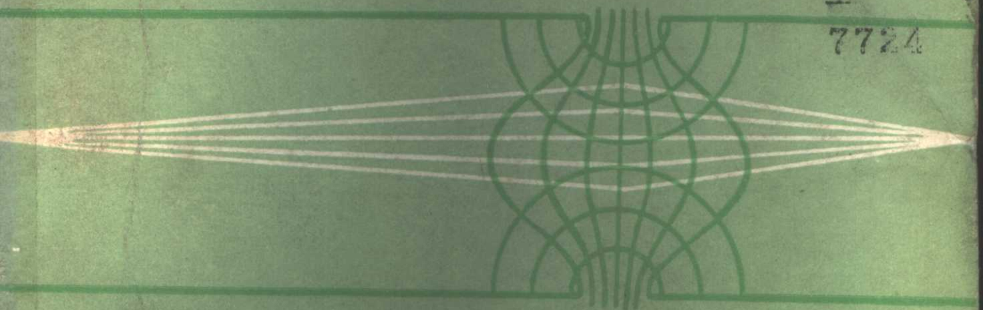
周绍森　钱怀锦　李津水　编



数学物理方法
解　题　指　导

江西人民出版社

数学物理方法
解题指导

周绍森　钱怀锦　李津水　编

江西人民出版社

一九八四年·南昌

数学物理方法解题指导

周绍森　钱怀锦　李津水编

江西人民出版社出版

（南昌市第四交通路铁道东路）

江西省新华书店发行　　江西新华印刷厂印刷

开本787×1092　1/32　印张24.625　字数56.5万

1984年12月第1版　1984年12月第1次印刷

印数1－10.000

统一书号：7110·447　　定价：2.64元

前言

在现代科学技术领域中，物理学和工程技术已越来越紧密地与数学联系在一起。“数学物理方法”不仅是高等院校许多专业的重要课程，而且已列为科学规划中数学与物理的重点学科。编写本书的目的在于，期望既能给理科、工科、师范等各种类型高等院校的学生在学习这门课程，以及相近课程（如“高等数学”的有关部分、“工程数学”、“应用数学”、“偏微分方程”等）时以指导，也能给教师进行这些课程教学时以参考。同时，还期望本书能给予科学技术工作者和一切有志于攀登数学物理或工程技术理论高峰的人们以帮助。

全书分为四篇十九章。前两篇介绍了作为数学工具的复变函数论、傅里叶级数和积分变换；第三篇全面讲述了数学物理方程的各种解法，包括传统的分离变数法（驻波法）和行波法，较近代的积分变换法，点源法（格林函数法）、保角变换法、变分法、差分法，以及新颖的渐近方法等；第四篇介绍了特殊函数。在每一章中，都包括有重要概念和关系式、典型例题、题解和习题四部分。对基础知识进行了扼要概括；对各种类型的问题作了归纳整理；对典型例题进行了题意分析，指明了解题思路和解题步骤，部分例题还根据需要做了说明和讨论，以使读者能把数学形式与物理规律、物理图象紧密联系起来，提高分析问题和解决问题的能力，特别是提高进行探索性思维和创造性应用的能力。

本书脱稿后，中国科学院数学物理研究所副所长郭友中研

究员和江西师院物理系陈经常副教授进行了认真审阅，提出了许多宝贵意见；科学院数理所刘君兰同志不仅对本书进行了认真审阅，而且为本书增写了“渐近方法”重要的一章；郭友中先生还亲自为本书作序，满怀热情地向广大读者推荐本书，在此谨向他们表示由衷的感谢。此外，本书在制图、校稿等方面还得到了杜开云、王宏安等同志的大力协助，在此一并致谢。

我们深感水平有限，书中难免还有错误、缺点和欠妥之处，祈请读者批评、指正。

编　者

一九八三年春

序

认识世界的重要途径是对事物进行质和量的考察。量变到质变是事物发展的普遍规律。研究数量关系和空间形式都需要数学，因而数学广泛地向其它学科渗透，不断显现它的重要性。

数学进行渗透的头等重要的一步，是应用数学王国的语言来描述研究对象的一般规律，建立数学模型，对现象进行系统的分析和综合，对对象进行铨释和预测。这些模型有明确的目的、生动的物理内容和富于启迪的直觉形式。接着要研究的是数学模型解的存在性、唯一性、正则性、稳定性、能观控性等等，并从中提炼新的概念、新的问题和新的方法，对数学理论作出贡献和储备。这样一个解决问题的过程，完成了应用数学和纯粹数学的一次循环。

这些数学模型，无论是确定性的还是非确定性的，具体的还是抽象的，用微分方程还是用其它方法描述的，都是数理科学研究的范围。数理科学(广义的数学物理)是数学与科学技术之间的边缘学科。狭义的数学物理是指数理科学中，利用现代数学方法解决物理与工程技术问题的部分。显然，数理科学与四化建设密切相关，是数学能转化为生产力的最直接的部分。

“数学物理方法”则是讲述数学物理中比较成熟和定型部分的方法，是学习数理科学的非常重要的一种训练。它不仅是攻读理论物理的必不可少的阶梯，而且是学习许多工程技术课程的基础。因此，各理、工、师范等院校的许多专业，都把它

作为一门重要的基础课程；一切想自学成才的人，也都视它为进一步学好其它理论的必要桥梁。随着我国高等教育事业的迅速发展和加速实现四个现代化建设的需要，这门课程的重要性就更加突出了。

顾名思义，“数学物理方法”不仅要求对物理基本概念和规律有正确的理解，而且要求对数学理论和技巧能灵活地应用，而这两者又集中体现在解题上。但是，要把具体的问题抽象为数学问题，并进一步应用数学手段加以正确的解答，对许多人来说都不是一件轻松的事情，因而迫切希望有一本带有启发性和实用性的解题指导书。而目前国内又苦无成书。为此，编者们满怀热情地编写了这本内容丰富的参考书，这无疑是非常有意义的。

编者基本上遵循了教育部审定的“数学物理方法”教学大纲，广泛地参考了理工科和师范院校讲授这门课程的各类教材，以及国外有关的教材和资料。他们根据这门学科的自身规律，既吸收了别人的长处，又结合了自己的丰富教学经验；既重视基础理论，基本知识；又强调基本技能的训练，把立足点放在培养读者分析问题和解决问题的能力上，力求体现科学性、现代性和启发性，做到由浅入深，循序渐进，便于自学。

总之，这本书的内容全面，方法多样，题目新颖，思路清晰，是一本学习“数学物理方法”的很好的参考书，序者愿意把它推荐给有志于此的读者们。

中国科学院数学物理研究所

郭友中

1983年3月15日

内　容　提　要

全书分为四篇十九章。前两篇介绍了作为数学工具的复变函数论，傅里叶级数和积分变换的解法；第三篇全面介绍了数学物理方程的各种解法，包括分离变数法（驻波法）、行波法、积分变换法、点源法（格林函数法）、保角变换法、变分法、差分法、渐近方法等；第四篇介绍了特殊函数的解法。

本书为高等学校、电视大学、职工大学理工科学生及自学青年学习数学物理方法以及相近课程的参考书，也可供教授上述课程的教师以及有关科技工作者参考。

目　录

第一篇　复变函数论

第一章　复变函数

一、重要概念和关系式

1．复数：

代数式：$z=x+iy$

三角式：$z=\rho(\cos\phi+i\sin\phi)$

指数式：$z=\rho e^{i\phi}$

其中实部 $\mathrm{Re}z=x$，虚部 $\mathrm{Im}z=y$，模 $\mathrm{mod}z=|z|$。$|z|=\rho=\sqrt{x^2+y^2}$，辐角（主值）$\arg z=\phi=\mathrm{tg}^{-1}\dfrac{y}{x}$，见图 1－1。

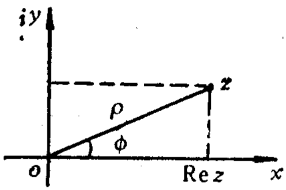


图　1—1

共轭复数：$z^*=x-iy=\rho(\cos\phi-i\sin\phi)=e^{-i\phi}$

2．复数运算：

加减：$z_1\pm z_2=(x_1\pm x_2)+i(y_1\pm y_2)$

乘：$z_1 \cdot z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)$
$$=\rho_1\rho_2[\cos(\phi_1+\phi_2)+i\sin(\phi_1+\phi_2)]$$
$$=\rho_1\rho_2e^{i(\phi_1+\phi_2)}$$

除：$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}$
$$=\frac{\rho_1}{\rho_2}[\cos(\phi_1-\phi_2)+i\sin(\phi_1-\phi_2)]$$
$$=\frac{\rho_1}{\rho_2}e^{i(\phi_1-\phi_2)}$$

乘方、开方：
$$z^n=\rho^n(\cos n\phi+i\sin n\phi)$$
$$=\rho^n e^{in\phi}$$
$$\sqrt[m]{z}=\rho^{1/m}e^{i\phi/m}=\rho^{1/m}\left(\cos\frac{\phi}{m}+i\sin\frac{\phi}{m}\right)\text{（主值）}$$

3. 复变函数：
$$w=f(z)=u(x,\ y)+iv(x,\ y)$$
其中 $u(x,\ y)$ 和 $v(x,\ y)$ 是 x，y 的实变函数。

常用的初等函数有：

多项式：$a_0+a_1z+\cdots\cdots+a_nz^n$（$n$ 为正整数）

有理分式：$\frac{a_0+a_1z+\cdots\cdots+a_nz^n}{b_0+b_1z+\cdots\cdots+b_mz^m}$（$m$、$n$ 为正整数）

根式：$\sqrt{z-a}$

指数函数：$e^z=e^x(\cos y+i\sin y)$
有虚周期 $2\pi i$，且 $|e^{i\alpha}|=1$，α 为实数。

三角函数：$\sin z=\frac{1}{2i}(e^{iz}-e^{-iz})$
$$\cos z=\frac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz})$$

有实周期 2π。

双曲函数：$\operatorname{sh} z=\frac{1}{2}(e^{z}-e^{-z})$

$$\operatorname{ch} z=\frac{1}{2}(e^{z}+e^{-z})$$

有虚周期$2\pi i$。

对数函数：$\ln z=\ln(|z|e^{i\arg z})$

$$=\ln|z|+i\arg z\text{（主值）}$$

以上诸式中，a_0，…，a_n和b_0，…，b_m均为复常数。

4．多值函数：

（1）定义：对于自变数 z 的每一个值，如有两个或两个以上的函数值w与之对应，则$w=f(z)$叫作z的多值函数。例如，根式函数、对数函数就是多值函数。对于多值函数来说，当自变量z连续变化时，z 和 w之间的对应关系将要发生变化。

（2）枝点：在复平面上，如果z绕某点a一周回到原值时，对应的函数值不还原，而当z不绕a转一周回到原值时，对应的函数值还原，a 就称为这个多值函数的枝点。

如果z绕枝点a转 n 周以后，对应的函数值回到原值，则 a 叫作该函数的$(n-1)$阶枝点。

多值函数的枝点一定是函数的奇点。

（3）单值分枝：一个多值函数可以划分为若干个分枝，每一分枝是一个单值函数，叫作多值函数的单值分枝。

为取得函数的单值分枝，对自变量 z 的取值范围必须作出某些规定。

（4）割线：割线是两个枝点间的任一连线。z 平面上的割线起的作用是，当 z 连续变化时不得跨越割线，使得在割开的 z 平面上的任一闭合曲线都不包含枝点 a 在内，以保证 z 和单

值分枝的一一对应关系。

(5) 里曼面：把w的各单值分枝与自变数z的取值范围作为整体考虑，几何上用一种多叶面来表示，相邻两叶割线的上、下岸对应粘接，这样的多叶面叫里曼面。

在里曼面的每一叶上，函数是单值的；而在相邻两叶的同一位置处，函数取不同的值。

5．复变函数的导数：设$w=f(z)$是在区域D中定义的单值函数，且z与$z+\Delta z$均属于D，如果极限

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

存在，且与$\Delta z\to 0$的方式无关，则称此极限为函数$f(z)$在z点的导数，记作$\frac{df(z)}{dz}$或$f'(z)$，并称函数$f(z)$在z点可导。

6．解析函数：

(1) 定义：如果函数$w=f(z)$在区域D上处处可导，则称$f(z)$在D上解析。如果函数在某点及其邻域内是可导的，则称函数在该点是解析的。

(2) 科西—里曼（条件）方程*：

函数$f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$在区域D内解析的必要充分条件是u和v在D内可导，且满足科西—里曼方程：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\tag{1—1}$$

极坐标中科西—里曼方程是：

$$\frac{\partial u}{\partial \rho}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \varphi},\qquad \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi}=-\frac{\partial v}{\partial \rho}\tag{1—2}$$

(3) 实变转化：由

* 对于连续函数，科西—里曼方程是函数解析性的必要充分条件。——校注

$$z=x+iy,\ z^*=x-iy$$

有变换

$$x=\frac{1}{2}(z+z^*),\qquad y=\frac{1}{2i}(z-z^*)$$

因此，形式地有

$$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right),\ \frac{\partial}{\partial z^*}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z\partial z^*}=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)=\Delta$$

称为拉普拉斯算子。

由此，（1—1）式可简写成

$$\frac{\partial f(z)}{\partial z^*}=0$$

7。调和函数：

(1) 如实函数$u(x,\ y)$在某区域D中连续，且有连续的一、二阶偏导数，并满足拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \qquad (1—3)$$

则称$u(x,\ y)$是区域D内的调和函数。

(2) 任何一个区域D内的解析函数的实部$u(x,\ y)$与虚部$v(x,\ y)$都是该区域的调和函数，并称为共轭调和函数，亦即：

1) u和v均满足拉普拉斯方程。

2) $u(x,\ y)=c_1$，$v(x,\ y)=c_2$，两簇曲线互相正交。

(3) 物理上的平面场常可用一个解析函数$f(z)$来描写，$f(z)$称为复势。例如：

在电学中，可用$f(z)$表示平面静电场的复势，$u(x,\ y)$为电势，$u(x,\ y)=c_1$为等势线簇；$v(x,\ y)$为通量函数，$v(x,$