21世纪高等学校教材

罗庆来 郁大刚 宋柏生 编著

高等数学

GAODENGSHUXUE

（下册）

东南大学出版社
SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS

高 等 数 学

（下册）

罗庆来　郁大刚　宋柏生　编　著

东 南 大 学 出 版 社

内容提要

本书是参照教育部制定的全国硕士研究生入学考试经济、管理类数学考试大纲和东南大学经、管、文科高等数学教学基本要求，并结合近年来东南大学、河海大学高等数学课程的教学改革实践而编写的．全书旨在反映经、管、文特点，适合经、管、文要求，围绕增强学生数学素养以获得合理的适应未来发展的知识结构为目的，为他们将来进一步学习与应用数学打下较好的基础．

全书分上、下两册．本册为下册，内容包括多元微积分、无穷级数、微分方程与差分方程等三章，每章配有适量习题与小结，书后附有习题答案．

本书可供高等院校经、管、文科学生使用，也可适应远程教学，同时可供考研复习参考．

图书在版编目(CIP)数据

高等数学．下册／罗庆来，郁大刚，宋柏生编著．
—南京：东南大学出版社，2003.1
ISBN 7-81089-136-7

Ⅰ．高…　Ⅱ．①罗…②郁…③宋…　Ⅲ．高等数学—高等学校—教材　Ⅳ．O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 106851 号

东南大学出版社出版发行
(南京四牌楼 2 号　邮编 210096)
出版人：宋增民
江苏省新华书店经销　　南京京新印刷厂印刷
开本：700mm×1000mm　1/16　印张：10.75　字数：211 千字
2003 年 2 月第 1 版　　2003 年 2 月第 1 次印刷
印数：1—5000　　定价：16.00 元

前　言

本教材是参照教育部制定的全国硕士研究生入学考试经济、管理类数学考试大纲和东南大学经、管、文科高等数学教学基本要求，并结合近年来东南大学、河海大学高等数学课程的教学改革实践而编写的．由于数学的自身特点与人类的进步，数学的概念、理论与方法已逐渐渗透到社会科学的各个领域，特别是经济、管理学科．与理工科学生相比较，经、管、文科学生在知识结构与实际需要等方面对高等数学课程的要求有一定的差异．本教材旨在反映经、管、文特点，适应经、管、文要求，围绕增强学生数学素养，以获得合理的适应未来发展的知识结构为目的，为他们将来进一步学习与应用数学打下较好的基础．

本书共八章，分上、下两册．上册包括函数、极限与连续、导数与微分、中值定理与导数应用、积分及其应用等五章；下册包括多元函数微积分、无穷级数、微分方程与差分方程等三章．每章配有适量习题与小结，习题答案分列于上、下册最后．

本书第一、二、八章由罗庆来编写，第三、四、七章由宋柏生编写，第五、六章由郁大刚编写．全书由罗庆来、宋柏生统稿．

限于编者水平与时间仓促，书中谬误与疏漏在所难免，望广大读者不吝指正．

编　者

2002 年 6 月

目　　录

6 多元微积分学

建立在空间几何概念与多元函数基础上的多元微积分学是一元微积分的推广与发展.多元微积分在原理上是一元微积分的延续,由于变量增加,多元微积分在计算的方法上较一元微积分有较大的差异,计算的复杂性有所增加.在学习中将多元微积分的方法与一元微积分进行对照是有益的.

6.1 空间解析几何简介

6.1.1 空间直角坐标系

我们在中学数学中已经知道,直线上的点可以通过数轴与实数进行一一对应,平面上的点可以通过平面直角坐标系与二元实数组(x,y)进行一一对应,现在我们将上述对应方法推广到空间的点.为此,我们在空间选定一点O作为空间直角坐标的原点,经过原点O作三条两两垂直并且单位长度相等的数轴Ox,Oy,Oz.三条数轴的正方向按照右手法则选取,即右手拇指竖直指Oz轴正向,食指前伸指Ox轴正向,中指弯曲九十度指Oy轴正向.这样就建立了一个空间直角坐标系$Oxyz$(见图6.1).

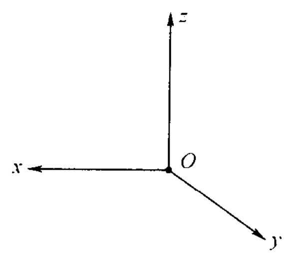

图 6.1

在空间直角坐标系$Oxyz$中,O称为坐标**原点**;数轴Ox,Oy,Oz称为**坐标轴**(简称为x轴,y轴,z轴);每两条坐标轴确定一个**坐标平面**,分别称为xOy坐标平面、yOz坐标平面和zOx坐标平面(简称为xy平面、yz平面和zx平面);三个坐标平面两两垂直,将整个空间分割为八个部分,称为八个卦限.在八个卦限中,由三条坐标的正向所界定的那一部分为第一卦限,在xy平面上方(z轴正向)依逆时针排列的是一、二、三、四卦限,在xy平面下方对应的是五、六、七、八卦限.

对于空间中的任一个点M,过M分别作垂直于三条坐标轴的三个平面,三个平面与垂直于它们的坐标轴分别交于P、Q、R三点(见图6.2),P、Q、R称为M在x、y、z轴上的投影.如果P、Q、R在坐标轴上的坐标分别为x、y、z,则点M惟一地确定三元有序实数组(x,y,z).反之,任意给定一个三元有序实数组(x,y,z),按照上面的做法,可以惟一地确定空间的

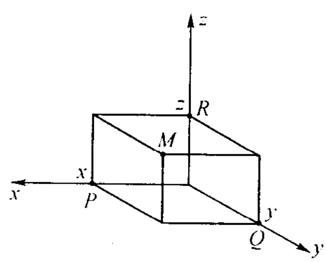

图 6.2

一个点 M.所以空间的点通过空间直角坐标系与三元有序实数组(x,y,z)建立一一对应.因此,我们称空间中的点 M 通过上述方法得到的对应的三元有序实数组为空间中点 M 的**坐标**,记为 $M(x,y,z)$.

显然,原点 O 的坐标为$(0,0,0)$;三个坐标轴上的点的坐标分别为$(x,0,0)$,$(0,y,0)$,$(0,0,z)$;而三个坐标面上的点的坐标分别为$(x,y,0)$,$(x,0,z)$和$(0,y,z)$.

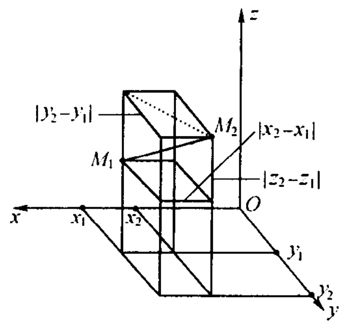

图 6.3

设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$、$M_2(x_2,y_2,z_2)$是空间中任意两点,过 M_1、M_2 各作三个垂直于坐标轴的平面,则六个平面围出一个长方体.长方体三条边的长度分别为 M_1、M_2 两点在三个坐轴上投影之间的距离,即$|x_2-x_1|$,$|y_2-y_1|$,$|z_2-z_1|$,而 M_1、M_2 间的距离恰是长方体对角线的长度.由勾股定理知

$$|M_1M_2|^2 = |x_2-x_1|^2 + |y_2-y_1|^2 + |z_2-z_1|^2$$

于是**空间任意两点间的距离**为

$$d = |M_1M_2| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} \tag{1}$$

特别,$M(x,y,z)$到坐标原点 $O(0,0,0)$ 的距离为

$$d = |OM| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

如果点 M_1、M_2 都在 xy 平面上(即 $M_1(x_1,y_1,0)$,$M_2(x_2,y_2,0)$),则 M_1 与 M_2 之间距离就退化为平面上两点间的距离.故

$$d = |M_1M_2| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

例 1 设空间任意一点 $M(x,y,z)$,求 M 到 x 轴及到 xy 平面的距离.

解 因为点 M 的坐标为(x,y,z),所以点 M 在 x 轴与 xy 平面上的投影分别为 $M_1(x,0,0)$ 与 $M_2(x,y,0)$.由公式(1),有 M 到 x 轴与 xy 平面的距离分别为

$$d_1 = |MM_1| = \sqrt{(x-x)^2+(0-y)^2+(0-z)^2} = \sqrt{y^2+z^2}$$

$$d_2 = |MM_2| = \sqrt{(x-x)^2+(y-y)^2+(0-z)^2} = |z|$$

6.1.2 平面方程

平面是空间中最常见的形状,利用上一节中的两点间距离公式和勾股定理我们来推导平面方程的一般形式.

假设点 $P_0=(x_0,y_0,z_0)$是坐标原点 $O=(0,0,0)$以外的任意一点,过 P_0 并且与线段 OP_0 垂直的平面记为 π,则空间中任意一点 $P=(x,y,z)$在 π 上的充要条件是线段 P_0P 与线段 OP_0 相互垂直.利用勾股定理有

$$|OP|^2 = |OP_0|^2 + |P_0P|^2$$

即

$$x^2 + y^2 + z^2 = {x_0}^2 + {y_0}^2 + {z_0}^2 + (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2$$

化简可得

$$x_0 x + y_0 y + z_0 z - ({x_0}^2 + {y_0}^2 + {z_0}^2) = 0 \tag{1}$$

上式即为过 P_0 点并且与线段 OP_0 相垂直的平面方程.

如果 P_0 的三个坐标中有一个坐标为0,例如 $P_0 = (x_0, y_0, 0)$,则平面方程(1)变化为

$$x_0 x + y_0 y - ({x_0}^2 + {y_0}^2) = 0 \tag{2}$$

方程(2)所表示的平面平行于 z 轴.

如果 P_0 的三个坐标中有二个坐标为0,例如 $P_0 = (0, 0, z_0)$,则平面方程(1)变化为

$$z - z_0 = 0 \tag{3}$$

方程(3)所表示的平面与 z 轴垂直.

如果将 P_0 与坐标原点 O 的位置互换,即过原点 O 且与线段 OP_0 垂直的平面方程为

$$|P_0 P|^2 = |OP_0|^2 + |OP|^2$$

即

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = {x_0}^2 + {y_0}^2 + {z_0}^2 + x^2 + y^2 + z^2$$

化简可得

$$x_0 x + y_0 y + z_0 z = 0 \tag{4}$$

由平面方程(1)、(2)、(3)和(4)知道,任一平面的方程总可表示成为一个三元一次方程.当方程缺少一个变量时,表示平面与所缺变量对应的坐标轴平行;当方程缺少二个变量时,表示平面与所剩变量对应的坐标轴垂直;当方程缺少常数项时,表示平面过坐标原点.

反之,对于任意三元一次方程

$$Ax + By + Cy + D = 0 \tag{5}$$

其中 A、B、C 不全为0.取 $x_0 = \lambda A, y_0 = \lambda B, z_0 = \lambda C$ 代入方程,得

$$\lambda(A^2 + B^2 + C^2) + D = 0$$

所以

$$\lambda = \frac{-D}{A^2 + B^2 + C^2}, \qquad x_0 = \frac{-AD}{A^2 + B^2 + C^2}$$

$$y_0 = \frac{-BD}{A^2 + B^2 + C^2}, \qquad z_0 = \frac{-CD}{A^2 + B^2 + C^2}$$

于是方程(5)可表示为方程(1)的形式,即

$$\frac{-AD}{A^2 + B^2 + C^2}x + \frac{-BD}{A^2 + B^2 + C^2}y + \frac{-CD}{A^2 + B^2 + C^2}z -$$

$$\left[\left(\frac{-AD}{A^2+B^2+C^2}\right)^2+\left(\frac{-BD}{A^2+B^2+C^2}\right)^2+\left(\frac{-CD}{A^2+B^2+C^2}\right)^2\right]=0$$

所以方程(5)是平面方程的一般形式,通常我们称方程(5)为**平面的一般方程**.

例2 求过点 $P_0=(1,-2,3)$ 且与连接坐标原点及点 P_0 的线段 OP_0 垂直的平面方程.

解 设 $P=(x,y,z)$ 是所求平面上的点,则

$$|OP|^2=|OP_0|^2+|P_0P|^2$$

即

$$x^2+y^2+z^2=1+(-2)^2+3^2+(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2$$

化简得

$$x-2y+3z-14=0$$

所以所求平面方程为 $x-2y+3z-14=0$.

例3 设 A、B、C、D 都不为零,求平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 与三个坐标轴的交点.

解 因为 A、B、C、D 均不为零,令 $y=z=0$ 时,得 $x=-\dfrac{D}{A}$;令 $x=z=0$ 时,得 $y=-\dfrac{D}{B}$;令 $x=y=0$ 时,得 $z=-\dfrac{D}{C}$.

所以平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 与三个坐标轴的交点分别为

$$P=\left(-\frac{D}{A},0,0\right),\qquad Q=\left(0,-\frac{D}{B},0\right),\qquad R=\left(0,0,-\frac{D}{C}\right)$$

其中 $-\dfrac{D}{A}$, $-\dfrac{D}{B}$, $-\dfrac{D}{C}$ 称为平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 在三个坐标轴上的截距.

一般地,当平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 在三个坐标轴上的截距为 a、b、c 时,则点 $(a,0,0)$,$(0,b,0)$,$(0,0,c)$ 在平面上,将三点代入平面方程得

$$A=-\frac{D}{a},\qquad B=-\frac{D}{b},\qquad C=-\frac{D}{c}$$

将 $A=-\dfrac{D}{a}$,$B=-\dfrac{D}{b}$,$C=-\dfrac{D}{c}$ 代入平面方程并整理得

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \tag{6}$$

由于 a、b、c 是平面的截距,所以方程(6)也常称为**平面的截距式方程**.

例4 求平面 $x-2y+3z-14=0$ 到坐标原点的距离.

解 因为 $-14\neq 0$,所以平面 $x-2y+3z-14=0$ 不过坐标原点.由平面的构成知,存在平面上的点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$,使得平面与线段 OP_0 垂直,所以平面到坐标原点的距离就是线段 OP_0 的长度.故令 $x_0=\lambda$,$y_0=-2\lambda$,$z_0=3\lambda$,代入平面方程,得

$$\lambda(1+(-2)^2+3^2)-14=14\lambda-14=0$$

解得 $\lambda=1$,$P_0=(1,-2,3)$.所以平面到原点的距离为

$$d=|OP_1|=\sqrt{1^2+(-2)^2+3^2}=\sqrt{14}$$

一般地,当平面方程为 $Ax+By+Cz+D=0$ 时

$$x_0=\frac{-AD}{A^2+B^2+C^2},\qquad y_0=\frac{-BD}{A^2+B^2+C^2},\qquad z_0=\frac{-CD}{A^2+B^2+C^2}$$

平面到原点的距离为

$$d=\frac{|D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \tag{7}$$

6.1.3　曲面方程

所谓空间曲面 Σ 的方程 $F(x,y,z)=0$,是指曲面 Σ 上任意一点的坐标都满足方程 $F(x,y,z)=0$,而不在曲面 Σ 上的任意一点的坐标都不能满足方程 $F(x,y,z)=0$.

平面作为空间曲面的一种特殊形式,它的方程总可以用三元一次方程来表示.反之任意一个三元一次方程都表示空间的某一个平面.

例 5　一动点 $P(x,y,z)$ 到两定点 $P_1(1,-1,0)$ 与 $P_2(2,0,-2)$ 的距离相等,求动点 P 的轨迹方程.

解　由题意知 $|P_1P|=|P_2P|$,所以

$$\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2+z^2}=\sqrt{(x-2)^2+y^2+(z+2)^2}$$

化简后得 P 点的轨迹方程为

$$x+y-2z-3=0$$

此例告诉我们,到两定点距离相等的动点的轨迹是一个平面.

例 6　求球心为点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$,半径为 R 的球面方程.

解　设球面上任意一点为 $P(x,y,z)$,那么有 $|P_0P|=R$,即

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=R$$

将等式两边平方得球面方程为

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2 \tag{8}$$

特别地,当球心在坐标原点时(即 $x_0=0,y_0=0,z_0=0$),球面方程(8)化为

$$x^2+y^2+z^2=R^2 \tag{9}$$

而 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 是球面(9)的上半部,$z=-\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 是球面(9)的下半部(见图 6.4).

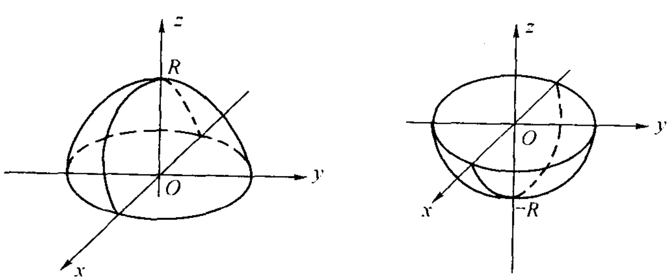

图 6.4

用平面 $z=c(-R\leqslant c\leqslant R)$ 截球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 得截痕方程

$$\begin{cases} x^2+y^2=R^2-c^2 \\ z=c \end{cases}$$

当 $c=\pm R$ 时,截痕为球面上的点 $(0,0,\pm R)$;当 $|c|<R$ 时,截痕为平面 $z=c$ 上,以 $(0,0,c)$ 为圆心,以 $r=\sqrt{R^2-c^2}$ 为半径的圆(见图 6.5).

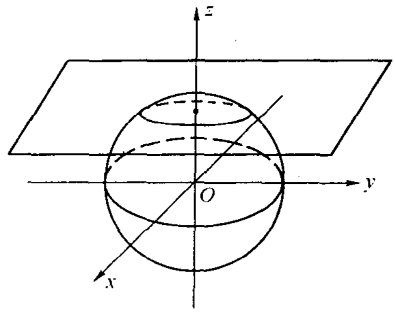

图 6.5

例 7 求 yOz 坐标面上的半圆周 $y=\sqrt{R^2-z^2}$,绕 z 轴旋转一周所成曲面的曲面方程.

解 yOz 坐标面上的半圆周 $y=\sqrt{R^2-z^2}$ 上的点的坐标可表示为

$$P=\left(0,\sqrt{R^2-{z_0}^2},z_0\right)\quad(|z_0|\leqslant R)$$

P 点绕 z 轴一周而成的曲线是一个圆,该圆可以看作是以 $P_0(0,0,z_0)$ 为球心,$|P_0P|$ 为半径的球面与平面 $z=z_0$ 的交线.即

$$\begin{cases} x^2+y^2+(z-z_0)^2=R^2-{z_0}^2 \\ z=z_0 \end{cases}$$

消去 z_0,即得所求的旋转面方程

$$x^2+y^2+z^2=R^2$$

一般地,yOz 平面上的曲线 $F(y,z)=0$ 绕 z 轴旋转一周而成的旋转面的方程为 $F\left(\pm\sqrt{x^2+y^2},z\right)=0$; 绕 y 轴旋转一周而成的旋转面的方程为 $F\left(y,\pm\sqrt{x^2+y^2}\right)=0$. 对于其余两个坐标面上的曲线绕坐标面上的坐标轴旋转一周而成的旋转面方程也有类似的结论,例如 xOy 平面上的曲线 $G(x,y)=0$ 绕 x 轴旋转一周而成的旋转面方程为 $G\left(x,\pm\sqrt{y^2+z^2}\right)=0$.

例 8 求 yOz 平面上直线 $z=y$ 绕 z 轴旋转一周所成的旋转曲面的方程.

解 因为 yOz 平面上的曲线方程为 $z=y$,所以该曲线绕 z 轴旋转一周所成的曲面(见图 6.6)方程为

$$z=\pm\sqrt{x^2+y^2}$$

即

$$z^2=x^2+y^2$$

例 8 所求的曲面是**圆锥面**,其中 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 是上半圆锥,$z=-\sqrt{x^2+y^2}$ 是下半圆锥.

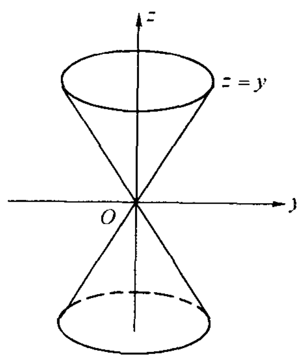

图 6.6

例 9 求 yOz 平面上抛物线 $z=y^2$ 绕 z 轴旋转一

周所成的旋转曲面的方程.

解 因为 yOz 平面上的曲线方程是 $z = y^2$,绕 z 轴旋转,则所成曲面(见图 6.7) 的方程为

$$z = \left(\pm\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 = x^2 + y^2$$

例 9 中的曲面 $z = x^2 + y^2$ 是**旋转抛物面**.

在空间曲面中,最常见的曲面除平面和旋转面之外还有柱面.柱面是由直线沿定曲线平行移动形成的,定曲线称为柱面的**准线**,动直线称为柱面的**母线**.

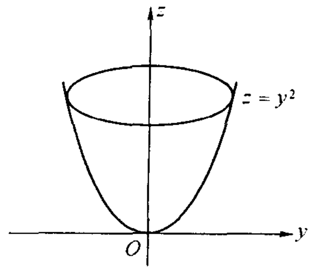

图 6.7

例 10 求准线为 xOy 平面内的圆周 $x^2 + y^2 = R^2$,母线平行于 z 轴的柱面方程.

解 设 $P(x, y, 0)$ 是准线上的任意一点,则 P 点的坐标满足

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad (z = 0)$$

因为柱面的母线平行于 z 轴,所以当 $P(x, y, 0)$ 在柱面上时,对于任意实数 z,$Q(x, y, z)$ 都在柱面上,显然 $Q(x, y, z)$ 满足方程

$$x^2 + y^2 = R^2$$

由 P、Q 的任意性知所求柱面方程为 $x^2 + y^2 = R^2$.

当柱面的母线平行于坐标轴时,柱面方程是一个二元方程,它在形式上与柱面在坐标面上的准线方程同形.例如 $x^2 + y^2 = R^2$ 是母线平行于 z 轴的圆柱面(见图 6.8),$z = y^2$ 是母线平行于 x 轴的抛物柱面(见图 6.9).

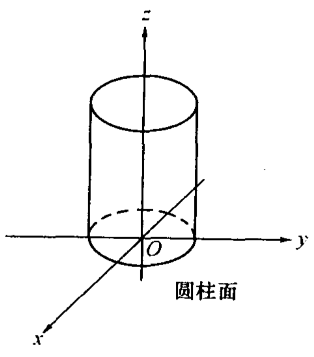

图 6.8

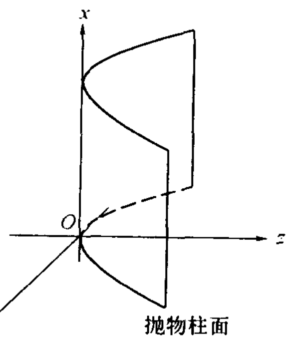

图 6.9

习 题 1

1. 在空间直角坐标系中,指出下列各点在哪个卦限?
$A(1, -2, 3)$;$B(2, 3, -4)$;$C(3, -4, -1)$;$D(-4, -1, 2)$.
2. 求点 $P(4, -3, 5)$ 到各坐标轴的距离.

3. 试证明以三点 $A(4,1,9)$, $B(2,4,3)$, $C(10,-1,6)$ 为顶点的三角形是等腰直角三角形.

4. 求过点 $M_0(2,9,-6)$ 且与连接坐标原点及 M_0 的线段 OM_0 垂直的平面方程.

5. 一动点与两定点 $(2,3,1)$ 和 $(4,5,6)$ 的距离相等,求动点的轨迹方程.

6. 建立以点 $(1,3,-2)$ 为球心,且通过坐标原点的球面方程.

7. 将 xOz 坐标面上的抛物线 $z^2=5x$ 绕 x 轴旋转一周,求所生成的旋转曲面的方程.

8. 将 xOz 坐标面上的圆 $x^2+z^2=9$ 绕 z 轴旋转一周,求所生成的旋转曲面的方程.

9. 指出下列方程在平面解析几何中和在空间解析几何中分别表示什么图形:

(1) $x=2$;　　(2) $y=x+1$;

(3) $x^2+y^2=4$;　　(4) $x-y^2=1$.

10. 说明下列旋转曲面是怎样形成的:

(1) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{9}=1$;　　(2) $x^2-\frac{y^2}{4}+z^2=1$;

(3) $x^2-y^2-z^2=1$;　　(4) $(z-a)^2=x^2+y^2$.

6.2 多元函数

6.2.1 区域

讨论一元函数时,经常用到邻域和区间的概念.由于讨论多元函数的需要,我们把邻域和区间的概念加以推广,同时还涉及到与此相关的一些其他概念.

1. 邻域

设 $P_0(x_0,y_0)$ 是 xOy 平面上的一个点,δ 是某个正数,与点 P_0 距离小于 δ 的点 $P(x,y)$ 的全体,称为**点 P_0 的 δ 邻域**,记为 $N(P_0,\delta)$,即

$$N(P_0,\delta)=\left\{(x,y)\,\middle|\,\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\right\}$$

几何上,$N(P_0,\delta)$ 表示以 P_0 为圆心,δ 为半径的开圆(不包括圆周).通常我们也将 $N(P_0,\delta)$ 称为 **P_0 的 δ 圆形邻域**.

与一维的邻域一样,我们也将 **P_0 的 δ 去心邻域**定义为

$$\overset{\circ}{N}(P_0,\delta)=\left\{(x,y)\,\middle|\,0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\right\}$$

平面邻域的概念还可以推广到空间,设 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 是三维空间中的一点,δ 是某个正数.与 P_0 点距离小于 δ 的一切点 $P(x,y,z)$ 构成 **P_0 点的 δ(球形)邻域**,记为 $N(P_0,\delta)$,即

$$N(P_0,\delta)=\left\{(x,y,z)\middle|\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}<\delta\right\}$$

同样，P_0 **点 δ 去心邻域**为

$$\overset{\circ}{N}(P_0,\delta)=\left\{(x,y,z)\middle|0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}<\delta\right\}$$

2. 区域

设 E 是平面上的一个点集，P 是 E 中的一个点. 如果存在 P 点的某个 δ 邻域 $N(P,\delta)$，使得 $N(P,\delta)\subset E$，则称 P 为点集 E 的**内点**(见图 6.10).

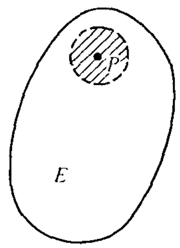

图 6.10

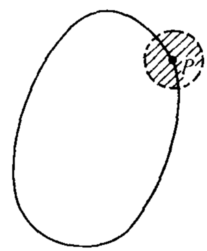

图 6.11

如果点集 E 中的点都是内点，则称 E 为**开集**. 例如，点集

$$E_1=\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2<2\}$$

中的每个点都是 E_1 的内点，因此 E_1 为开集.

如果点 P 的任一邻域内都有属于 E 的点，也有不属于 E 的点(P 点本身既可以属于 E，也可以不属于 E)，则称 P 为点集 E 的**边界点**(见图 6.11). E 点的边界点的全体称为 E 的**边界**. 例如

$$E_1=\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2<2\}$$

的边界是圆周 $x^2+y^2=1$ 和 $x^2+y^2=2$.

设 D 是开集，如果对于 D 内任意两点，都可以用折线相连接，并且连接两点的折线上的点都在 D 内，则称开集 D 是**连通的**.

连通的开集称为**开区域**或**区域**. 例如

$$\{(x,y)\mid x+y>1\},\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2<2\}$$

都是区域.

开区域连同它的边界一起，称为**闭区域**，例如

$$\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 2\},\{(x,y)\mid x+y\geqslant 1\}$$

都是闭区域.

对于点集 E，如果存在正数 M，使得对任何 $P\in E$，都有 $|OP|\leqslant M$，则称 E 为**有界点集**，否则称为**无界点集**. 例如 $\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 2\}$ 是**有界闭区域**，$\{(x,y)\mid x+y>1\}$ 是**无界开区域**.

6.2.2 多元函数

在许多自然现象和实际问题中，经常出现多个变量的相互依赖关系.例如，某种商品的市场需求量依赖于它的市场价格、消费者的收入水平、该商品是否有代用品以及代用品的价格等诸多因素.因此，要全面研究此类问题，我们需要引入多元函数的概念.

定义 设D是一个非空的n元有序数组的集合，f是定义在D上的一个对应关系，对于D中的每一个有序数组$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，都有惟一的实数y与之对应，则称f是定义在D上的$\boldsymbol{n}$**元函数**，记为

$$y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\quad((x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D)$$

变量$x_1,x_2,\cdots,x_n$称为**自变量**，y称为**因变量**，集合D称为函数f的**定义域**，记为$D(f)$.函数值的全体称为函数f的**值域**，记为$R(f)$.

当$n=1$时，为**一元函数**，记为$y=f(x),x\in D$.

当$n=2$时，为**二元函数**，记为$z=f(x,y),(x,y)\in D$.

二元以及二元以上的函数统称为**多元函数**.

例1 圆柱体的体积V和它的底半径r、高h之间具有关系

$$V=\pi r^2h$$

当$(r,h)\in\{(r,h)\mid r>0,h>0\}$时，就有惟一实数$V=\pi r^2h$与之对应.因此

$$V(r,h)=\pi r^2h\quad((r,h)\in\{(r,h)\mid r>0,h>0\})$$

是一个二元函数，其定义域

$$D=\{(r,h)\mid r>0,h>0\}$$

例2 设Z表示居民人均消费收入，Y表示国民收入总额，P表示总人口数，S_1表示消费率(国民收入总额中用于消费所占的比例)，S_2表示居民消费率(消费总额中用于居民消费所占的比例)，则有

$$Z=S_1\cdot S_2\cdot\frac{Y}{P}$$

当

$$(Y,P)\in D=\{(Y,P)\mid Y>0,P>0\}$$

时，就有惟一的数值$Z=S_1\cdot S_2\cdot\dfrac{Y}{P}$与之对应.因此

$$Z(Y,P)=S_1\cdot S_2\cdot\frac{Y}{P}\quad((Y,P)\in D)$$

也是一个二元函数.

一般的二元函数通常可以表示为

$$z=f(x,y)\quad((x,y)\in D)$$

如果对于任意的实数t，总有

$$f(tx,ty)=t^kf(x,y)$$