中國科學院數學研究所力學研究室專刊
乙種　　第2號

力學問題論集第二輯

彈性薄板的小撓度平衡問題

中國科學院數學研究所力學研究室編輯
中國科學院出版

內 容 提 要

此書是中國科學院數學研究所力學研究室所主辦的力學討論會的報告彙編第二輯，此討論的主題是一般彈性薄板的小撓度問題的靜力平衡問題。報告分三部分：第一部分是彈性薄平板小撓度問題，介紹了英、美、德、法各國的工作，包括了十九世紀年代在這問題上的主要貢獻；第二部分介紹了蘇聯在薄板力學方面的貢獻，討論的對象限於均勻、等厚的薄板；第三部分介紹了薄板在張力影響下的彎曲問題；最後是關於以上三報告的討論，在討論中提出了許多值得注意的問題。

這些力學問題在工程上的應用很廣，例如造船、房屋建築和工廠建築等。此書可供小撓度平板理論的工作者及從事於這方面工作的同志的參考。

中國科學院數學研究所力學研究室專刊

乙種　　第2號

彈性薄板的小撓度平衡問題

編輯者	中國科學院數學研究所力學研究室
出版者	中國科學院 北京(7)文津街3號
印刷者	新中央印刷所 上海康定路158號
發行者	新華書店

書號：0142	1955年2月第一版
(專) 039	1955年2月第一次印刷
(滬) 0001—2,460	開本：787×1092 1/16
字數：119,000	印張：$7\frac{1}{2}$

定價：17,000元

序

這是中國科學院數學研究所力學研究室所主辦的力學討論會的第二種報告彙編。這一系列報告是在1954年春季假清華大學舉行的。參加這個討論會的有北京西郊各院校和鐵道部鐵道研究所的力學工作者。討論的主題是一般彈性薄板的小撓度問題。

一般薄板的小撓度問題普通有三方面：靜力平衡問題、振動問題和穩定問題。我們的報告會討論的主要內容只限於靜力平衡問題。

薄板的小撓度問題有長遠的歷史背景，文獻是非常豐富的。我們所介紹的顯然並不完全，但是也不失爲一個好的開始。討論會的第一部分介紹了英、美、德、法各國的工作，包括了十九世紀年代在這個問題上的主要貢獻。討論會的第二部分介紹了蘇聯在二十世紀年代內的貢獻，但是限於文獻原文不易獲得，顯然就不夠詳細。最後介紹了薄板在張力影響下的彎曲問題，在這方面的工作並不多。

薄板的小撓度平衡問題一般可以分爲下列各部分：普通各種形狀的薄板在各種支撐情形下和各種載荷情况下的平衡問題，這是彈性體力學歷史上最受人歡迎的問題；其次是用格栅支承的地板的彎曲問題，這在造船和房屋建築上很有用處；再其次是無梁地板的彎曲問題，這在工廠建築上有很大的影響；最後是在彈性地基上的薄板彎曲問題。至於那些面內受有張力的薄板彎曲問題，在現在也逐漸爲人們所注意。

同時薄板小撓度平衡問題和平面應力問題，在歷史上推動了數學分析對於雙調和函數的研究，但是還有很多問題顯然沒有能很好解決，我們爲了解決具體問題，在工程上還必須借助於數字解法。在數字解法方面，我們的介紹是很不夠的。在這一方面讀者可以參考 H. Marcus 著的 "Die Theorie elastischer Gewebe" (1932) 和 Л. В. Канторович и В. И. Крылов 著的 "ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ ВЫСШЕГО АНАЛИЗА" (1950)。前者着重在差分方程的解法，後者着重在一般近似解法。

這個討論會的討論中，提出了很多值得注意的問題。這對於推進小撓度平板理論的研究，將是有所幫助的。

我們必須要指出，在目前厚板彎曲理論的研究，是很受人注意的。從這裏，我

們將得到關於薄板理論的基本假設和運用範圍。厚板彎曲理論的研究對於薄板理論的邊界條件將會給我們進一步的瞭解。

我們也必須指出，薄板小撓度平衡問題雖然已經有了悠久的歷史，但是到現在還是有不少問題沒有很好的解決，例如四周插入固定的長方薄板彎曲問題，直到最近還有蘇聯學者在進行着研究。

我們相信這些報告和討論記錄的發表，將對於小撓度平板理論的工作，起着普及作用，可以給新從事這方面工作的同志一些值得參考的資料。

讓我們向一切參加討論會的同志們致謝。

錢偉長 1954年9月

目　　錄

彈性薄平板小撓度問題

葉 開 沅

(北京大學數學力學系)

一. 引 言

薄平板小撓度問題在彈性體力學的領域中，歷史甚爲悠久，在工程的應用上甚爲廣泛，對數學家而言，它是一個很有興趣的問題，因此從事於這方面的研究工作的人很多。本文的目的不在全面地介紹，因此在內容的選擇上便有了適當的限制。在這裏我們只討論均勻、各向同性、受橫向載荷、穩定的平板小撓度問題，至於板的動力學、板的穩定性、各向異性板、在彈性地基上的板、變厚度的板等問題，則不在討論之列。

在這裏我們將提供一些參考文獻，以供與這方面有關的工作同志們的參考。提供的原則是要在目前國內能見到的，因此好些材料便只好割愛了，這樣也就使得我們的介紹不能很全面。蘇聯的文獻也不包括在內，因爲這方面將由胡海昌同志另文介紹。

鐵木辛哥(Timoshenko S.)[1]所著的"平板和殼體理論"，是一本國內相當流行的書，除了一些重要的部分外，我們便不再討論這本書中所包含的內容，所用的符號除了特別聲明的以外，也完全根據這本書，一些大家所熟知的公式，也引自該書。

關於平板問題的歷史發展，讀者可參閱拉甫[2](Love, A. E. H.)所著的"彈性體力學"。

勞克[3](Roark, R. J.)在"應力和應變的公式"一書中，搜集了許多供實際應用的平板撓度和應力的公式。這些公式在工程設計上是很有用的。

二. 薄平板小撓度問題的假定

在彈性體力學中分析應力時，我們可從介質(彈性體)中取一小正六面體元素

出來，因爲介質是被假定爲連續的，所以整個的介質便可以看作是由無數個這樣的小正六面體元素組成的。假如這正六面體很小時，那麼這正六面體在各個平面上的應力便相當於過一點在原來各個平面上的應力，每一個平面上的應力可分解爲三個應力分量，這樣一共便有九個應力分量；若所選坐標軸和正六面體相鄰的三平面垂直，它們應爲(見圖 1)：

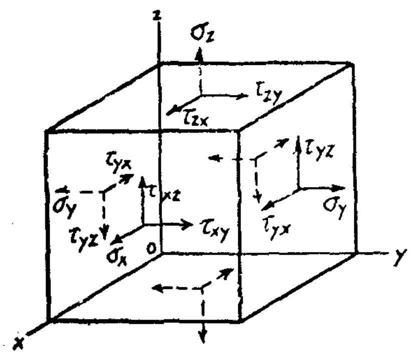

圖 1. 一點的應力分量

$$\begin{array}{ccc} \sigma_x, & \tau_{xy}, & \tau_{xz} \\ \tau_{yx}, & \sigma_y, & \tau_{yz} \\ \tau_{zx}, & \tau_{zy}, & \sigma_z \end{array}$$

由力矩的平衡關係，我們可得出

$$\tau_{pq}=\tau_{qp}(p,\ q=x,\ y,\ z).$$

這樣九個應力分量中獨立的便只有六個了。我們可以證明，過這一點的任意方向的平面上的應力，都可用這六個應力分量來表示，因此假如坐標選擇以後，規定了六個應力分量，這樣便足夠來描繪物體內部的應力分佈情況。

薄平板小撓度問題所根據的是線性平板理論，它只有在撓度很小、板很薄的情形下才能應用，這種理論有下面的假定：

1. 板很薄；
2. 撓度很小；
3. 在形變以前中性面上的法線在形變以後仍爲法線。

現依次來說明這三個假定。

1. 板很薄　這種厚薄的程度是指板的厚度 h 和板的其他尺寸比較而言。因爲板很薄，我們可由板中截取一小元素來考慮它的平衡，這小元素的上下兩面便是平板上下兩個表面，而其他的面則與此上下兩平面垂直，小元素與平板表面平行的平面的面積是很小的。

2. 撓度很小　便是 $\frac{w}{h}\ll1$，其中 w 是平板中性面的撓度，我們考慮如圖 2 所示的長方體，它的各邊長度是 h, dx, dy；平板線性理論是由梁的理論擴展而成的，因此我們知道垂直於 dx 的平面上的 σ_x 要產生一力偶矩，τ_{xz} 要產生一剪力；垂直於 dy 的平面上的 σ_y 也同樣產生一力偶矩，τ_{yz} 產生一剪力。我們可將圖 2 中 x 和 y 平面上的應力分量所組成的合力，分解爲對於中性面上的力矩和作用在這些平面上的合力，圖中所表示的便是各平面上的力偶矩和合力的分佈。

其中 M_x 是沿 y 軸分佈的單位長度力矩，M_y 是沿 x 軸分佈的單位長度力矩；M_{xy} 和 M_{yx} 是平行於 x 和 y 平面的單位長度扭轉力矩；Q_x 和 Q_y 是沿 y 和 x 軸的單位長度剪力；N_x，N_y 是沿 y 軸和 x 軸分佈單位長度的垂直力；N_{xy} 是單位長度的剪力；N_x，N_y，N_{xy} 相當於作用在一薄膜（中性面）上的力。我們如選取坐標使 xy 平面和中性面相重，z 軸向下爲正，上面的力矩和應力各等於

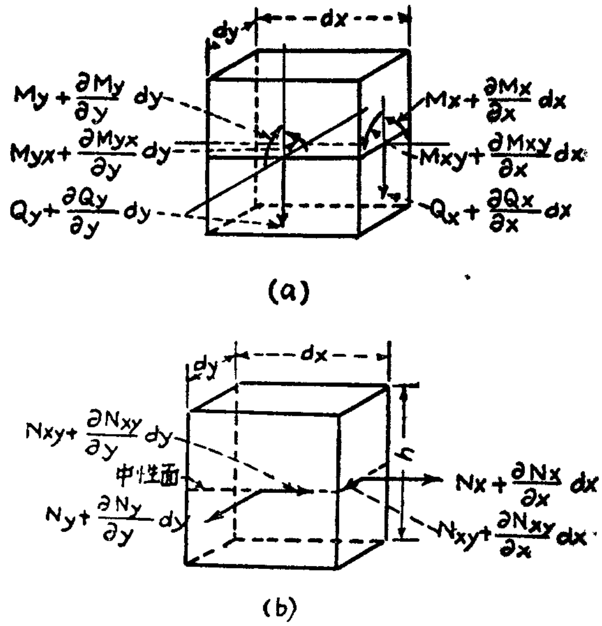

圖 2　小元素的平衡

$$\left.\begin{aligned}
M_x &= \int_{-h/2}^{h/2} z\sigma_x dz, & M_y &= \int_{-h/2}^{h/2} z\sigma_y dz, & M_{xy} &= -\int_{-h/2}^{h/2} z\tau_{xy} dz;\\
M_{yx} &= \int_{-h/2}^{h/2} z\tau_{yx} dz, & N_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz, & N_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y dz;\\
N_{xy} &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} dz, & Q_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz, & Q_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} dz.
\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

解平板問題可從圖 2 中小元素的平衡着手，在水平方向力的平衡和 N_x，N_y 以及 N_{xy} 的水平分力有關，在垂直方向力的平衡則和横向載荷 Q_x，Q_y 以及 N_x，N_y，N_{xy} 的垂直分力有關，當撓度很小時，N_x，N_y，N_{xy} 在垂直方向的分力便很小，因此它們對整個平板的平衡影響也就很小，這樣 N_x，N_y，N_{xy} 在撓度很小時便可不加考慮。

這樣一個近似理論，還是比較接近實際的，因爲我們知道，在 $w=0$ 時（即不受外力時）總是平衡的。現在從 $w=0$ 的平衡狀態至有撓度形成的平衡狀態，由於丟掉了一些應力分量，這樣所得的平衡方程和眞實情况便有些距離，不過我們已假定撓度是很小的，在第二個平衡狀態不論眞實的或丟掉一些應力分量後的和 $w=0$ 時的平衡狀態是很接近的，因此，由於丟掉一些不重要的應力分量所引起的誤差是很小的。

3. 研究證明，支座間距超過十倍板厚的平板在彎曲和撓度很小時，可以應用

解決梁的彎曲問題時所用的假定❶。這些假定是：

(1) 中性面不受拉壓，它和梁的彎曲理論中的中性軸所起的作用一樣。

(2) 在形變以前中性面的法線在形變以後仍爲法線。

三. 薄平板小撓度基本公式的推導

薄平板小撓度問題基本公式的推導，有下面三種：

1. 由小元素的平衡着手：

由上面的假定，圖 2(b) 中所示的力可不加考慮，而只考慮圖 2(a) 中的小元素的平衡便可以了。令單位面積的橫向載荷是 q，由垂直方向力的平衡，我們有

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x}dxdy+\frac{\partial Q_y}{\partial y}dxdy+qdxdy=0,$$

也就是

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x}+\frac{\partial Q_y}{\partial y}+q=0. \tag{2}$$

對於 x 軸的力矩之和爲零，我們有

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}dxdy-\frac{\partial M_y}{\partial y}dxdy+Q_ydxdy=0,$$

也就是

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}-\frac{\partial M_y}{\partial y}+Q_y=0. \tag{3}$$

同理對於 y 軸力矩之和爲零，我們有

$$\frac{\partial M_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial M_x}{\partial x}-Q_x=0. \tag{4}$$

以方程(3)，(4)中所得的 Q_x，Q_y 代入方程(2)，我們有

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 M_{yx}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x\partial y}=-q.$$

因爲 M_{xy} 和 M_{yx} 的方向被假定爲如圖 2(a) 所示，同時 $\tau_{xy}=\tau_{yx}$，所以 $M_{xy}=-M_{yx}$，上式可寫成

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2}-2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x\partial y}=-q. \tag{5}$$

在小撓度理論中，M_x，M_y，M_{xy} 和撓度 w 有下列的關係[1]：

---

❶ М. М. Филоненко-Бородич，材料力學教程，第二卷 P. 221，高等教育出版社出版，1954 年，陶學文譯。

$$\left.\begin{aligned}M_x&=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right),\\M_y&=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right),\\M_{xy}&=D(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y},\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

其中 $D=\dfrac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ 是抗撓剛度，ν 是泊松比。

由方程(3),(4),可求出 Q_x, Q_y 和撓度有下列的關係:

$$\left.\begin{aligned}Q_x&=-D\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right),\\Q_y&=-D\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right).\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

以(6)代入(5),我們便得到需要的基本方程

$$\nabla^2\nabla^2 w=\frac{q}{D},\tag{8}$$

其中

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

假如 w 已求得,由(6),(7)便可求出 M_x, M_y, M_{xy}, Q_x 和 Q_y。

2. 由彈性體理論的平衡方程着手:

在彈性體理論中,考慮彈性體中一微小元素的平衡,所得的平衡方程是

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}=0,\tag{9a}$$

$$\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z}=0,\tag{9b}$$

$$\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}=0.\tag{9c}$$

$$\tau_{xy}=\tau_{yx},\quad \tau_{yz}=\tau_{zy},\quad \tau_{xy}=\tau_{yx}.\tag{10}$$

將方程(9c)對 z 由 $-\dfrac{h}{2}$ 至 $\dfrac{h}{2}$ 積分，得

$$\int_{-h/2}^{h/2}\frac{\partial}{\partial x}\tau_{zx}dz+\int_{-h/2}^{h/2}\frac{\partial}{\partial y}\tau_{zy}dz+\int_{-h/2}^{h/2}\frac{\partial}{\partial z}\sigma_z dz=0,$$

也就是

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_{-h/2}^{h/2}\tau_{zx}dz+\frac{\partial}{\partial y}\int_{-h/2}^{h/2}\tau_{zy}dz+\sigma_z\Big|_{-h/2}^{h/2}=0.$$

由(1)式，我們便得到

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x}+\frac{\partial Q_y}{\partial y}+q=0.$$

將方程(9b)乘以 z 後，再對 z 由 $-\frac{h}{2}$ 至 $\frac{h}{2}$ 積分，即

$$\int_{-h/2}^{h/2}\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x}zdz+\int_{-h/2}^{h/2}\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}zdz+\int_{-h/2}^{h/2}z\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z}dz=0.$$

由部分積分法，

$$\int_{-h/2}^{h/2}z\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z}dz=z\tau_{yz}\Big|_{-h/2}^{h/2}-\int_{-h/2}^{h/2}\tau_{yz}dz.$$

因爲在平板上下兩面 $\tau_{yz}=0$，由(1)式，我們得到

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}-\frac{\partial M_y}{\partial y}+Q_y=0.$$

同理我們可由方程(9a)，得到方程(4)。

3. 由變分法着手：

我們知道平板的應變能量是

$$V=\frac{1}{2}D\iint\left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2-2(1-\nu)\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2\right]\right\}dxdy,\tag{11}$$

這裏的積分作用在平板中性面的全部。

由虛位移原則，假如平板的撓度 w 有一微小的變化 δw，那麼引起的應變能量的變化必須等於外力所做的功。外力包括橫向載荷 q，分佈於平板邊界上的彎曲力矩 $\bar{M}_n$ 和橫向力 $\bar{Q}$，其中 s 是構成平板邊界的曲線弧長，n 是邊界的法線方向，t 是邊界的切線方向(圖3)。基於此，我們便得出下列的關係式：

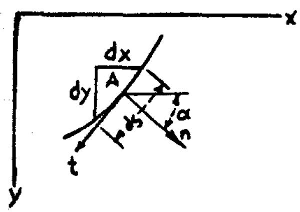

圖3. 平板的曲線邊界

$$\delta V=\iint q\,\delta w dxdy-\int\bar{M}_n\frac{\partial\delta w}{\partial n}ds+\int\bar{Q}\,\delta w ds.\tag{12}$$

由(11)式，並利用部分積分，我們得出

$$\delta V=D\left\{\iint\nabla^2\nabla^2 w\cdot\delta w dxdy+\int\left[(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cos^2\alpha+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.+2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\sin\alpha\cos\alpha+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\sin^2\alpha\right)+\nu\nabla^2 w\right]\frac{\partial\delta w}{\partial n}ds+$$

$$+\int\left\{(1-\nu)\frac{\partial}{\partial s}\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\sin\alpha\cos\alpha-\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)\right]-\right.$$

$$-\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}\right)\cos\alpha-\left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}+\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}\right)\sin\alpha\Big\}\delta w ds\Big\}, \tag{13}$$

其中 α 是法線與 x 軸所成的角度(見圖 3)。

將(13)式代入方程(12),若要滿足方程(12),必須要下面三個方程成立:

$$\iint(D\nabla^2\nabla^2 w-q)\delta w dxdy=0, \tag{14}$$

$$\int\Big\{D\Big[(1-\nu)\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cos^2\alpha+2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\sin\alpha\cos\alpha+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\sin^2\alpha\Big)+\nu\nabla^2 w\Big]+ \\ +\overline{M}_n\Big\}\frac{\partial\delta w}{\partial n}ds=0, \tag{15}$$

$$\int\Big\{D\Big\{(1-\nu)\frac{\partial}{\partial s}\Big[\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Big)\sin\alpha\cos\alpha-\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)\Big]- \\ -\Big(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}\Big)\cos\alpha-\Big(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}+\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}\Big)\sin\alpha\Big\}-\overline{Q}\Big\}\delta w ds=0. \tag{16}$$

因為 δw 是任意的,所以若要滿足方程(14),必須使平板中性面上的所有點都符合方程

$$\nabla^2\nabla^2 w=\frac{q}{D}. \tag{17}$$

方程(15),(16)給出了邊界條件,我們將要在下面討論。

約福來(Jeffreys, H.)[4]以及奧爾特勞耶[5](Oldroyd, J. G.)用張量和變分原理推出了薄板方程,這種推導的辦法在原理上並無新奇之處。

四. 薄平板小撓度問題的邊界條件

我們在上面得出了薄平板小撓度問題的基本方程,若要解決問題,除此以外,在邊界上尚須符合邊界條件。

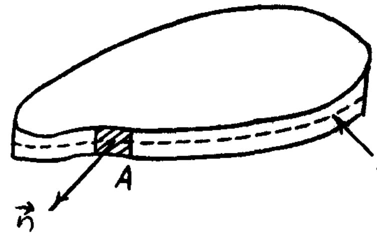

圖 4. 平板邊界上任一點的邊界條件

現在我們來考慮平板的中性面為曲線 s 所規定的邊界任一點 A 的邊界條件,根據彈性理論,這一點對於應力的邊界條件應為:

$$\left.\begin{aligned}\bar{X}&=\sigma_x l+\tau_{xy}m+\tau_{xz}n\\ \bar{Y}&=\tau_{yx}l+\sigma_y m+\tau_{yz}n\\ \bar{Z}&=\tau_{zx}l+\tau_{yz}m+\sigma_z n\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

其中 $\bar{X}$, $\bar{Y}$, $\bar{Z}$ 是作用在 A 點微小的平面上的面力分量,l, m, n 是過 A 點的法線

$\vec{n}$ 的方向餘弦。

因爲平板是很薄的，由聖維那(St. Venant) 原則，在這樣的邊界上，我們不需要考慮應力分佈情況，像(18)式那樣來規定邊界條件，我們只要考慮這些應力生成的合力和總力偶矩便可以了。現在用一如圖 5 所示的長方形板在 $x=a$ 的一邊舉例來說明薄平板小撓度理論的邊界條件。一般應用的邊界條件有簡支、固定和懸空三種。最早泊松[6] 提出的邊界條件如下：

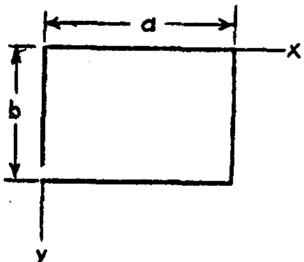

圖 5. 長方形板

a. 簡支邊界條件是

$$w\big|_{x=a}=\bar{w}, \qquad M_x\big|_{x=a}=\bar{M}_x; \tag{19}$$

b. 固定時的邊界條件是

$$w\big|_{x=a}=\bar{w}, \qquad \frac{\partial w}{\partial x}\bigg|_{x=a}=\bar{\phi}; \tag{20}$$

c. 懸空時的邊界條件是

$$M_x\big|_{x=a}=\bar{M}_x, \quad M_{xy}\big|_{x=a}=\bar{M}_{xy}, \quad Q_x\big|_{x=a}=\bar{Q}_x; \tag{21}$$

其中 $\bar{M}_x$, $\bar{M}_{xy}$, $\bar{Q}_x$ 表示外力在邊界上生成的已給的分佈情況，$\bar{w}$, $\bar{\phi}$ 是邊界上撓度和 x 方向的斜度照已給的分佈情況，而 M_x, M_{xy}, w, $\dfrac{\partial w}{\partial x}$, Q_x 是由解方程(8)所得到的，它們都包含有待定常數。

我們知道方程(8)是一個四級偏微分方程，像圖 5 所示的長方板，每邊只需要二個邊界條件，但在懸空時，卻有了三個邊界條件，這顯然是多了一個邊界條件，這問題曾引起了當時力學界的注意。一直到契爾薛鶴夫[7] (Kirchhoff, G.)才解決了這問題。他用變分法得出了基本方程(8)和準確的邊界條件，也就是前面得到的(15)，(16)式。

假如平板沿着圖 3 中所示的邊是固定的，則沿着這邊的 δw 和 $\dfrac{\partial \delta w}{\partial n}$ 爲零。這樣便適合了方程(15)和(16)。

假如這邊是簡支的，則沿着這邊只有 δw 爲零，這樣方程(16)便適合了，若要方程(15)適合，必須

$$\bar{M}_n=-D\left[(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cos^2\alpha+2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\sin\alpha\cos\alpha+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\sin^2\alpha\right)+\nu\nabla^2 w\right]. \tag{22}$$

在圖 5 所示的平板 $x=a$ 的一邊，$\alpha=0$ 則上式變爲

$$\overline{M}_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{x=a} = M_x|_{x=a}, \tag{23}$$

這就是(19)式的第二式。

假如這邊是懸空的，δw 和 $\frac{\partial \delta w}{\partial n}$ 均不爲零，若要方程(15)，(16)適合，必須有下列的等式：

$$\overline{M}_n = -D\left[(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cos^2\alpha + 2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\cos\alpha\sin\alpha + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\sin^2\alpha\right)+\nu\nabla^2 w\right], \tag{24}$$

$$\bar{Q} = D\left\{(1-\nu)\frac{\partial}{\partial s}\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\sin\alpha\cos\alpha - \frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)\right] - \right.$$
$$\left. -\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}\right)\cos\alpha - \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}+\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}\right)\sin\alpha\right\}. \tag{25}$$

若考慮圖 5 中所示的 $x=a$ 的邊的邊界條件，在這情形中，$\alpha=0$，(24) 式便是(21)式中的第一式，(25)式是

$$\bar{Q} = Q_x - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}\bigg|_{x=a}. \tag{26}$$

這樣便把原來泊松提出的懸空的三個邊界條件變爲二個。我們知道在薄平板理論中，對於一些不重要的應力分量已不予以考慮，這樣求出來的應變能量當然是近似的，邊界條件也必須是近似的，應用了變分原理便是肯定了在這樣的假定下所得的式子是最接近實際情況的，因此，這樣得到的邊界條件也是最接近實際情況的。

用物理來解釋邊界條件(26)的是加爾文和泰脫(Kelvin and Tait)❶[8]，他們指出泊松看法的錯誤是在於把薄板的邊界條件看作了厚板的邊界條件。在薄平板的假定下，各種邊緣情况都必須丟掉一個不重要的邊界條件；在簡支和固定的情形下，泊松都看對了，但在懸空的情形，如何把厚板的三個邊界條件變作二個，卻難住了力學大家泊松。

加爾文和泰脫指出懸空時包含扭轉力矩和剪力的邊界條件可變爲一個，邊界上的 M_{nt} 可以一相當的大小爲 $-\frac{\partial M_{nt}}{\partial s}$ 的剪力來代替，我們可證明如下，如圖 4 假如沿着 s 分佈一剪力大小是 $-\frac{\partial M_{nt}}{\partial s}$，方向在任何一點都與 s 構成的平面成垂直。現在我們來求這剪力生成的合力和總力偶矩。

---

❶ 波西湼斯克 (Boussinesq) 在 1871 年也給出了同樣的解釋，讀者可參閱 [9] [10]。

合力應爲

$$\oint -\frac{\partial M_{nt}}{\partial s}ds=0.$$

假如 xy 平面和 s 構成的平面相重，對於 x 和 y 軸的力偶矩分量是

$$\oint -y\frac{\partial M_{nt}}{\partial s}ds \text{ 和 } \oint x\frac{\partial M_{nt}}{\partial s}ds,$$

而

$$\oint -y\frac{\partial M_{nt}}{\partial s}ds=\oint M_{nt}\frac{\partial y}{\partial s}ds=\oint M_{nt}\cos(x,n)\,ds,$$

$$\oint x\frac{\partial M_{nt}}{\partial s}ds=\oint -M_{nt}\frac{\partial x}{\partial s}ds=\oint M_{nt}\cos(y,n)ds.$$

$\oint M_{nt}\cos(x,n)\,ds$ 和 $\oint M_{nt}\cos(y,n)\,ds$ 便是 M_{nt} 生成的總力偶矩在 x 和 y 方向的分量，這樣便說明了這樣的變更與 M_{nt} 所作用的效果完全相同。

五. 薄平板小撓度問題的薄膜比擬

最先介紹這個方法的是馬爾庫斯[11]。將方程(6)前二式相加，我們有

$$M_x+M_y=-D(1+\nu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right). \tag{27}$$

引進新的符號

$$M=\frac{M_x+M_y}{1+\nu}=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right). \tag{28}$$

基本方程(8)和(27)便可用下面的形式來表示：

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 M}{\partial y^2}&=-q,\\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}&=-\frac{M}{D}.\end{aligned}\right\} \tag{29}$$

這二個方程和均勻受拉和橫向載荷的薄膜所得的形式相同❶。

在邊緣簡支的多邊形平板情形中，上述方程的解是很簡單的，在這種情形沿着每一個邊界上的直線部分，因爲在邊界上 $w=0$，我們有 $\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}=0$；同時在邊緣上 $M_n=0$，因此在邊界上 $\frac{\partial^2 w}{\partial n^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}=0$，亦即 $\frac{\partial^2 w}{\partial n^2}=0$，根據參考書[1]方程(34)，在邊界上我們有

$$\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial n^2}=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=-\frac{M}{D}=0. \tag{30}$$

❶ 參閱 Timoshenko, S., *Theory of Elasticity* p. 239, 1934。

這樣原來的問題變爲先求下列方程和邊界條件的解，

$$\left.\begin{aligned} \nabla^2 M &= -q, \\ M &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

在邊界上 M 在這情形中相當於均勻引伸(uniform stretched)和橫向載荷，邊緣撓度爲零的薄膜問題中的撓度。

求得 M 後然後再代入方程(29)的第二式求解。

假如簡支多邊形平板，邊緣均勻地分佈有力矩 $\overline{M}_n$，方程(29)在這情形便成爲

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} &= 0, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= -\frac{M}{D}. \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

沿着邊界我們仍有 $\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}=0$，因此，

$$\overline{M}_n = -D\frac{\partial^2 w}{\partial n^2}.$$

並且在邊界上我們有

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 w}{\partial n^2}=-\frac{\overline{M}_n}{D}=-\frac{M}{D}.$$

假如令在平板所有的點 $M=\overline{M}_n$，那麼邊界條件和(32)式的第一式便將適合，這也就是說在平板的整個區域裏 M_x 和 M_y 是常數。平板的撓度便將由(32)式[1]的第二式求出，它成爲

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=-\frac{\overline{M}_n}{D}. \tag{33}$$

這就和均勻引伸，受均勻載荷的薄膜情形相當。在這情形中的 w 也相當於扭轉問題的應力函數，因此我們可利用已解決的扭轉問題中的結果應用到這一類問題中來。

六. 平板小撓度問題的實際問題

平板小撓度問題的實際問題，包含下列幾方面：

(1) 不同的形狀；

---

[1] 這種辦法最早由富奴斯基-克利格爾發表，可參閱 Woinowsky-Krieger, Berechnung der ringsum frei anfliegenden gleichseitigen Dreiecksplatte, *Ing-Arch.*, **4**, pp 254—262, 1933。

(2) 不同的載荷；

(3) 不同的邊界條件。

爲了便利起見，我們依形狀的不同，把平板問題分成下面三部分來討論：

a) 圓平板問題，

b) 長方形平板問題，

c) 其他形狀的平板問題。

七. 圓平板小撓度問題

最早處理圓平板問題的是泊松[6]，他求出了解答的一般形式和下面的特殊問題。

假如令圓板的半徑是 a，每單位面積的均勻載荷是 q。由基本方程(8)，我們可求出對稱載荷圓平板的方程

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left\{r\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dw}{dr}\right)\right]\right\}=\frac{q}{D}. \tag{34}$$

這方程的解答是

$$w=\frac{qr^4}{64D}+\frac{c_1}{4}r^2+c_2\log\frac{r}{a}+c_3, \tag{35}$$

其中 c_1, c_2, c_3 是待定常數，依不同的邊界條件而定。

在均勻載荷 q 作用下，邊緣簡支的情形

$$w=\frac{q}{64D}(a^2-r^2)\left(\frac{5+\nu}{1+\nu}a^2-r^2\right), \tag{36}$$

在邊緣固定的情形

$$w=\frac{q}{64D}(a^2-r^2)^2. \tag{37}$$

在集中載荷 P 作用在中心，邊緣簡支的情形

$$w=\frac{P}{8\pi D}\left[-r^2\log\frac{a}{r}+\frac{1}{2}\,\frac{3+\nu}{1+\nu}(a^2-r^2)\right], \tag{38}$$

在邊緣固定的情形

$$w=\frac{P}{8\pi D}\left[-r^2\log\frac{a}{r}+\frac{1}{2}(a^2-r^2)\right]. \tag{39}$$

均勻載荷分佈在半徑爲 b 的同心圓上的圓板的解是由聖維那❶得出來的，有

❶ St. Venant, Annotated Clebsch, § 45 的註。