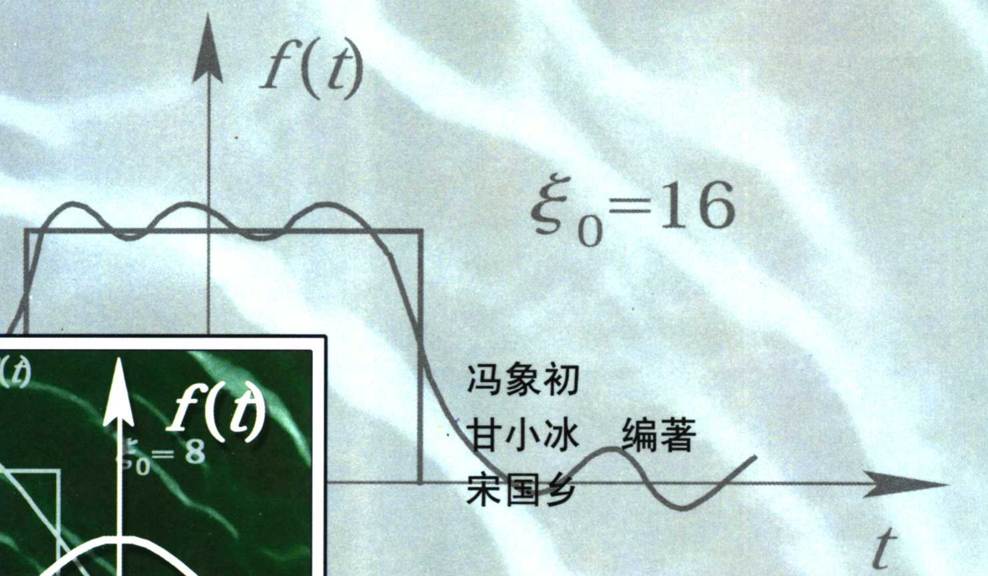
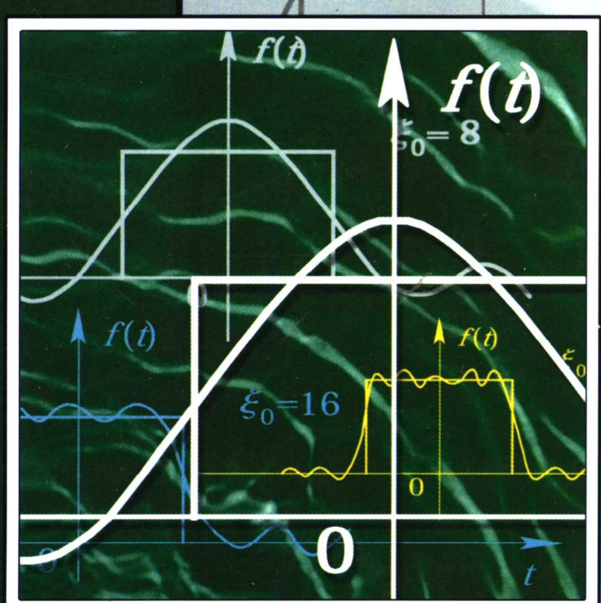
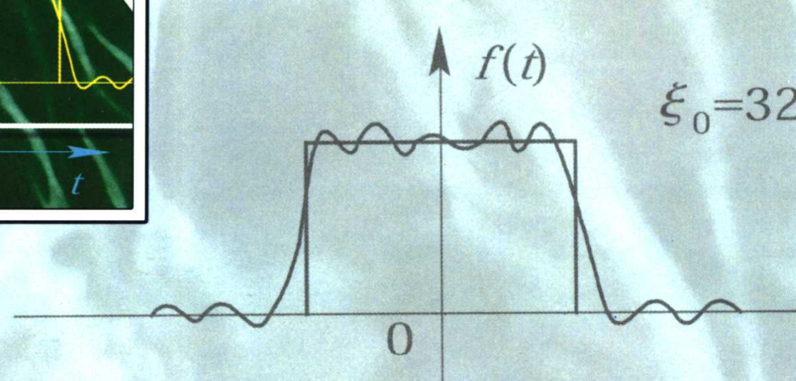
研究生系列教材

数值泛函与小波理论



冯象初
甘小冰　编著
宋国乡





西安电子科技大学出版社
http://www.xduph.com

数值泛函与小波理论

研究生系列教材

数值泛函与小波理论

冯象初　甘小冰　宋国乡　编著

西安电子科技大学出版社
2003

内 容 简 介

本书为工科博士生数学学位课教材。其内容主要包括数值泛函、小波理论及小波理论的应用。全书从数学基础、现代数值分析的共同框架到小波理论及其应用，构成了小波理论自我学习的完整系统。书中精选了国内外有关参考文献的内容，也反映了本书作者自己的科研成果。

本书的讲述由浅入深，通俗易懂，既重视必要的理论基础知识，也给出了相应的实践和应用。

本书可作为高等学校的硕、博士研究生教材，也可作为工程技术人员和科研人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

数值泛函与小波理论/冯象初等编著. —西安：西安电子科技大学出版社，2003.3
(研究生系列教材)
ISBN 7-5606-1193-1

Ⅰ. 数… Ⅱ. 冯… Ⅲ. ①数值-泛函分析-研究生-教材 ②小波分析-研究生-教材 Ⅳ. O177

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 097987 号

策　　划　夏大平
责任编辑　夏大平　龙晖　王素娟
出版发行　西安电子科技大学出版社(西安市太白南路 2 号)
电　　话　(029)8227828　　邮　编　710071
http://www.xduph.com　　E-mail：xdupfxb@pub.xaonline.com
经　　销　新华书店
印　　刷　陕西画报社印刷厂
版　　次　2003 年 3 月第 1 版　　2003 年 3 月第 1 次印刷
开　　本　787 毫米×1092 毫米　1/16　印张 12.625
字　　数　295 千字
印　　数　1～2000 册
定　　价　16.00 元
ISBN 7-5606-1193-1/O·0059(课)

XDUP 1464001-1

西安电子科技大学

研究生教材建设基金资助

前　言

本教材是在为工科博士生开设的“数值泛函与小波理论”课程讲稿的基础上改写而成的。

第 1 章是绪论，回顾了小波理论的发展，讲述了当前小波应用研究工作涉及的主要方面。

为了使本书有一个自我学习的完整系统，在第 2 章中安排了小波的数学基础知识，重点介绍了与小波理论有关的数值泛函知识。主要有：三大空间(距离空间、赋范线性空间、内积空间)的基本概念，与数值泛函关系比较密切的基本定理(如线性算子及投影定理的理论)和应用等。

第 3 章是小波分析概述。首先，叙述了现代数值分析的总框架，把小波分析统一在投影理论的共同框架下；然后，介绍了小波分析与傅氏分析的关系，概述了小波分析的主要内容。

第 4 章详细讨论了构造小波基的多分辨分析(MRA)理论，这是小波分析中的一个重要而颇具特色的内容。第 5 章对多分辨分析进行了进一步的讨论，给出了从尺度函数出发构造多分辨分析的充分条件。这一章中还给出了 Meyer 小波和正交样条小波的例子。第 6 章讨论了紧支撑正交小波的构造，以及构造光滑的紧支正交小波的条件。在实际应用中，紧支撑是进行时频局部化分析的一个重要性质。在这样的理论指导下，还给出了 Daubechies 小波的例子，并讨论了紧支正交小波的对称性、紧支正交函数值与小波函数值的计算问题。第 7 章主要讨论了小波变换，包括小波级数变换、连续小波变换以及在工程中有极大应用的 Mallat 分解与重构算法，并详细讨论了与傅立叶变换的关系。这四章构成了小波理论的主要结构。

第 8 章对小波函数进行了进一步的分析，主要包括四部分的内容：双正交小波基、小波包基、区间小波和高维小波。第 9 章给出了多小波的理论，主要有多元多分辨分析和多小波基的数学特性。这两章的内容可以看成是小波理论的推广和延伸。

最后，第10章讨论了小波分析在四个方面的应用：小波分析在信号处理中去噪问题的应用，多小波进行图像去噪、图像融合等方面的应用，多小波矩阵处理积分方程以及应用区间样条小波求解微分方程的理论和算法。由于小波分析的应用领域非常宽广，而且正在迅速发展之中，在每一个具体问题中又要结合问题的特性确定合适的小波变换类型和小波基，因此目前要对这方面作比较全面的介绍是不可能的。我们仅选择了与作者科研工作相结合的四个方面作简要的介绍，希望能引起大家的兴趣。

本书的出版得到了国家自然科学基金及陕西省自然科学基金的资助，还得到了西安电子科技大学研究生教材建设基金的资助，出版社有关同志为本书的出版付出了辛勤的劳动，在此一并表示感谢。

由于作者水平有限，加之出版时间仓促，书中难免有错漏之处，敬请读者不吝指正。

编　者

2002 年 12 月

目　　录

第 1 章　绪　　论

1.1 引　　言

小波分析是近年来国际上一个非常热门的前沿研究领域，是继 Fourier 分析之后的一个突破性进展，它给许多相关领域带来了崭新的思想，提供了强有力的工具，在科技界引起了广泛的关注和高度的重视。它既包含有丰富的数学理论，又是工程应用中强有力的方法和工具。小波分析的发展推动着许多其它学科和领域的发展，使得其本身具有了多学科相互结合、相互渗透的特点。探讨小波的新理论、新方法以及新应用已成为当前数学界和工程界一个非常活跃和富有挑战性的研究领域。

所谓小波分析，从数学角度看，它属于调和分析范畴，从事计算数学的工作者把它看做是一种近似计算的方法，用于把某一函数在特定空间内按照小波基展开和逼近；从工程角度看，小波分析是一种信号与信息处理的工具，是继 Fourier 分析之后的又一有效的时频分析方法。小波变换作为一种新的多分辨分析方法，可同时进行时域和频域分析，具有时频局部化和多分辨特性，因此特别适合于处理非平稳信号。

小波分析是当前数学领域中一个迅猛发展的新方向，是由 Fourier 分析发展起来的一种新的数学方法，同时具有理论深刻和应用广泛的双重意义。在小波分析中，利用小波基取代传统的三角函数基，对函数进行分析和研究。由于小波基是由一个小波函数 $\psi(x)$（$\psi(x)$充分光滑、快速衰减、具有振动、状如小波）经过平移和伸缩得到的，因此具有简单、灵活、随意的特性，又具有多分辨分析的功能。它为诸多应用领域提供了一种新的更为优越、更为方便的分析工具。

与 Fourier 分析类似，小波分析中也存在积分小波变换、小波级数和离散小波变换。与 Fourier 变换相比，小波分析是一个时间和频率的局域变换，因而能有效地从信号中提取信息，通过伸缩和平移等运算功能对函数或信号进行多尺度细化分析(Multiscale Analysis)，解决了 Fourier 变换不能解决的许多困难问题。两者的本质区别在于：Fourier 分析只是考虑时域和频域之间的一对一映射，它以单个变量(时间或频率)的函数表示信号；小波分析则利用联合时间—尺度函数分析非平稳信号，从根本上克服了 Fourier 分析只能以单个变量描述信号的缺点。小波分析与时频分析的区别在于：时频分析在时频平面上表示非平稳信号；小波分析描述非平稳信号虽然也在二维平面上，但不是在时频平面上，而是在所谓的时间—尺度平面上。在小波分析中，人们以不同的尺度(或分辨率)来观察信号。信号分

析的这种多尺度(或多分辨率)的观点是小波分析的基本点。

1.2 小波发展回顾

小波的起源可以追溯到 20 世纪初。1910 年，Haar 提出了规范正交小波基的思想，构造了紧支撑的正交函数系——Haar 函数系。1936 年，Littlewood 和 Paley 对 Fourier 级数建立了二进制频率分量分组理论，构造了一组 Littlewood-Paley 基，这为小波在后来的发展奠定了理论基础。1946 年，Gabor 提出了加窗 Fourier 变换(Gabor 变换)理论，使得对信号的表示具有时频局部化性质。人们真正研究小波是在 80 年代。1982 年，Strömberg 构造了一组具有指数衰减且有限次连续导数的小波基。1984 年，Grossman 和 Morlet 首次提出了小波(wavelet)的概念，给出了按一个确定函数 ψ 的伸缩平移系展开函数的新方法和进行信号表示的新思想。随后，Meyer 证明了一维小波的存在性，并构造了具有一定衰减性质的光滑小波函数。1986 年，Mallat 和 Meyer 提出了多分辨分析的理论框架，为小波基的构造提供了一般的途径。多分辨分析的思想是小波的核心，它是理论与应用的结晶。至此，小波分析才真正形成为一门学科。之后，人们构造出了大量的小波，其中包括具有指数衰减的 Battle-Lemarié 小波和第一个双正交小波——Tchamitchian 小波等，比较引人注目的是 Daubechies 于 1988 年构造的一类具有紧支集的有限光滑正交小波函数，该小波得到了非常广泛的应用。1989 年，随着小波理论的进一步发展，Mallat 提出了实现小波变换的快速算法——Mallat 塔式算法，它的地位相当于 Fourier 变换中的 FFT。1990 年，崔锦泰和王建忠构造了基于样条的双正交小波函数，并讨论了具有最好局部化性质的尺度函数和小波函数。与此同时，Wickerhauser 和 Coifman 等人通过对母小波函数进行伸缩、平移和调制运算，提出了小波包的概念，并将 Mallat 算法进一步深化，得到了小波包算法。

1.3 当前小波应用研究工作的几个主要方面

在小波理论发展的同时，小波应用的研究工作也在不断地开展，主要集中在以下几个方面：

(1) 小波在数学其它分支中的应用，如求微分方程、积分方程，函数逼近，分形、混沌问题，概率小波，非线性分析等等。1988 年，Arneodo 和 Grasseau 把小波理论运用于混沌动力学及分形理论以研究湍流及分形生成现象；1990 年，Beylkin 和 Coifman 把小波用于算子理论；1991 年，Jaffard 与 Laureneot 把小波变换运用于偏微分方程的数值解。

(2) 小波在信号处理中的应用，包括信号检测、目标识别以及去噪等，比如语音信号、雷达信号、医学信号、天文信号、地震信号、机械故障信号等等。

(3) 小波在图像处理中的应用，其中包括图像数据压缩、去噪，数字水印，指纹鉴别，模式识别等。

(4) 小波在通信中的应用，如在CDMA、自适应均衡、扩频通信和分形调制等方面的应用。

小波应用之广泛，让许多科学家和工程研究人员感到惊诧。近年来有许多重要的国内外期刊经常报道有关小波应用的动态、最新研究成果。代表性的刊物有 IEEE Trans. on Signal Processing，IEEE Trans. on Image Processing，Applied and Computational Harmonic Analysis，Journal of Fourier Analysis，SIAM Journal of Mathematics Analysis，还有国内的《电子学报》、《电子与信息学报》和《信号处理》等。另外，国际互联网上的小波资料也非常丰富，报道最新的小波文献、国际会议、电子文摘以及各著名大学和科研机构的小波研究组及其主要成果。比较著名的网站有：http://www.wavelet.org/，它是 Sweldens 主持的网上免费杂志，能提供有关小波研究最全面和最新的信息，并可链接到其它小波站点；http://www.stat.stanford.edu/~wavelab 提供了 Matlab 的工具箱 wavelab；http://www.cmap.polytechnique.fr/users/www.bacry/ 提供有关小波和信号处理的 C 源程序；另外还有 http://www.cm.bell-labs.com/，http://www.math.mit.edu/ 以及 http://pascal.math.yale.edu/pub/wavelets/，它们不断报道贝尔实验室、麻省理工学院、耶鲁大学在小波方面的研究进展。

第2章　数值泛函概要

数学家们认为，电子计算机的出现和泛函分析在数值分析领域中的应用，使数值分析发生了革命性的变化。前者是计算工具，后者是理论基础。

由于泛函分析吸取了各个数学分支中最基本的精华，具有高度的抽象性、系统性和普遍性，因此它的观点、方法和规律可以广泛地应用于各个学科。近代科学的发展趋势是各种学科的互相渗透，互相交叉，“你中有我，我中有你”，界线模糊，边缘面宽。泛函分析作为一门高度抽象的数学理论，为各种学科提供了一般的数学规律和共同的框架，已成为各个学科的重要工具。对数值分析而言，泛函分析与数值分析的关系更为密切。运用泛函分析的观点与语言可使数值分析中很多定理与方法的推导变得简洁、直观，并使所得结论更加普遍。泛函分析是一种“软分析”，它把各方面的知识结合在一起，找出共性和简单性，大多用综合性的文字证明，而略去那些具体的、烦琐的推导和计算，并尽可能采用形象化的思维和语言。整个泛函分析都是用“空间”来表达的，这使得很多经典的理论具有简单明了的几何直观。但是，数学家们普遍认为泛函分析中极其重要的定理在数值分析中却并不一定都有用。因此，我们在本书中选择的内容主要是与数值分析关系比较密切的基本理论和定理。如三大空间的基本概念、理论以及与数值分析直接相关的投影、逼近等内容。我们把它称为数值泛函。

首先在集合的基础上定义出三大空间，由空间到空间的映射定义出算子、泛函，由内积定义出投影，由投影引出函数空间的各种数值逼近及现代数值分析的总框架。小波分析作为近 20 年发展起来的一种新的数值分析方法，它与其它的数值分析有着共同的泛函背景和框架。我们选择了本章的内容作为小波分析的数学基础，以使初学小波的读者在学习过程中能自成系统，不必去寻找更多的其它资料。

2.1　距离空间

2.1.1　定义和例

1. 定义

定义 2.1　设 R 表示一个非空集合，若其中任意两元素 x，y，都按一定的规则与一个实数 $\rho(x,y)$相对应，且 $\rho(x,y)$满足以下三公理(称为距离公理)：

(1) $\rho(x,y)\geqslant 0$，当且仅当 $x=y$ 时等号成立；　(非负性)

(2) $\rho(x,y)=\rho(y,x)$；　(对称性)

(3) 对 R 中任意三元素 x，y，z，有

$$\rho(x,z)\leqslant\rho(x,y)+\rho(y,z)\qquad\text{(三角不等式)}$$

则称 $\rho(x,y)$为 x 与 y 间的距离，称 R 为距离空间，记为(R,ρ)，有时也简记为 R。距离空间中的元素也称为“点”。

根据定义，在距离空间 R 中，任意两点之间都有一个确定的距离，它包含了通常意义下的距离概念，但又要比通常意义的距离概念更广泛，它是欧氏空间中通常距离概念的抽象和推广。

2. 例

例 2.1　设 $\mathbf{R}^1$ 为非空实数集，对其中任意两实数 x 和 y，定义距离

$$\rho(x,y)=|x-y| \tag{2.1}$$

显然满足距离公理(1)，即为通常意义下的距离，常称为欧氏距离。于是 $\mathbf{R}^1$ 按式(2.1)构成一距离空间。

另外，还可在 $\mathbf{R}^1$ 中用另一种方式来定义距离：

$$\rho_1(x,y)=\frac{|x-y|}{1+|x-y|} \tag{2.2}$$

式(2.2)满足距离公理(1)、(2)是显然的。现在来验证它满足三角不等式。

由于当 $t\geqslant 0$ 时，$\varphi(t)=t/(1+t)$ 为单调增函数，因此有

$$\begin{aligned}\rho(x,z)&=\frac{|x-z|}{1+|x-z|}\leqslant\frac{|x-y|+|y-z|}{1+|x-y|+|y-z|}\\&=\frac{|x-y|}{1+|x-y|+|y-z|}+\frac{|y-z|}{1+|x-y|+|y-z|}\\&\leqslant\frac{|x-y|}{1+|x-y|}+\frac{|y-z|}{1+|y-z|}\\&=\rho(x,y)+\rho(y,z)\end{aligned}$$

例 2.2　设 $\mathbf{R}^n$ 为 n 维实向量全体所构成的空间，在其中可定义距离如下：

设 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$为 $\mathbf{R}^n$ 中任意两元素，则

$$\rho(x,y)=\Big(\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\Big)^{1/2} \tag{2.3}$$

可以证明，它满足距离公理。当 $n=2$ 时，则由式(2.3)定义的距离即为平面上两点间的通常距离。

同样，在 $\mathbf{R}^n$ 中也可以定义另一种距离：

$$\rho_1(x,y)=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i-y_i| \tag{2.4}$$

由上可见，在同一个集合中，可以用不同的方式定义不同的距离，得到不同的距离空间。如不作声明，在 $\mathbf{R}^1$ 中我们用式(2.1)规定的距离，在 $\mathbf{R}^n$ 中用式(2.3)规定的距离，称为欧氏距离。

例 2.3　用 $C_{[a,b]}$表示定义在$[a,b]$上所有连续函数的全体，对于任意 $x(t)$，$y(t)\in C_{[a,b]}$，可定义距离

$$\rho(x,y)=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-y(t)| \tag{2.5}$$

例 2.4　$L^2_{[a,b]}$表示$[a,\ b]$上平方可积函数的全体，即对任意的$x(t)\in L^2_{[a,b]}$都有

$$\int_a^b|x(t)|^2\mathrm{d}t<+\infty$$

则可在$L^2_{[a,b]}$中定义距离：对任意$x(t)$，$y(t)\in L^2_{[a,b]}$，有

$$\rho(x(t),\ y(t))=\left(\int_a^b|x(t)-y(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2} \tag{2.6}$$

例 2.5　l^2表示满足$\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^2<+\infty$的实数列的全体，则其中任意两点

$$x=(x_1,x_2,\cdots),\ y=(y_1,y_2,\cdots)$$

间的距离可定义如下：

$$\rho(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i-y_i|^2\right)^{1/2} \tag{2.7}$$

从上面例子可以看出，我们可以在两向量间、两函数间、两数列间以及任意两个元素间引进距离，它们要比通常意义的几何距离的含义更广泛。

2.1.2　收敛概念

极限是一切分析理论的基础。极限理论的基本点是收敛序列只能有一个极限。对于简单的直线和平面的情况，从通常的距离概念出发，这是很明显的事实，但在一般距离空间中就不那么显然、明白了。要在距离空间中建立相应的极限理论，就要从一般的距离公理出发建立收敛概念。

距离公理是从通常的距离概念中抽象出本质特性并加以一般化而形成的。实数(距离是用实数来定义的)的性质以及距离公理的作用使我们并不困难地在距离空间中建立起收敛的概念及以后的一系列理论。仔细考察一下经典分析中的许多定理的证明，实际上也仅仅用到了一般的距离公理，而并不需要通常几何中有关距离的全部性质。

下面，我们就在一般距离空间中来建立有关收敛的概念和理论。

1. 收敛点列

1) 定义

定义 2.2　设R为距离空间，$x_n(n=1,\ 2,\ \cdots)$为R中点列，$x\in R$，如果当$n\to\infty$时，数列$\rho(x_n,\ x)\to 0$，则称点列x_n按距离$\rho(x,\ y)$收敛于x，记为

$$\lim_{n\to\infty}x_n=x \tag{2.8}$$

或

$$x_n\to x\qquad n\to\infty$$

此时，称x_n为收敛点列，称x为x_n的极限。

从定义 2.2 中可以看出，在距离空间中，一般点列的收敛是通过距离的数列的收敛来定义的，而数列的收敛概念及性质等是我们在数学分析中早就熟悉了的。因此，不难得出一般距离空间中有关收敛点列的一些基本性质。

2）性质

定理 2.1　在距离空间中，收敛点列的极限是惟一的。

证明　设 x，y 都是 x_n 的极限，则根据定义及数列收敛的性质，应有对任意的 $\varepsilon>0$，存在 N，当 $n>N$ 时，

$$\rho(x_n,\ x)<\varepsilon,\ \rho(x_n,\ y)<\varepsilon$$

由三角不等式可得

$$\rho(x,\ y)\leqslant\rho(x,\ x_n)+\rho(x_n,\ y)<2\varepsilon$$

由 ε 的任意性，可知 $\rho(x,y)=0$，即 $x=y$。惟一性得证。　**证毕**

定理 2.2　在距离空间中，距离 $\rho(x,y)$是两个变元 x，y 的连续函数。即在距离空间中，当 $x_n\to x_0$，$y_n\to y_0$ 时，

$$\rho(x_n,\ y_n)\to\rho(x_0,\ y_0)\qquad n\to\infty \tag{2.9}$$

证明　根据数列收敛的性质，要证明式(2.9)，即要证得

$$|\rho(x_n,y_n)-\rho(x_0,y_0)|\to 0\qquad n\to\infty$$

考虑三角不等式

$$\begin{aligned}\rho(x_n,y_n)&\leqslant\rho(x_n,x_0)+\rho(x_0,y_n)\\&\leqslant\rho(x_n,x_0)+\rho(x_0,y_0)+\rho(y_0,y_n)\end{aligned}$$

即

$$\rho(x_n,y_n)-\rho(x_0,y_0)\leqslant\rho(x_n,x_0)+\rho(y_n,y_0) \tag{2.10}$$

又

$$\begin{aligned}\rho(x_0,y_0)&\leqslant\rho(x_0,x_n)+\rho(x_n,y_0)\\&\leqslant\rho(x_0,x_n)+\rho(x_n,y_n)+\rho(y_n,y_0)\end{aligned}$$

则

$$\rho(x_0,y_0)-\rho(x_n,y_n)\leqslant\rho(x_n,x_0)+\rho(y_n,y_0) \tag{2.11}$$

由式(2.10)与式(2.11)即可得

$$|\rho(x_n,y_n)-\rho(x_0,y_0)|\leqslant\rho(x_n,x_0)+\rho(y_n,y_0)$$

令 $n\to\infty$，即得

$$|\rho(x_n,y_n)-\rho(x_0,y_0)|\to 0$$

证毕

定理 2.3　设 x_n 为距离空间 R 中的收敛点列，则 x_n 必有界。即存在 $x_0\in R$，有限数 $r>0$，使对所有的 $x\in x_n$，都有

$$\rho(x,\ x_0)<r \tag{2.12}$$

证明　事实上，因 x_n 为收敛点列，不妨设它的极限点为 x_0，则取 $\varepsilon=1$，存在自然数 N，当$n>N$ 时有

$$\rho(x_n,\ x_0)<1$$

取

$$r=\max\{1,\rho(x_0,\ x_1),\ \rho(x_0,\ x_2),\ \cdots,\ \rho(x_0,\ x_N)\}+1$$

即可使对所有的 $x\in x_n$，式(2.12)成立。

证毕

2. Cauchy 点列

设 x_n 为距离空间 R 中的收敛点列，则存在 $x \in R$，使

$$\rho(x_n, x) \to 0 \qquad n \to \infty \tag{2.13}$$

因为

$$\rho(x_m, x_n) \leqslant \rho(x_m, x) + \rho(x_n, x)$$

所以，当 m，$n \to \infty$ 时有

$$\rho(x_m, x_n) \to 0 \tag{2.14}$$

即由式(2.13)可以推出式(2.14)，而在一般距离空间中却不能由式(2.14)反推出式(2.13)。

在实数理论中，

$$|x_n - x| \to 0 \qquad n \to \infty$$

与

$$|x_m - x_n| \to 0 \qquad m,n \to \infty$$

是相当的。而在一般距离空间中，式(2.13)与式(2.14)并不相当。我们把使式(2.14)成立的点列称为 Cauchy 点列，或称基本点列。

于是，在实数空间中，按通常的欧氏距离，收敛点列与 Cauchy 点列相当。在一般距离空间中，则收敛点列必为 Cauchy 点列，而 Cauchy 点列不一定是收敛点列。

如有理数点列

$$1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, \cdots \tag{2.15}$$

在有理数空间中，只是一个 Cauchy 点列而不是收敛点列，因它在有理数空间中没有极限。有理数点列(2.15)的极限是无理数 $\sqrt{2}$，只有在有理数空间加进无理数，扩充成为实数空间后，点列(2.15)才成为收敛点列。因为任何一个无理数，都可以找到一个有理数点列以它为极限，所以有理数空间好像到处布满了空隙，将这些空隙(无理数)都补进来，就可使所有的 Cauchy 点列都有极限点，也就都成了收敛点列。

又如在 $P_{[a,b]}$(定义在$[a,b]$上的实系数多项式的全体)中，有的多项式列 $P_n(t)$满足式(2.14)而在 $P_{[a,b]}$中没有极限，因而它们在 $P_{[a,b]}$中只是 Cauchy 点列，而不是收敛点列。实际上，它们收敛于 $P_{[a,b]}$以外的连续函数。如果我们把这些连续函数都补充进来，即将 $P_{[a,b]}$扩充为 $C_{[a,b]}$，则所有的 Cauchy 点列按距离式(2.5)都成了收敛的多项式列。

正因为在一般距离空间中，收敛点列与 Cauchy 点列不相当，于是才引出了距离空间的完备性问题。

2.1.3 距离空间的完备性

前面我们建立了距离空间中的收敛概念，并且从收敛、极限的角度说明了一般距离空间与实数空间(距离空间的特例)的差别。在实数空间中存在定理：收敛点列与 Cauchy 点列等价。也就是说，任何一个实数的 Cauchy 点列必有实数的极限。我们把实数的这种特性称为完备性。这种实数的完备性给实数带来了很多好的性质，使人们得以在此基础上建立

了一系列的极限理论。一般的距离空间(如有理数空间)就没有这种性质(有理数的 Cauchy 点列不一定有有理数的极限)。这种不同决定了它们之间有很多本质上的差异，也即一般的距离空间不具有完备性。

1. 定义和例

定义 2.3　在距离空间 R 中，若任一 Cauchy 点列都在 R 中有极限，则称距离空间 R 是完备的。

于是和实数空间一样，在完备的距离空间中，收敛点列与 Cauchy 点列是等价的。

因为在距离空间中，收敛是用距离来定义的，而前面曾讨论过，在同一个集合中可以定义不同的距离，因此，同一个集合可以对一种距离成为完备的距离空间，而对另一种距离却成为不完备的距离空间。

按前面的规定，未作声明时，实数空间 $\mathbf{R}^1$ 中的距离是按式(2.1)定义的距离。它的完备性也是指按式(2.1)的距离完备。

又如 $C_{[a,b]}$，按通常的距离

$$\rho(x,\ y)=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-y(t)|$$

则距离空间 R 为完备空间。

事实上，因 $C_{[a,b]}$中的任一 Cauchy 点列 $x_n(t)$满足

$$\rho(x_m,x_n)=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x_m(t)-x_n(t)|\rightarrow 0\qquad m,n\rightarrow\infty$$

故对一切 $t\in[a,b]$，必有

$$|x_m(t)-x_n(t)|\rightarrow 0\qquad m,n\rightarrow\infty$$

而根据数学分析中的定理可知，有 $x(t)\in C_{[a,b]}$，使

$$|x_n(t)-x(t)|\rightarrow 0\qquad n\rightarrow\infty$$

对 $t\in[a,b]$都成立，故有

$$\rho(x_n,x)\rightarrow 0\qquad n\rightarrow\infty$$

即 $C_{[a,b]}$对距离式(2.5)完备。通常不作说明时，$C_{[a,b]}$中的距离都是指距离式(2.5)而言的。

特别地，若在 $C_{[a,b]}$中定义距离

$$\rho_1(x,y)=\left(\int_a^b|x(t)-y(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2}$$

则它是一个不完备的距离空间。

$\mathbf{R}^n$ 按通常的欧氏距离

$$\rho(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right)^{1/2}$$

是完备的。按这种距离的收敛又称按坐标收敛。

我们在 2.1.2 节中所举距离空间的例子，按那里规定的距离都是完备的距离空间。

如前所述，有理数空间是不完备的典型例子。

2. 距离空间的完备化

距离空间的完备性在很多方面都起着重要的作用。如在证明解的存在性、惟一性以及近似解的收敛性等方面都要用到完备性。前面讲到对于不完备的有理数空间，可以通过补