面向21世纪课程教材

面向21世纪课程教材

Textbook Series for 21st Century

高等代数

刘仲奎　杨永保　程　辉　陈祥恩　汪小琳

高等教育出版社

HIGHER EDUCATION PRESS

面 向 2 1 世 纪 课 程 教 材
Textbook Series for 21st Century

高等代数

刘仲奎　杨永保　程　辉　陈祥恩　汪小琳

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

内容简介

本书是教育部“高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划”的研究成果，是面向21世纪课程教材。内容包括：行列式、矩阵、多项式与矩阵、向量空间、线性方程组、线性变换、欧氏空间等。

本书可作为高等师范院校数学系高等代数教材，也可为其他专业的教师和学生选用。

图书在版编目(CIP)数据

高等代数/刘仲奎等. —北京：高等教育出版社，2003.6

ISBN 7-04-011876-9

Ⅰ.高… Ⅱ.刘… Ⅲ.高等代数-高等学校-教材 Ⅳ.O15

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第017571号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010－64054588
社址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800－810－0598
邮政编码	100011	网址	http://www.hep.edu.cn
总机	010－82028899		http://www.hep.com.cn

经销	新华书店北京发行所
印刷	北京民族印刷厂

开本	787×960 1/16	版次	2003年6月第1版
印张	23.25	印次	2003年6月第1次印刷
字数	430 000	定价	26.70元

前　言

1998年原国家教委开始组织实施“高等师范教育面向21世纪教改工程”，我们承担了数学教育类的一个课题，研究和探讨主干课程“高等代数”教学内容和体系的改革，编写面向21世纪的教材。本课题历时五年，时间比较长，因为我们认为主干课程的改革需慎之又慎，所以采取了边研究、边改革、边实践的做法。教材的初稿形成后，首先在西北师范大学2000级新生中试用，后发现问题较多，对初稿进行了较大的修改，形成了第二稿；2001年又在新生中试用第二稿，再次做了修改和完善，形成了第三稿；专家在审阅第三稿时，提出了一些宝贵的修改意见，我们又对第三稿做了认真而细致的修改，因此今天呈现在读者面前的是本书的第四稿。

根据高等师范教育面向21世纪教学内容和课程体系改革的目标和要求，我们在编写本书时做了以下一些考虑。

1. 在内容的编排上，力争从生活、生产实际中引出数学问题，并进一步分析、阐发它形成及发展的背景，然后再进行理论上的探讨。例如，线性方程组、矩阵等概念就是如此。这样做，使学生觉得数学离现实生活很近，不再是枯燥、乏味的，而是生动具体的。

2. 本教材力求更多地发展和使用矩阵的思想、方法和技巧，使得许多问题的处理都具有一定的创新意义。例如通过矩阵等价标准形理论的应用，使一些问题的处理方法新颖、简捷。这也是本书为什么要安排两章矩阵内容的原因。

3. 多项式是传统的高等代数内容，不得不介绍。本书将它安排在第四章，其目的是将它与矩阵结合起来，以进一步显示矩阵应用的广泛性和重要性。

4. 在教材内容的表述上，遵循由浅入深，由易到难，由具体到抽象，以及难点分散的原则。为了实现这一目标，本书给出了很多例题，而且相当多的例题都具有较强的代表性和应用性。

5. 本教材在习题的配置上也做了较多的思考。除了保留传统的有代表性的题目外，还增设了一些问答题、讨论题、举例题。每章题目分两部分，一部分是为掌握基本内容而设置的习题，另一部分是为学有余力和考研究生的学生设置的补充题，绝大多数补充题都有解答提示。补充题不作基本要求。

6. 有些章节打了“*”号，这大多是一些应用性的内容，教师可根据教学时数的多少来灵活处理这些章节(教师可以不讲授,学生可以自学)。

本书荣幸地得到教育部“面向21世纪教学内容和课程体系改革”项目、教育部“高等学校优秀青年教师教学科研奖励计划”项目以及西北师范大学教务处的资助，在此作者表示衷心的感谢。

限于作者水平，书中定有不妥之处，敬请读者指正。

作 者

2003.1.21于西北师大

责任编辑　胡乃冏
封面设计　张　楠
责任绘图　杜晓丹
版式设计　胡志萍
责任校对　尤　静
责任印制　陈伟光

目　录

第一章 行 列 式

在中学代数中，我们学过二元、三元线性方程组．但在生产实际中所遇到的线性方程组，它的未知量往往不止二个、三个．例如，在生产实际中有这样一个问题：

炼油厂模型：某石油公司有 5 个炼油厂，每个炼油厂都生产 5 种石油产品：汽油、柴油、煤油、机油、液态石油气．已知从 1 桶原油中，第一个工厂生产出的汽油、柴油、煤油、机油、液态石油气分别是 30、24、18、12、9 L；第二、三、四、五个工厂从 1 桶原油中生产出的这 5 种油分别是 28、25、20、10、9；31、23、19、11、10；29、22、17、13、8；27、26、20、13、10 L．现在需要 104 620 L 汽油，88 010 L 柴油，68 660 L 煤油，43 240 L 机油，33 690 L 液态石油气．本着节约资源与提高效益的原则，问给这 5 个工厂各安排多少桶原油来生产恰好满足这一需要．

分析 设给这 5 个工厂各分配 x_1、x_2、x_3、x_4、x_5 桶原油正好满足需要，由题意得

$$
(\mathrm{I})\quad \begin{cases} 30x_1+28x_2+31x_3+29x_4+27x_5=104\,620, \\ 24x_1+25x_2+23x_3+22x_4+26x_5=88\,010, \\ 18x_1+20x_2+19x_3+17x_4+20x_5=68\,660, \\ 12x_1+10x_2+11x_3+13x_4+13x_5=43\,240, \\ 9x_1+9x_2+10x_3+8x_4+10x_5=33\,690. \end{cases}
$$

现在的问题就是如何解这个线性方程组．

(Ⅰ)是 5 个未知量，5 个方程构成的线性方程组．实际上，在大量的工程技术问题当中，遇到的线性方程组远比(Ⅰ)要复杂．就未知量个数与方程个数相等的线性方程组来说，一般形式是

$$
(\mathrm{II})\quad \begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \qquad\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n. \end{cases}
$$

这里 n 是正整数，x_1，x_2，$\cdots$，x_n 是未知量，$a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$是 x_j $(j=1,2,\cdots,n)$的系数，b_1，b_2，$\cdots$，b_n 是常数项．

形如(Ⅱ)的线性方程组我们叫它 $n\times n$ 线性方程组．如何求得方程组(Ⅱ)

的解就是我们要探讨的问题，在这一问题的探求过程中便产生了行列式这一概念，它为解线性方程组(Ⅱ)提供了人们想要的公式.

这一章主要讨论下面三个问题：

1° 行列式概念的形成；

2° 行列式的基本性质和计算方法；

3° 利用行列式来解 $n\times n$ 线性方程组.

§1.1　二阶与三阶行列式

本节的目的是阐述行列式的由来. 为此我们首先讨论 2×2 与 3×3 这两种较简单的线性方程组的公式解.

问题 1　探求 2×2 线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases} \tag{1}$$

解的公式.

用加减消元法，以 a_{22}乘方程组的第一式，以 a_{12}乘第二式得

$$\begin{cases} a_{22}a_{11}x_1+a_{22}a_{12}x_2=a_{22}b_1, \\ a_{12}a_{21}x_1+a_{12}a_{22}x_2=a_{12}b_2. \end{cases} \tag{2}$$

在(2)中，第一式减去第二式，消去 x_2，得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-b_2a_{12}.$$

如果 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq0$，则

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}.$$

同理，在(1)中，用 a_{21}乘第一式，a_{11}乘第二式，然后相减，在 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq0$ 的情况下，得

$$x_2=\frac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}.$$

因此方程组(1)只要适合条件 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq0$，则有解

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad x_2=\frac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \tag{3}$$

这就是 2×2 线性方程组(1)的公式解. 但(3)式不好记忆，为此我们引入下面的记号，它更能反映(1)式解的规律.

我们把 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$记为如下形式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \tag{4}$$

并把它叫做一个二阶行列式. 于是就有

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1 a_{22} - b_2 a_{12}, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = b_2 a_{11} - b_1 a_{21}.$$

有了二阶行列式，(3)式就可以很有规律地表示为

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \tag{5}$$

可以看出，(5)式中居分母地位的二阶行列式相同，都是(1)中未知量的系数按原来的位置排成的，我们称其为(1)的系数行列式. 对分子而言，x_1 的表达式中分子正好是以常数项 b_1 和 b_2 替换系数行列式中 x_1 的系数所得到的二阶行列式，x_2 的表达式中的分子正好是以常数项 b_1 和 b_2 替换系数行列式中 x_2 的系数所得到的二阶行列式.

例 1　解方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 13, \\ 5x_1 - 4x_2 = -2. \end{cases}$$

先计算二阶行列式：

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = 2 \times (-4) - 3 \times 5 = -23 \neq 0,$$

$$\begin{vmatrix} 13 & 3 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = -46, \qquad \begin{vmatrix} 2 & 13 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -69.$$

所以根据(5)式得

$$x_1 = \frac{-46}{-23} = 2, \qquad x_2 = \frac{-69}{-23} = 3.$$

问题 2　探求 3×3 线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \tag{6}$$

解的公式.

同前面一样，用加减消元法，先从前两式消去 x_3，后两式消去 x_3，得到只含 x_1 和 x_2 的 2×2 线性方程组，然后再用消元法消去 x_2，就得到

$$(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31})x_1$$
$$= b_1 a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} b_3 + a_{13} b_2 a_{32} - b_1 a_{23} a_{32} - a_{12} b_2 a_{33} - a_{13} a_{22} b_3.$$

如果

$$
\begin{aligned}
D = & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\
& - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \neq 0,
\end{aligned}
$$

则

$$x_1 = \frac{1}{D}(b_1a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}b_3 + a_{13}b_2a_{32} - b_1a_{23}a_{32} - a_{12}b_2a_{33} - a_{13}a_{22}b_3)$$

同样，当 $D\neq 0$ 时，我们可求得

$$x_2 = \frac{1}{D}(a_{11}b_2a_{33} + b_1a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}b_3 - a_{11}a_{23}b_3 - b_1a_{21}a_{33} - a_{13}b_2a_{31}),$$

$$x_3 = \frac{1}{D}(a_{11}a_{22}b_3 + a_{12}b_2a_{31} + b_1a_{21}a_{32} - a_{11}b_2a_{32} - a_{12}a_{21}b_3 - b_1a_{22}a_{31}).$$

这就是 3×3 线性方程组(6)的公式解，为了记忆方便，我们引入三阶行列式的概念，它能很好地反映(6)式解的规律.

记

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}
= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \tag{7}
$$

并称它为一个三阶行列式.

这个行列式有三行、三列，它是6个项的代数和. 这6个项我们可用下述简单的规律来记忆. 给原三阶行列式的右边再并上前2列，得

$$
\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.
$$

于是从左上角到右下角的三条实线上三个元素的乘积构成的三项都取正号；从右上角到左下角的三条虚线上的三个元素的乘积构成的三项都取负号，这6个项的代数和即为此三阶行列式表示的值.

例 2 计算三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}.$$

$D = 2\times 2\times(-2) + (-1)\times(-5)\times 1 + 1\times 3\times 3 - 1\times 2\times 1 - 2\times(-5)\times 3 - (-1)\times 3\times(-2) = 28.$

有了三阶行列式后，线性方程组(6)的解可以很有规律地表示出来.

令

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

当 $D\neq 0$ 时，(6)的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}, \qquad x_2=\frac{D_2}{D}, \qquad x_3=\frac{D_3}{D}.$$

上面三式中居分母位置的行列式都是 D，它是线性方程组(6)中的系数按原来的位置排成的三阶行列式，我们仍把它叫做方程组(6)的系数行列式．而居分子位置的行列式依次是把行列式 D 中第 1，2，3 列分别换成常数项列而得到的三阶行列式，这和 2×2 线性方程组(1)的解有相同的规律．

例 3 解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3=0, \\ 3x_1+2x_2-5x_3=1, \\ x_1+3x_2-2x_3=4. \end{cases}$$

因为 $$D=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}=28\neq 0, \qquad D_1=\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -5 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix}=13,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix}=47, \qquad D_3=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}=21.$$

所以 $$x_1=\frac{13}{28}, \qquad x_2=\frac{47}{28}, \qquad x_3=\frac{21}{28}.$$

有了二阶、三阶行列式，我们就可以把系数行列式不为零的线性方程组(1)与(6)的解很简单地表示出来．于是，我们自然会想到，$n\times n$ 线性方程组的解是否能用 n 阶行列式来表达？因此，就出现了

问题 3 n 阶行列式如何定义？

在前面，我们从两个未知量中消去一个非常容易，但从三个未知量中消去两个就很麻烦．至于一般像上面那样，从 n 个未知量中消去 $n-1$ 个简直是不可能的了．因此，我们就不能用上面类似的方法来定义 n 阶行列式．但是，可以这样来考虑问题．先详细研究二阶、三阶行列式的结构，找出它们的共同规律，根据这些规律来定义 n 阶行列式．然后用它来表示 $n\times n$ 线性方程组的解，看是否能达到我们预想的目的．

§1.2　排　　列

为了给出 n 阶行列式的定义，必须弄清楚二阶、三阶行列式的结构，为此需要排列这一概念，本节就来讨论排列.

定义 1　由数码 1，2，…，n 组成的一个有序组 $i_1\ i_2\cdots i_n$ 称为一个 n 元排列.

例如，由数码 1，2，3 可以构成下面 6 个排列.

123，132，213，231，312，321.

实际上，这里所说的 n 元排列就是我们熟知的 n 个不同元素的全排列，因此共有

$$n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot2\cdot1=n!\ (个)$$

例 1　由数码 1，2，3，4 构成的全部 4 元排列共有 4!= 24 个，它们是：

1234，1243，1324，1342，1423，1432

2134，2143，2314，2341，2413，2431

3124，3142，3214，3241，3412，3421

4123，4132，4213，4231，4312，4321.

在所有的 n 元排列中，排列 $123\cdots n$ 称为标准排列，它的特点是较大的数码排在较小的数码之后．而在其他 n 元排列中，都可以找到一个较大的数码排在较小的数码前面．例如，在排列 1432 中，4 排在 3 之前，4 也排在 2 之前，3 也排在 2 之前．这样的次序与自然顺序相反，我们称它为反序(或逆序).

定义 2　在一个排列 $i_1\ i_2\cdots i_n$ 中，如果较大的数码排在较小的数码前面，则称这两个数码构成一个反序(或逆序)．一个排列中全部反序的个数称为这个排列的反序数，记作 $\pi\,(i_1\ i_2\cdots i_n)$.

反之，在一个排列中，如果一个较小的数码排在一个较大的数码之前，那么称这两个数码构成一个顺序.

给定由数码 1，2，…，n 构成的一个排列 $i_1\ i_2\cdots i_n$ 后，我们可以这样来计算它的反序数．先看有多少个数码排在 1 的前面，设为 m_1 个，那么就有 m_1 个数码与 1 构成反序；然后把 1 划去，再看有多少个数码排在 2 的前面，设为 m_2 个，那么就有 m_2 个数码与 2 构成反序；再划去 2，计算有多少个数码排在 3 的前面；如此继续下去，最后设 n 之前有 m_n 个数码(显然 $m_n=0$)，那么

$$\pi\,(i_1\ i_2\cdots i_n)=m_1+m_2+\cdots+m_n.$$

例 2　$\pi\,(986754231)=8+6+6+5+4+2+2+1+0=34.$

例 3　由数码 1，2，…，n 构成的反序数最多的排列是哪一个？反序数是

多少？

显然任意两个数码都能构成反序的排列其反序数最大．因此，反序数最大的排列是 $n\ (n-1)\cdots 21$，其反序数是

$$\pi\ [n(n-1)\cdots 2\ 1]=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\frac{1}{2}n\ (n-1).$$

定义 3　如果 $\pi\ (i_1\ i_2\cdots i_n)$是偶数(零也是偶数)，则称 $i_1\ i_2\cdots i_n$ 为偶排列；如果 $\pi\ (i_1\ i_2\cdots i_n)$是奇数，则称 $i_1\ i_2\cdots i_n$ 为奇排列．

例如，1243 是奇排列，2143 是偶排列．

在全部的 6 个 3 元排列中，123，231，312 是偶排列，而 132，213，321 是奇排列．在这里，奇、偶排列各占一半．一般说来，在所有 $n!$ 个 n 元排列中，奇排列与偶排列各占一半．为了证明这一结论，还需要进一步研究排列的奇偶性．

把一个排列中某两个数码的位置互换，而其余的数码保持不动，就得到一个新排列，这样的一个变换称为对换．

例 4　$\pi\ (4312)=5$，4312 是奇排列，对换数码 1 与 4 得到排列 1342，$\pi\ (1342)=2$，1342 是偶排列．

定理 1.2.1　一次对换改变排列的奇偶性．

证　**情形 1**　被对换的两个数码在排列中是相邻的情形．

设

$$\cdots j\quad k\cdots \tag{1}$$

经对换 j 与 k 变成排列

$$\cdots k\quad j\cdots \tag{2}$$

这里“…”表示不变动的数码，显然在(1)与(2)中，j 和 k 与前后不动的数码构成的反序或顺序都是相同的，不同的只是 j 与 k 的次序变了，若原来构成反序，经对换后，则 k 与 j 不构成反序，这样排列(2)比排列(1)的反序数少 1．反之，则排列(2)比(1)的反序数多 1．无论是减少 1 或增加 1，排列的奇偶性都改变了．

情形 2　被对换的两个数码不相邻．

设排列为

$$\cdots j\ i_1 i_2\cdots i_s\ k\cdots, \tag{3}$$

对换 j 与 k，得到排列

$$\cdots k\ i_1 i_2\cdots i_s j\cdots. \tag{4}$$

不难看出，这样一个不相邻的两个数码的对换可以通过若干个相邻两个数码的对换来实现．从(3)出发，将 k 与 i_s 对换，再与 i_{s-1}对换，…，与 i_1 对换，最后与 j 对换，共经 $s+1$ 次相邻数码的对换，排列(3)变成

$$\cdots k\,j\,i_1\,i_2\cdots i_s\cdots. \tag{5}$$

再从(5)出发，把 j 与 i_1，i_2，…，i_s一个一个地对换，共经过 s 次相邻数码的对换，排列(5)就变成了排列(4)．因此，j 与 k 的直接对换可经 $2s+1$ 次相邻两个数码的对换来实现．由于 $2s+1$ 是奇数，根据情形 1，排列(3)与(4)的奇偶性不同．□

推论 1.2.2 奇数次对换改变排列的奇偶性，偶数次对换不改变排列的奇偶性．

有了定理 1.2.1，便可证明

定理 1.2.3 在 $n!$ $(n\geqslant 2)$个 n 元排列中，奇偶排列的个数相等，各有$\frac{n!}{2}$个．

证 设在这 $n!$ 个 n 元排列中，有 p 个互不相同的奇排列，q 个互不相同的偶排列，则 $p+q=n!$．

对这 p 个不同的奇排列都施行同一个对换，例如都对换数码 1 与 2，由定理 1.2.1，得到 p 个不同的偶排列，而偶排列只有 q 个，所以，$p\leqslant q$．

同理，对 q 个互不相同的偶排列都施行同一个对换，例如都对换数码 1 与 2，由定理 1.2.1，得到 q 个互不相同的奇排列，于是，$q\leqslant p$．因此，$q=p=\frac{n!}{2}$．□

最后再证明一个结论．

定理 1.2.4 由数码 1，2，…，n 构成的任一个 n 元排列 $i_1\,i_2\cdots i_n$ 都可以经过若干次对换变成排列 $1\,2\,\cdots\,n$，并且所作对换的次数与 $\pi(i_1\,i_2\cdots i_n)$有相同的奇偶性．

证 对排列 $i_1\,i_2\cdots i_n$ 讲，若 $i_1\neq 1$ 时，对换 i_1 与 1 得新排列$1j_2j_3\cdots j_n$，这里 $j_2j_3\cdots j_n$ 是数码 2，3，…，n 构成的排列．若 $j_2\neq 2$，对换 j_2 与 2 得新排列 $1\,2k_3\cdots k_n$,其中 $k_3k_4\cdots k_n$ 是数码 3，4，…，n 构成的排列，因 n 是有限数，如此下去，排列 $i_1\,i_2\cdots i_n$ 就变成了排列 $12\cdots n$．

若 $i_1i_2\cdots i_n$ 是偶排列，则所作的对换次数一定是偶数，因为 $12\cdots n$ 也是偶排列．

若 $i_1i_2\cdots i_n$ 是奇排列，则所作的对换次数一定是奇数，因为将 $i_1i_2\cdots i_n$ 对换成 $1\,2\cdots n$ 时，改变了排列的奇偶性．□

§1.3 n 阶行列式

现在我们来研究三阶行列式