量，在模型中表现为决策变量的函数，反映了实际问题所要达到的理想目标．

数学模型的一般形式归纳为：

求 $$\max(\text{或}\ \min)\ z=f(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_m)$$

约束条件：

$$g_k(x_1,\cdots,x_i;y_1,\cdots,y_m)\{\leqslant,=,\geqslant\}0,\ k=1,2,\cdots,K$$

其中 z——系统价值指标；

x_i——能够控制或受到控制的变量，$i=1,\cdots,n$；

y_i——不能控制或不受控制的变量和常数，$j=1,\cdots,m$；

f——价值评价指标与 x_i,y_j 间的关系，$i=1,\cdots,n,j=1,\cdots,m$；

g_k——可控制变量之间的关系式（$k\geqslant1$），并给出了这些变量可以进行调整的限度．

实际问题所建立的最优化模型，应抽象地、简单地、完整地描述所要研究的系统，以便能反映和概括实际问题，供分析研究．建模不仅需要有丰富的实践经验和熟练的技巧，而且需要很好的数学应用能力和数学的技巧，最后完善模型．所以建立模型和完成实验，是一项非常重要的数学应用和综合其他学科的创造性过程．

最优化模型与方法和应用软件的教学将紧密结合当前的管理、经济和现代科技的实践，通过学习掌握最优化模型与实验内容与方法后，能更好，更完善地用最优化模型去解决管理、经济和工程技术中的实际问题的．

第一章　线性规划模型与实验

线性规划(Linear Programming,简称 LP)是运筹学中研究得比较早,理论上已趋向成熟,在方法上非常有效,应用广泛的一个重要分支.

早在 20 世纪 30 年代末,前苏联数学家康托洛维奇(Конторвич)首先提出了线性规划的模型,随着军事、经济、生产等各方面的问题陆续提出,人们对线性规划问题的求解与应用展开了系统的研究,并于 1947 年由美国人丹茨格(G. B. Dantzig)提出了线性规划的单纯形算法,较好地解决了线性规划的求解问题,从而奠定了线性规划作为一个最优化理论与方法的基石. 最近 50 多年来,线性规划无论在深度还是在广度方面都取得了重大进展. 例如,椭球方法、Karmarkar 方法和内点法等. 随着计算机技术日新月异不断发展,使成千上万个约束条件和决策变量的线性规划问题能迅速地求解,更为线性规划在经济等各领域的广泛应用提供了极其有利的条件. 线性规划中研究的问题要求目标与约束条件函数均是线性的,而目标函数只能是一个. 在经济管理与实际生活的问题中,大量的问题是线性的,有的可以转化为线性的,从而使线性规划有着极大的应用价值. 线性规划已经成为现代化管理的一种重要手段.

线性规划研究的对象大体可分为两大类,一类是在现有的各类有限(如人、财、物等)资源的条件下,研究如何合理地计划、安排,可使得某一目标达到最大,如产量、利润目标等;另一类是在任务确定后,如何计划、安排,能以最低限度使用的各类资源,去实现该任务,如使生产成本、费用最小等. 这两类问题从本质上说是相同的,即都在一组约束条件下,去实现某一个目标的最优(最大或最小).

§1.1　线性规划模型

在生产管理和经济活动中,经常遇到一类关于如何合理地使用有限的劳动力、设备、资金等资源,以获得最大的效益问题.

例 1.1　某工厂生产甲、乙两种产品,生产这两种产品要消耗 A,B 两种原料. 生产每吨产品所需要的 A,B 两种原料量见表 1.1. 该厂每周所能得到的 A,B 两种原料量分别为 160t、150t. 且根据市场需求,甲种产品每周产量不应超过 40t. 已知该厂生产每吨甲、乙两种产品的利润分别为 5 千元及 2 千元. 问该厂应如何安排两种产品的产量才能使每周获得的利润最大?

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

表 1.1

产品 \ 原料	每吨产品的消耗		每周资源总量
	甲	乙	
A 原料/t	3	2	160
B 原料/t	5	1	150

建立模型 设该厂每周安排生产甲种产品的产量为 x_1(t),乙种产量为 x_2(t),则每周所能获得的利润总额为 $z=5x_1+2x_2$(千元). 但生产量的大小要受到 A,B 两种原料量的限制及市场最大需求量的制约,即 x_1,x_2 要满足以下一组不等式条件:

$$\begin{aligned} 3x_1+2x_2 &\leqslant 160 \\ 5x_1+x_2 &\leqslant 150 \\ x_1 &\leqslant 40 \end{aligned} \tag{1.1}$$

此外,x_1,x_2 还应是非负的数:

$$x_1\geqslant 0,\quad x_2\geqslant 0 \tag{1.2}$$

因此,从数学角度看,x_1,x_2 应在满足资源约束(1.1)及非负约束(1.2)条件下,使利润 z 取最大值:

$$\max z=5x_1+2x_2 \tag{1.3}$$

经过以上分析,可将一个生产安排问题抽象为在满足一组约束条件下,寻求变量 x_1,x_2 使目标函数达到最大值的一个数学规划问题.

同样,在经济生活中,也遇到另一类关于为了满足某些预定的目标,应如何组织生产,或合理安排工艺流程,或调整产品的成分等,以使消耗(人力、设备台时、资金、原材料等)为最少的问题. 以下给出一个求目标函数最小化的线性规划问题.

例 1.2 某公司由于生产需要,共需要Ⅰ,Ⅱ两种材料至少 350kg(两种材料有一定替代性),其中Ⅰ原料至少购进 100kg. 但由于Ⅰ,Ⅱ两种材料的规格不同,各自所需的加工时间也是不同的,加工每千克Ⅰ材料需要两个小时,加工每吨Ⅱ材料需要 1 小时,而公司总共有 600 个加工小时. 又知道每千克Ⅰ材料的价格为 2 千元,每千克Ⅱ材料的价格为 3 千元,试问在满足生产需要的前提下,在公司加工能力的范围内,如何购买Ⅰ,Ⅱ两种材料,使得购进成本最低?

建立模型 设 x_1,x_2 分别为购进材料Ⅰ,Ⅱ的千克数. 则得到了此线性规划的数学模型如下:

目标函数:
$$\min z=2x_1+3x_3 \tag{1.4}$$

约束条件：
$$x_1+x_2\geqslant 350 \tag{1.5}$$
$$x_1 \geqslant 100 \tag{1.6}$$
$$2x_1+x_2\leqslant 600 \tag{1.7}$$
$$x_1\geqslant 0,\quad x_2\geqslant 0 \tag{1.8}$$

由于上述两个有关线性规划数学模型的目标函数为变量的线性函数，同时约束条件也为变量的线性等式或不等式，所以这两个模型称为线性规划．如果目标函数是变量的非线性函数，或者约束条件中含有变量非线性的等式或不等式的数学模型则称为非线性规划．

从上述两个例子中，归纳一般线性规划的建模过程：

(1) 融会贯通地理解所要解决的问题，要明确在什么条件下，要达到什么目标．

(2) 定义一组决策变量，一般记为$(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$表示某一方案，这组决策变量的值就代表一个具体方案．

(3) 用决策变量的线性函数形式表示出所要寻求的目标，称为**目标函数**，依据问题的要求，目标函数在满足约束条件下实现最大化或最小化．

(4) 用一系列决策变量的等式或不等式来表示在问题所必须遵循的约束条件．

满足以上(2)，(3)，(4)三个条件的数学模型称为线性规划的数学模型．

§1.2　线性规划问题的标准形式和解的概念

线性规划模型有各种不同形式，其一般形式为：

目标函数：　$\max(\min) z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$

约束条件：

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\leqslant(=,\geqslant)b_1\\
&a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\leqslant(=,\geqslant)b_2\\
&\vdots\\
&a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\leqslant(=,\geqslant)b_m\\
&x_1,x_2,\cdots,x_n\geqslant 0
\end{aligned}$$

这里，$c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$ 称为**目标函数**(objective function)，设其值为 z，其中 c_j $(j=1,\cdots,n)$称为**价值系数**(cost coefficient)，$\boldsymbol{c}=(c_1,\cdots,c_n)^{\mathrm{T}}$ 称为**价值向量**，$\boldsymbol{x}_j\,(j=$

$1,\cdots,n$)为求解的变量,由系数 a_{ij} 组成的矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为**约束矩阵**(constraint matrix),列向量 $\boldsymbol{b}=(b_1,\cdots,b_m)^{\mathrm{T}}$ 称为**右端向量**(right-hand-side vector),条件 $x_j\geqslant 0(j=1,\cdots,n)$称为**非负约束**. 本书中约束条件记为 s. t. (subject to). 一个向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 满足约束条件,称为**可行解**或**可行点**(feasible point),所有可行点组成的集合称为**可行区域**(feasible region),记为 D. 达到目标函数值最大(小)的可行解称为该线性规划的**最优解**(optimal solution),此目标函数值称为**最优目标函数值**,简称**最优值**(optimal value). 归纳为线性规划问题就是在一组线性的等式或不等式的约束之下,求一个线性函数的最大值或最小值的问题,为论述简便起见,这里规定的标准形式为

$$\begin{aligned} \min \quad & z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n \\ \text{s. t.} \quad & a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ & a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ & \qquad \vdots \\ & a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \\ & x_1,x_2,\cdots,x_n\geqslant 0 \end{aligned} \tag{1.9}$$

简写为

$$\begin{aligned} \min \quad & z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j \\ \text{s. t.} \quad & \sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i, \qquad i=1,2,\cdots,m \\ & x_j\geqslant 0, \qquad j=1,2,\cdots,n \end{aligned} \tag{1.10}$$

使用矩阵和向量的形式,则上述线性规划可表示为

$$\begin{aligned} \min \quad & c^{\mathrm{T}}x \\ \text{s. t.} \quad & \boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x}\geqslant \boldsymbol{0} \end{aligned} \tag{1.11}$$

实际上各种线性规划问题都可以通过变换转化为标准形式,以下叙述如何转化

为标准型.

1. 目标函数的转换

如果原问题是求$\max z=\boldsymbol{cx}$,则可等价地转换成求$\min(-z)=-\boldsymbol{cx}$,反之亦然.

2. 约束条件的转换

如果某一约束条件是线性不等式

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\leqslant b_i\quad(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\geqslant b_i)$$

则可等价地化为

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j+x_{n+i}=b_i\quad(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j-x_{n+i}=b_i)\\ x_{n+i}\geqslant 0\end{cases}$$

其中新引进的变量x_{n+i}称为松驰变量,反之,等式约束

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i$$

也可化为不等式约束

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\geqslant b_i\\ \sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\leqslant b_i\end{cases}$$

3. 变量的非负约束

若x_k为无约束的变量,则令$x_k=x_k'-x_k''$,转化成非负约束,其中$x_k',x_k''\geqslant 0$.

综上所述,任何形式的线性规划模型都可转化为标准型的线性规划.由此,算法的讨论只限于标准型的线性规划,现讨论单纯形方法解线性规划.

设$\boldsymbol{A}$是约束方程组$m\times n$维的系数矩阵,其秩为m,$\boldsymbol{B}$是矩阵$\boldsymbol{A}$中$m\times m$阶非奇异子阵(即$\boldsymbol{B}$的行列式$|\boldsymbol{B}|\neq 0$),则称$\boldsymbol{B}$是线性规划问题的一个基,不失一般性,设矩阵$\boldsymbol{A}$左边m个列向量构成子矩阵

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1m}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2m}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mm}\end{pmatrix}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m)\tag{1.12}$$

称$\boldsymbol{a}_j(j=1,2,\cdots,m)$为**基向量**,它们是一个线性无关的向量组,与基向量$\boldsymbol{a}_j$对应变量$x_j(j=1,2,\cdots,m)$称为**基变量**,其他变量称为**非基变量**.

约束方程组(1.9)中,设系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 m,由 $m<n$,故有无穷多个解,假设前 m 个变量的系数列向量是线性无关的,那么约束方程组(1.9)可写成

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} x_2 + \cdots + \begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{mm} \end{pmatrix} x_m = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{1m+1} \\ a_{2m+1} \\ \vdots \\ a_{mm+1} \end{pmatrix} x_{m+1} - \cdots - \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n \tag{1.13}$$

使用向量形式,方程组(1.13)可表示为

$$\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_j x_j = \boldsymbol{b} - \sum_{j=m+1}^{n} \boldsymbol{a}_j x_j \tag{1.14}$$

方程组(1.13)的基是 $\boldsymbol{B}$. 设 $\boldsymbol{x}_B$是对应于这个基的基变量 $\boldsymbol{x}_B=(x_1,x_2,\cdots,x_m)^{\mathrm{T}}$,若令式(1.14)的非基变量 $x_{m+1}=x_{m+2}=\cdots=x_n=0$,并用高斯消去法,可以求出一个解

$$x=(x_1,x_2,\cdots,x_m,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$$

此解的非零分量的数目不大于方程个数 m,称 $\boldsymbol{x}$ 为**基(本)解**,若满足非负约束条件的基解,称为**基(本)可行解**,对应于基可行解的基,称为**可行基**. 一般基可行解的数目要小于基解的数目,若基解所含有非零分量的个数小于 m 个,则称为这样的基解为**退化基解**,或**退化解**.

§1.3 线性规划的几何意义与性质*

在讨论线性规划的可行域和最优解的几何意义时,先引入凸集和极点等概念.

设 K 是 n 维欧氏空间的点集,若任意两点 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$ 的连线上任意点,$\lambda\boldsymbol{x}+(1-\lambda)\boldsymbol{y}\in K(0\leqslant\lambda\leqslant1)$,则称 **$K$ 为凸集**.

从直观上说,凸集没有凹入部分,其内部没有孔洞.

设 $\boldsymbol{x}^1,\boldsymbol{x}^2,\cdots,\boldsymbol{x}^k$ 是 n 维欧氏空间 E^n 的 k 个点,若存在 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$ 且 $0\leqslant\lambda\leqslant1,i=1,\cdots,k;\ \sum\limits_{j=1}^{n}\lambda_i=1$ 使

$$\boldsymbol{x}=\lambda_1\boldsymbol{x}^1+\lambda_2\boldsymbol{x}^2+\cdots+\lambda_k\boldsymbol{x}^k$$

则称为 $\boldsymbol{x}$ 为 $\boldsymbol{x}^1,\boldsymbol{x}^2,\cdots,\boldsymbol{x}^k$ 的**凸组合**.

设 K 是凸集,$\boldsymbol{x}\in K$;若 $\boldsymbol{x}$ 不能用相异的点 $\boldsymbol{x}^1,\boldsymbol{x}^2\in K$ 的线性组合表示为

$$\boldsymbol{x}=\alpha\boldsymbol{x}^1+(1-\alpha)\boldsymbol{x}^2 \quad (0\leqslant\alpha\leqslant1)$$

则称 x 为 K 的一个**顶点**(或**极点**).

设 $C\neq\varnothing$ 为 E^n 中的一个凸集,$\boldsymbol{d}\in E^n$,$\boldsymbol{d}\neq 0$,若对任一 $\boldsymbol{x}\in C$ 及 $\lambda>0$,均有 $\boldsymbol{x}+\lambda\boldsymbol{d}\in C$,则称为 d 是 C 的一个**方向**. 显然若 $\boldsymbol{d}$ 是 C 的方向,$\alpha>0$ 则 $\boldsymbol{d}^1=\alpha\boldsymbol{d}$ 也是 C 的方向,这时称 $\boldsymbol{d}^1$ 与 $\boldsymbol{d}$ 为**相同的方向**. 如果一个方向不能表示成两个方向的正线性组合,即当 $\boldsymbol{d}=\lambda_1\boldsymbol{d}^1+\lambda_2\boldsymbol{d}^2(\lambda_1,\lambda_2>0)$ 时,必有 $\boldsymbol{d}^1=\alpha\boldsymbol{d}^2$,则称 $\boldsymbol{d}$ 是 C 的**极方向**.

下面给出线性规划问题的解的几何性质(证明省略,可参见其他关于多面体凸集的书).

定理 1.1　设 $D=\{\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b},\boldsymbol{x}\geqslant 0\}$ 的所有极点为 $\boldsymbol{x}^1,\boldsymbol{x}^2,\cdots,\boldsymbol{x}^k$,极方向为 $\boldsymbol{d}^1,\boldsymbol{d}^2,\cdots,\boldsymbol{d}^l$,则 $\boldsymbol{x}\in D$ 当且仅当存在一组 λ_i 与 u_i,使满足

$$\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\boldsymbol{x}^i+\sum_{j=1}^{l}\mu_j\boldsymbol{d}^j$$

$$\lambda_i\geqslant 0,\ i=1,\cdots,k,\quad \mu_j\geqslant 0,\quad j=1,\cdots,l$$

$$\sum_{i=1}^{k}\lambda_i=1$$

显然,若 $D=\{\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b},x\geqslant 0\}$ 为有界集,D 的极点为 $\boldsymbol{x}^1,\boldsymbol{x}^2,\cdots,\boldsymbol{x}^k$,则 $\boldsymbol{x}\in D$ 的充要条件是存在一组 λ_i,满足

$$\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\boldsymbol{x}^i,\quad \sum_{i=1}^{k}\lambda_i=1,\lambda_i\geqslant 0,\quad i=1,2,\cdots,k$$

定理 1.2　若线性规划

$$\begin{aligned}\min\quad & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\\ \text{s. t.}\quad & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}\\ & \boldsymbol{x}\geqslant 0\end{aligned}$$

有有限的最优值,它必在可行域 D 的某个极点达到,且目标函数有有限最优值的充要条件是对 D 的所有极方向 $\boldsymbol{d}^j$,均有 $\boldsymbol{c}\boldsymbol{d}^j\geqslant 0$.

根据以上定理,可得结论:线性规划问题的所有可行解构成的集合是凸集(可能无界),它们有有限个顶点和极方向. 线性规划问题的每个基可行解对应可行域的一个极(顶)点;若线性规划问题有最优解,必在某个顶点上得到,虽然顶点数目是有限的(不大于 C_n^m 个),若采用"枚举法"找所有基可行解,求最小量达到值的极点,最终可能找到最优解. 但当 n,m 的数较大时,这种办法显然计算量太大,不可行. 如何有效地找到最优解,将是下节叙述的单纯形法.

通常求解线性规划问题归纳为可能遇见下列几种情形:

(1) $D=\varnothing$,即可行解域为一空集,则线性规划问题无可行解.

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com