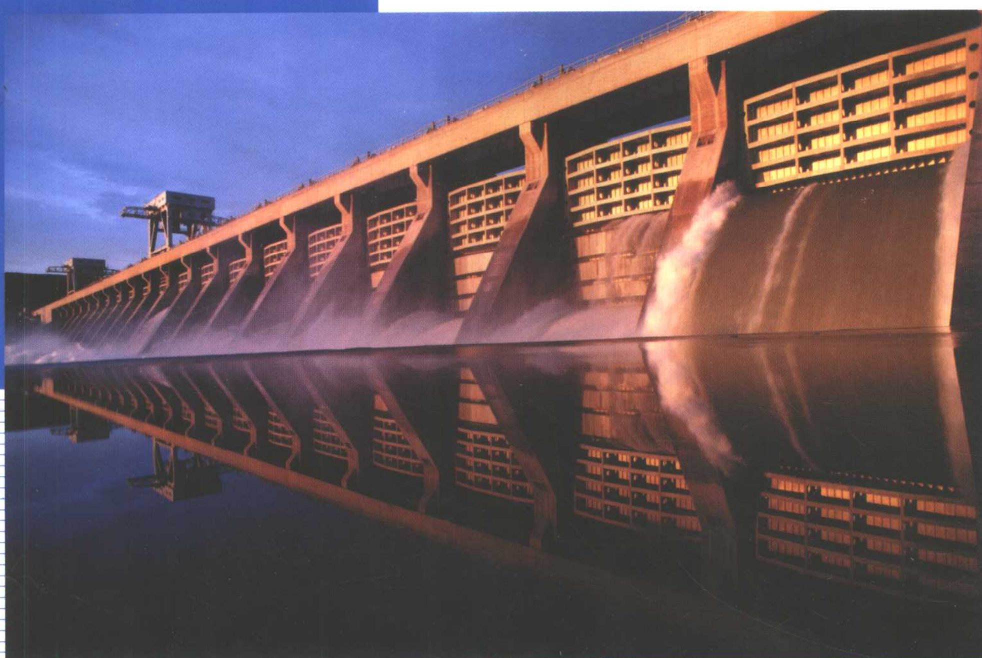
控制科学与工程研究生系列教材

最优控制应用基础

邢继祥 张春蕊 徐洪泽 编著



科学出版社
www.sciencep.com

内 容 简 介

本书主要介绍了确定性动态系统最优控制理论与应用问题,内容包括:经典变分法中与最优控制问题相关的基础知识,最大值原理的简单证明及其在解决最优控制典型问题中的应用,离散与连续系统的动态规划方法,线性系统二次型最优控制,变分学与最优控制的数值算法,分布参数系统最优控制问题简介等. 此外还收集了一些简单介绍该理论应用的实例,以开拓对该领域感兴趣的读者的应用思路.

本书适用于应用数学、力学、工程及经济管理等专业的研究生或高年级本科生使用,亦可供相关技术人员参考,以解决工程、经济管理、商务、生物等诸多领域的动态最优化问题.

图书在版编目(CIP)数据

最优控制应用基础/邢继祥,张春蕊,徐洪泽编著. —北京:科学出版社,2003

控制科学与工程研究生系列教材

ISBN 7-03-011541-4

Ⅰ.最… Ⅱ.①邢… ②张… ③徐… Ⅲ.最佳控制-数学理论-高等学校-教材 Ⅳ.O232

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 039629 号

策划编辑:李 宇 钟 谊/文案编辑:邱 璐 贾瑞娜/责任校对:刘小梅
责任印制:刘秀平/封面设计:王 浩 陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com

源海印刷有限责任公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2003年8月第一版 开本:B5(720×1000)
2003年8月第一次印刷 印张:13 1/2
印数:1—3 000 字数:262 000

定价:24.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈环伟〉)

前　言

本书由编者在哈尔滨工业大学最优控制课程的讲义整理而来，是多年从事教学工作的实际经验的总结和成果．本书主要介绍了确定性最优控制理论的基础内容，包括：经典变分法中与最优控制问题相关的基础知识，最大值原理的简单证明及其在解决最优控制典型问题中的应用，离散与连续系统的动态规划方法，线性系统二次型最优控制，变分学与最优控制的数值算法，分布参数系统最优控制问题简介等．此外还收集了一些简单介绍该理论应用的实例，以开拓对该领域感兴趣的读者的应用思路．

学习本书必备的基础知识是微积分、微分方程以及线性代数．本书尽量用较通俗的经过改进的变分方法去论证泛函的条件极值问题、最优控制的最大值原理及动态规划理论；对线性系统二次型最优反馈控制及最优控制的数值解法以介绍为主；对分布参数系统最优控制问题只是一个简单的导引．

由于编者水平所限，书中不妥之处恳请读者批评指正，以便对本书做进一步的修改和完善．

编　者

2003年1月

目　录

导　论

通过以下两例可见变分法研究(积分型)泛函的极值(含条件极值)问题.

例 0.1 (最速降线问题)　如图 0-1 所示,在重力作用下,物体由(0,0)点至(x_1,y_1)点. 问路径 $y=y(x)$为何,所用时间最短.

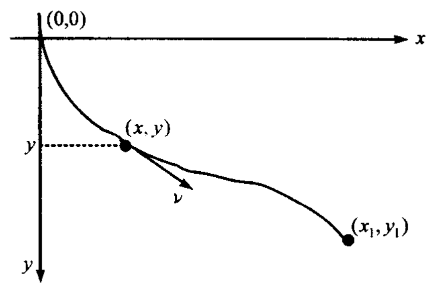


图 0-1

问题解法是:设物体在 t 时刻的速度为ν,则

$$\nu = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\sqrt{1+\dot{y}^2}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}x,$$

又

$$mgy(x) = \frac{1}{2}m\nu^2 \Rightarrow \nu = \sqrt{2gy(x)},$$

故 $\mathrm{d}t=\dfrac{\sqrt{1+\dot{y}^2}}{\sqrt{2gy(x)}}\mathrm{d}x$,从而积分型泛函是

$$T(y(\cdot)) = \int_0^{x_1}\frac{\sqrt{1+\dot{y}^2}}{\sqrt{2gy}}\mathrm{d}x,$$

$$\Gamma = \{y(x) \mid y(x) \in C^1, y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1\}.$$

问题化为在允许曲线集Γ中,求 $y^*(x)$使泛函 $T(y(\cdot))$实现最小.

例 0.2 (等周问题)　问图 0-2 中曲线 $y=y(x)$如何取,才能使该图形的面积

$$J(y(\cdot)) = \int_0^2 y(x)\mathrm{d}x$$

实现最大. 其中 $y\in\Gamma=\{y(x) \mid y(x)\in C^1, y(0)=y(2)=0\}$特别是还应满足边界曲线的弧长为定值这一约束条件

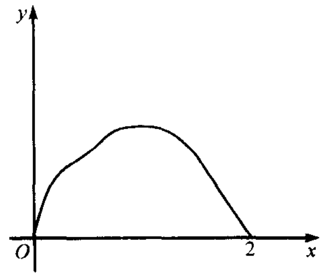


图 0-2

$$\int_0^2 \sqrt{1+\dot{y}^2}\,dx = \pi.$$

例 0.1,例 0.2 是经典变分法解决了的典型变分问题,但下述问题变分法无能为力.

例 0.3 (产值分配问题)　设 $x(t)$ 是某企业在时刻 t 的总产值,将其分配给两大方面:再投资提高生产力,比例是 $u(t)$;利润上缴及消费,比例是 $1-u(t)$. 假设产值的增长率与再投资额成正比

$$\dot{x}(t) = Ku(t)x(t), \quad x(0) = x_0,$$

$$u(t):0 \leqslant u(t) \leqslant 1 \quad (\text{此为控制变量的闭集型约束}),$$

问题是求满足如上条件的最优控制 $u^*(t)$,以使在$[0,T]$规划时间内,该企业的利润与消费这方面的总积累为最大,即

$$J(u(\cdot)) = \int_0^T (1-u(t))x(t)\,dt$$

实现最大.

例 0.4　考虑一个不计阻力的高速列车的最短时间运行方案

$$x(t) = F(t) \setminus m = u(t), \quad \begin{cases} x(0) = 0, & x(t_1) = 100, \\ \dot{x}(0) = 0, & \dot{x}(t_1) = 0, \end{cases}$$

其中 $u(t)$ 表示施加给列车的外部控制力,$x(t)$,$\dot{x}(t)$,$x(t)$分别为列车运行的位移、速度、加速度. 通常的控制力是有限幅值的

$$|u(t)| \leqslant M$$

或者

$$\underline{u} \leqslant u(t) \leqslant \bar{u},$$

问题是求满足如上条件限制的 $u(t)$,以使

$$J(u(\cdot)) = \int_0^{t_1} dt$$

实现最小.

例 0.3、例 0.4 是两个最优控制问题,通俗地讲,最优控制研究的是受约于动态系统且控制变量受到闭集型约束的条件泛函极值问题.

第一章　变分法的回顾

变分法是一门研究各类泛函极值问题的学科，是应用数学的一个经典的分支．尽管它在解决最优控制时具有其局部性，但它所涉及的基本概念、极值的必要条件、条件极值的乘子法则以及待定的边界条件在最优控制问题中都非常具有启发性．

§1.1　最简泛函极值的必要条件

1.1.1　概念

最简(积分型)泛函系指

$$J(y(\cdot)) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), \dot{y}(x))\mathrm{d}x,$$

其定义域或允许曲线集为

$$\Gamma = \{y(x) \mid y(x) \in C^1, y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1\},$$

$y_0(x)$的邻域(或邻近曲线集)为

$$\{y(x) \mid \max_{x_0 \leqslant x \leqslant x_1} |y(x) - y_0(x)|, |\dot{y}(x) - \dot{y}_0(x)| < \varepsilon\}.$$

定义 1.1.1　若 $J(y(\cdot)) \geqslant J(y^*(\cdot))$, $\forall\, y(x) \in \Gamma$，则称 $y^*(x)$为最小值曲线；若 $J(y(\cdot)) \geqslant J(y^*(\cdot))$, $\forall\, y(x)$是 $y^*(x)$邻域内的曲线，则称 $y^*(x)$为极小值曲线．

注　同数学分析中函数最大(小)值问题类似，直接求最大(小)值不方便时，往往先求极值，再判别其是否为最优值，这通常是解决问题的途径．

自变函数的变分 $\delta y(x)$是指自变函数的增量

$$\delta y(x) = y(x) - y_0(x),$$

$y(x)$属于 $y_0(x)$的邻域．对于最简变分问题显然 $\delta y(x) \in C^1$ 且有

$$\delta y(x_0) = 0, \delta y(x_1) = 0\ ,\ (\delta y(x))' = \delta \dot{y}(x).$$

最后，我们总假设被积函数 $F(x, y(x), \dot{y}(x))$具有连续的偏导数．

1.1.2　泛函极值的必要条件与泛函的变分

若 $y^*(x)$是使最简泛函实现极值的极值曲线，考虑其带实参数 α 的邻近曲线 $y(x,\alpha) = y^*(x) + \alpha\delta y(x)$，其中变分 $\delta y(x)$任意取定，则

$$J(y(\cdot\ ,\alpha)) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y^* + \alpha\delta y,\quad \dot{y}^* + \alpha\delta\dot{y})\mathrm{d}x = \Phi(\alpha).$$

显然 Φ 作为实参数 α 的函数在 $\alpha=0$ 处实现函数的极值,即

$$0 = \Phi'(0) = \left.\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\alpha}\right|_{\alpha=0} = \left.\int_{x_0}^{x_1}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\delta y(x) + \frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\delta\dot{y}(x)\right)\mathrm{d}x\right|_{y^*(x)},\quad \forall\,\delta y(x)\text{ 取定}.$$

此式至少说明三个问题:

(1) 右端这一表达式非常类似于多元函数 $z=f(x,y)$ 的全微分

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y.$$

(2) 对 $\Phi(\alpha)$ 用泰勒公式,可知 $\Phi'(0)$ 是泛函增量的线性主要部分,因为

$$\Phi(\alpha) - \Phi(0) = \Phi'(0)\alpha + o(\alpha).$$

(3) 沿极值曲线 $y^*(x)$ 的 $\Phi'(0) = \left.\frac{\mathrm{d}J(y(\cdot\ ,\alpha))}{\mathrm{d}\alpha}\right|_{\alpha=0}$ 为 0.

所以,对一般 $y_0(x)$(可以不是极值曲线),邻近曲线取含参数 α 形式

$$y(x,\alpha) = y^*(x) + \alpha\delta y(x).$$

定义 1.1.2 $\left.\frac{\mathrm{d}J(y(\cdot\ ,\alpha))}{\mathrm{d}\alpha}\right|_{\alpha=0} = \Phi'(0)$ 为泛函 $J(y(\cdot)) = \int_{x_0}^{x_1} F(x,y,\dot{y})\mathrm{d}x$ 沿 $y_0(x)$(自变函数的变分为 $\delta y(x)$ 时)的变分,并记为 $\delta J|_{y_0(x)}$,即泛函的变分为

$$\delta J|_{y_0(x)} = \left.\frac{\mathrm{d}J(y(\cdot\ ,\alpha))}{\mathrm{d}\alpha}\right|_{\alpha=0},$$

其表达式为

$$\delta J|_{y_0(x)} = \left.\int_{x_0}^{x_1}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\delta y(x) + \frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\delta\dot{y}(x)\right)\mathrm{d}x\right|_{y_0(x)}$$

由前面的注释可得沿极值曲线 $y^*(x)$ 的泛函的变分为零,即

$$\delta J|_{y^*(x)} = \left.\int_{x_0}^{x_1}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\delta y(x) + \frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\delta\dot{y}(x)\right)\mathrm{d}x\right|_{y^*(x)} = 0,\quad \forall\,\delta y(x).$$

这一结果亦与沿极值点 (x^*, y^*) 的全微分为零的函数极值的必要条件类似:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y\right|_{(x^*, y^*)} = 0.$$

然而,这有待进一步讨论使之成为便于应用的必要条件.

1.1.3 泛函极值的必要条件——Euler 方程

已知沿 $y^*(x)$ 有

$$0 = \int_{x_0}^{x_1}(F_y\delta y(x)\mathrm{d}x + F_{\dot{y}}\delta\dot{y}(x))\mathrm{d}x,$$

采用拉格朗日的方法,对第二项进行分部积分有

$$0 = F_y \delta y(x) \Big|_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \left(F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{\dot{y}} \right) \delta y(x) \mathrm{d}x ,$$

即

$$0 = \int_{x_0}^{x_1} \left(F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{\dot{y}} \right) \delta y(x) \mathrm{d}x , \quad \forall \delta y(x).$$

由于对 $\forall \delta y(x)$ 上式成立，根据下面的变分学基本引理 1.1.1 可推得，沿 $y^*(x)$ 有

$$F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{\dot{y}} = 0 \tag{1.1.1}$$

称式(1.1.1)为 Euler 微分方程，它是泛函极值的必要条件.

注

(1) 满足边界条件 $y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1$ 的解 $y^*(x)$ 称为驻值曲线(或直接称为极值曲线)，尽管它是极值曲线的必要条件，但对最优值存在的实际问题，特别是该驻值曲线惟一时，$y^*(x)$ 的求出已足矣. 若存在多条 $y^*(x)$ 时，进一步讨论或判定亦可解决最优值曲线问题.

(2) 拉格朗日的推导要求条件高些，不严格，可以将其改进. 因为 $F(x, y, \dot{y})$ 只具连续的一阶偏导数，对表达式中的第一项进行分部积分，沿 $y^*(x)$ 有

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\int_{x_0}^{x} F_y \mathrm{d}t \right) \delta y(x) + F_{\dot{y}} \delta \dot{y} \right] \mathrm{d}x \\ &= \delta y(x) \int_{x_0}^{x} F_y \mathrm{d}t \Big|_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \left[F_{\dot{y}} - \int_{x_0}^{x} F_y \mathrm{d}t \right] \delta \dot{y}(x) \mathrm{d}x \\ &= \int_{x_0}^{x_1} \left[F_{\dot{y}} - \int_{x_0}^{x} F_y \mathrm{d}t \right] \delta \dot{y}(x) \mathrm{d}x , \end{aligned}$$

即沿 $y^*(x)$ 对 $\forall \delta y(x)$ 有

$$\int_{x_0}^{x_1} \left[F_{\dot{y}} - \int_{x_0}^{x} F_y \mathrm{d}t \right] \delta_{\dot{y}}(x) \mathrm{d}x = 0.$$

根据下面的变分学基本引理 1.1.2，可得沿 $y^*(x)$ 有积分形式的 Euler 方程

$$F_{\dot{y}} - \int_{x_0}^{x} F_y \mathrm{d}t = C \quad (\text{常数}), \tag{1.1.2}$$

由于上式为恒等式，且 $(C)' = 0$，$\int_{x_0}^{x} F_y \mathrm{d}t$ 对 x 可导，故沿曲线 $y^*(x)$，$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{\dot{y}}$ 存在，从而由式(1.1.2)又推得了式(1.1.1). 这里只用到 F 的一阶偏导数是连续的. 以上是由 DuBois-Reymond 给出的 Euler 方程的更严格证法，为推证上的简单化，今后我们还是沿用拉格朗日给出的简单(分部积分)推证法.

变分学基本引理 1.1.1　若 $M(x) \in C[x_0, x_1]$，且对 $\forall \delta y(x)$ ($\delta \dot{y}(x)$ 连续，且 $\delta y(x_0) = \delta y(x_1) = 0$)，有

$$\int_{x_0}^{x_1} M(x)\delta y(x)\mathrm{d}x = 0,$$

则 $M(x)\equiv 0, x\in[x_0,x_1]$.

证明　用反证法. 由 $M(x)$的连续性,只须证 $M(x)$在(x_0,x_1)内恒为零即可. 否则,(不妨设)至少存在一点 $\xi\in(x_0,x_1)$使 $M(\xi)>0$,再由连续性必有 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)$使得

$$M(x)>0,\quad x\in(\xi_1,\xi_2).$$

选取

$$\delta y(x)=\begin{cases}(\xi_1-x)^2(\xi_2-x)^2, & x\in(\xi_1,\xi_2),\\ 0, & x\overline{\in}(\xi_1,\xi_2),\end{cases}$$

则推得

$$\int_{x_0}^{x_1} M(x)\delta y(x)\mathrm{d}x>0$$

与已知条件矛盾.

变分学基本引理 1.1.2　在变分学基本引理 1.1.1 的条件下,若对 $\forall\,\delta y(x)$,有

$$\int_{x_0}^{x_1} M(x)\delta\dot{y}(x)\mathrm{d}x = 0,$$

则

$$M(x)\equiv C,\qquad x\in[x_0,x_1].$$

证明　　显然$\forall\,C$ 有$\int_{x_0}^{x_1} C\delta\dot{y}(x)\mathrm{d}x=0$.对于特殊取定的 $M(x)$的平均值

$$\overline{C}=\frac{1}{x_1-x_0}\int_{x_0}^{x_1} M(x)\mathrm{d}x,$$

更有

$$\int_{x_0}^{x_1}\overline{C}\;\delta\dot{y}(x)\mathrm{d}x=0,$$

即

$$\int_{x_0}^{x_1}(M(x)-\overline{C})\delta\dot{y}(x)\mathrm{d}x=0,\forall\,\delta y(x).$$

再选取 $\delta\dot{y}(x)=M(x)-\overline{C}$,则有

$$\int_{x_0}^{x_1}(M(x)-\overline{C})^2\mathrm{d}x=0,$$

从而

$$M(x)-\overline{C}\equiv 0.$$

1.1.4 求极(驻)值曲线的例题

例 1.1.1 求两端点固定,位移与速度均尽可能小的位移函数

$$J(X(\cdot)) = \int_0^1 (X^2(t) + \dot{X}^2(t))\mathrm{d}t, \quad X(0) = 0, X(1) = 1.$$

解 建立 Euler 方程

$$2X - 2\ddot{X} = 0,$$

其通解为

$$X(t) = C_1 \mathrm{e}^t + C_2 \mathrm{e}^{-t},$$

再由 $X(0)=0, X(1)=1$ 可得

$$X^*(t) = \frac{1}{\mathrm{e} - \mathrm{e}^{-1}}(\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}).$$

例 1.1.2 求泛函 $J(y(\cdot)) = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + \dot{y}^2}\mathrm{d}x, y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1$ 的极值曲线(显然,解曲线应是连接两点的直线,此时弧长最小).

解 建立 Euler 方程

$$0 - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} = 0,$$

即

$$\frac{\ddot{y}}{(1 + \dot{y}^2)^{3/2}} = 0.$$

曲率为零的曲线为 $y^*(x) = ax + b$——直线.

通常如果 Euler 方程是二阶方程,以下两种特殊情形可以降阶为一阶方程:

(1) $F = F(x, \dot{y})$——不显含 y 时,Euler 方程是

$$F_{\dot{y}} = C_1. \tag{1.1.3}$$

(2) $F = F(y, \dot{y})$——不显含 x 时,Euler 方程是

$$F - \dot{y}F_{\dot{y}} = C_1. \tag{1.1.4}$$

事实上

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(y, \dot{y}) = F_y\dot{y} + F_{\dot{y}}\ddot{y} = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{\dot{y}}\right)\dot{y} + F_{\dot{y}}\ddot{y} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\dot{y}F_{\dot{y}}),$$

即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\dot{y}F_{\dot{y}}),$$

积分上式,即得式(1.1.4).

利用式(1.1.3)解例 1.1.2 可知有 $\dot{y} = a$,用式(1.1.4)亦然.

例 1.1.3 求最速降线鲜题的极值曲线

$$J(y(\cdot)) = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+\dot{y}^2}}{\sqrt{y}}\mathrm{d}x, \quad y(0) = 0, \quad y(x_1) = y_1.$$

解　$F=\frac{1}{\sqrt{y}}\sqrt{1+\dot{y}^2}$,利用式(1.1.4)得

$$\frac{\sqrt{1+\dot{y}^2}}{\sqrt{y}} - \frac{\dot{y}^2}{\sqrt{y}\sqrt{1+\dot{y}^2}} = C_1,$$

即

$$\frac{1}{\sqrt{y}\sqrt{1+\dot{y}^2}} = C_1.$$

引入参数 t 并令

$$\dot{y} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \cot t,$$

则有

$$y = \frac{1}{C_1^2}\sin^2 t = \widetilde{C}_1(1-\cos 2t).$$

又

$$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}y}{\dot{y}} = \frac{\sin t}{\cos t}\widetilde{C}_1 2\sin 2t\,\mathrm{d}t = 2\widetilde{C}_1(1-\cos 2t)\mathrm{d}t,$$

故

$$x(t) = \widetilde{C}_1(2t - \sin 2t) + C_2.$$

再由 $y(0)=0$,可得 $C_2=0$,并令 $\theta=2t$,得旋轮线方程

$$\begin{cases} x(\theta) = \widetilde{C}_1(\theta - \sin\theta), \\ y(\theta) = \widetilde{C}_1(1-\cos\theta), \end{cases} \quad (\widetilde{C}_1 \text{ 可由 } y(x_1) = y_1 \text{ 确定}).$$

此为惟一一条驻值曲线,又该问题确实存在最小值曲线,故旋轮线即为最小值曲线.

例 1.1.4　求沿路径 $y=y(x)$上速度为 x 的,且由 $y(x_0)=y_0$ 至 $y(x_1)=y_1$ 所用时间最小的曲线 $y^*(x)$, 即求使

$$J(y(\cdot)) = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+\dot{y}^2}}{x}\mathrm{d}x$$

取最小值(其中 $x_1>x_0>0$)的 $y^*(x)$.

解　用式(1.1.3)得

$$\frac{\dot{y}}{x\sqrt{1+\dot{y}^2}} = C_1,$$

引入参数 t,并令

$$\dot{y} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \tan t,$$

则

$$x(t) = \widetilde{C}_1 \sin t,$$
$$\mathrm{d}y = \dot{y}\mathrm{d}x = \widetilde{C}_1 \sin t \mathrm{d}t.$$

故

$$y(t) = -\widetilde{C}_1 \cos t + C_2,$$

即

$$(y - C_2)^2 + x^2 = \widetilde{C}_1^2.$$

这是由 $y(x_0)=y_0, y(x_1)=y_1$ 确定的惟一一条驻值曲线,故为最小值曲线.

1.1.5　依赖于多个函数的变分问题

考察下面的例子

$$J(y_1(\cdot), y_2(\cdot)) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1(x), y_2(x), \dot{y}_1(x), \dot{y}_2(x))\mathrm{d}x,$$

$$\begin{cases} y_1(x_0) = y_{10}, \\ y_2(x_0) = y_{20}, \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1(x_1) = y_{11}, \\ y_2(x_1) = y_{21}, \end{cases}$$

是依赖于两个函数的取极值的泛函. 若 $y_1^*(x), y_2^*(x)$是两条极值曲线,则固定一个(如 $y_2^*(x)$)时,显然作为另一个(如 $y_1(x)$)的泛函必满足前述必要条件的Euler方程,从而沿 $y_1^*(x), y_2^*(x)$必成立

$$\begin{cases} F_{y_1} - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{\dot{y}_1} = 0, \\ F_{y_2} - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{\dot{y}_2} = 0. \end{cases}$$

进而,将这个问题推广至 n 个函数的泛函极值问题,其向量形式是

$$J(Y(\cdot)) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, Y(x), \dot{Y}(x))\mathrm{d}x, \quad Y(x_0) = Y_0, Y(x_1) = Y_1,$$

其中

$$Y(x) = (y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x))^{\mathrm{T}}.$$

若 $Y^*(x)$是极值曲线族,则必要条件为

$$F_Y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{\dot{Y}} = 0,$$

其中

$$F_Y = \begin{pmatrix} F_{y_1} \\ \vdots \\ F_{y_n} \end{pmatrix}. \tag{1.1.5}$$

上式一方面可用固定$(n-1)$个均取极值曲线(化为只含一个函数的泛函)的办法逐一证明,另一方面也可重复前述变分为 0 的前述思想来证明,只不过要取向量形式. 我们用后一种方法证明式(1.1.5).

证明 取 $Y^*(x)$的邻近曲线族

$$Y(x,\alpha) = Y^*(x) + \alpha\delta Y(x),$$

其中 α 为实参数,$\forall\,\delta Y(x)$取定,且 $\delta y_1(x),\cdots,\delta y_n(x)$彼此独立,则

$$J(Y(\cdot,\alpha)) = \int_{x_0}^{x_1} F(x,Y(x,\alpha),\dot{Y}(x,\alpha))\mathrm{d}x = \Phi(\alpha),$$

必有

$$0 = \Phi'(0) = \int_{x_0}^{x_1} (F_Y^{\mathrm{T}}\delta Y(x) + F_{\dot{Y}}^{\mathrm{T}}\delta\dot{Y})\mathrm{d}x\bigg|_{Y^*(x)}.$$

此即多个函数泛函的(一阶)变分表达式, 对积分中的第二项分部积分可得

$$\int_{x_2}^{x_1}\left(F_Y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{\dot{Y}}\right)^{\mathrm{T}}\delta Y(x)\mathrm{d}x = 0, \quad \forall\,\delta Y(x).$$

最后,由变分学基本引理证得

$$F_Y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{\dot{Y}} = 0.$$

§1.2 条件泛函极值的必要条件

对于条件函数极值问题,微积分中有拉格朗日乘数法,这一思想应用于条件泛函极值问题中,也有相应的乘子法则, 不过要由乘数法则,改为乘子法则.

1.2.1 几何(代数)约束的乘子法则

定理 1.2.1 若

$$l^*:\begin{cases} x = x^*(t), \\ y = y^*(t), \end{cases}$$

在几何(代数)约束

$$G(t,x(t),y(t)) = 0 \tag{1.2.1}$$

及 $x(t_0)=x_0, x(t_1)=x_1$ 之下,使得

$$J(x(\cdot),y(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t,x(t),\dot{x}(t),y(t),\dot{y}(t))\mathrm{d}t \tag{1.2.2}$$

实现极值(且沿 l^*, $G_y\neq 0$ 或 $G_x\neq 0$),则存在函数乘子 $\lambda(t)$使 l^* 成为

$$\bar{J} = \int_{t_0}^{t_1}\{L + \lambda(t)G(t,x(t),y(t))\}\mathrm{d}t \triangleq \int_{t_0}^{t_1}\overline{H}(t,x,\dot{x},y,\dot{y},\lambda)\mathrm{d}t \tag{1.2.3}$$

的极值曲线,即沿 l^* 有

$$\begin{cases} \overline{H}_x - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overline{H}_{\dot{x}} = 0, \\ \overline{H}_y - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overline{H}_{\dot{y}} = 0, \end{cases} \tag{1.2.4}$$

亦即沿 $x^*(t),y^*(t)$ 有

$$\begin{cases} L_x - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}L_{\dot{x}} + \lambda G_x = 0, \\ L_y - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}L_{\dot{y}} + \lambda G_y = 0. \end{cases} \tag{1.2.5}$$

该证明类似于 1.2.2 节的定理,故略去.

1.2.2 动态约束的乘子法则

定理 1.2.2 若

$$l^*:\begin{cases} x = x^*(t), \\ u = u^*(t), \end{cases}$$

在动态约束

$$G(t,x(t),\dot{x}(t),u(t)) = 0 \tag{1.2.6}$$

及 $x(t_0)=x_0,x(t_1)=x_1$ 之下,使得

$$J(u(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t,x(t),\dot{x}(t),u(t))\mathrm{d}t \tag{1.2.7}$$

实现极值(且沿 l^*, $Gu\neq 0$),则存在函数乘子 $\lambda(t)$,使得 l^* 成为

$$\begin{aligned} \bar{J} &= \int_{t_0}^{t_1} \{L + \lambda(t)G(t,x,\dot{x},u)\}\mathrm{d}t \\ &\triangleq \int_{t_0}^{t_1} \overline{H}(t,x,\dot{x},u,\lambda)\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{1.2.8}$$

的极值曲线,即沿 l^* 有

$$\begin{cases} \overline{H}_x - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overline{H}_{\dot{x}} = 0, \\ \overline{H}_u = 0, \end{cases} \tag{1.2.9}$$

亦即,沿 $x^*(t),u^*(t)$ 有

$$\begin{cases} L_x - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}L_{\dot{x}} + \lambda G_x - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\lambda G_{\dot{x}}) = 0, \\ L_u + \lambda G_u = 0. \end{cases} \tag{1.2.10}$$

证明 取 $x^*(t)$ 的邻近曲线 $x(t,\alpha)=x^*(t)+\alpha\delta x(t)$,其中 α 为实参数,$\forall\,\delta x(t)$ 取定,相应地由于有约束方程(1.2.6)可确定 $u(t,\alpha)$. 如果我们仍然把

它表成变分形式时,可有

$$u(t,\alpha)=u^*(t)+\alpha\delta u(t,\alpha),$$

此时

$$\delta u(t,\alpha)=\frac{u(t,\alpha)-u^*(t)}{\alpha},$$

取

$$\delta u(t,0)=\lim_{\alpha\to 0}\delta u(t,\alpha)=\left.\frac{\mathrm{d}u(t,\alpha)}{\mathrm{d}\alpha}\right|_{\alpha=0}.$$

由于邻近曲线族 $x(t,\alpha),u(t,\alpha)$满足式(1.2.6)

$$G(t,x^*+\alpha\delta x,\dot{x}^*+\alpha\delta\dot{x},u(t,\alpha))=0,$$

对此式求 α 的导数并令 $\alpha=0$,可得如下变分方程:

$$G_x\delta x(t)+G_{\dot{x}}\delta\dot{x}(t)+G_u\delta u=0,\tag{1.2.11}$$

注意 $\delta x(t)$是任意的,而 $\delta u(t,0)=\delta u$ 不再是任意的.

另一方面,邻近曲线族引起的泛函的变化及变分如下

$$J(u(\cdot,\alpha))=\int_{t_0}^{t_1}L(t,x^*+\alpha\delta x,\dot{x}^*+\alpha\delta\dot{x},u(t,\alpha))\mathrm{d}t=\Phi(\alpha),$$

且沿 l^*有

$$0=\Phi'(0)=\int_{t_0}^{t_1}(L_x\delta x(t)+L_{\dot{x}}\delta\dot{x}(t)+L_u\delta u)\mathrm{d}t.$$

下面的证法是在式(1.2.10)第二个方程成立前提下,应用变分方程(1.2.11),证明式(1.2.10)的第一个方程亦必成立.

将式(1.2.10)的第二个方程代入上式最后一项并应用变分方程(1.2.11)可得

$$0=\int_{t_0}^{t_1}(L_x\delta x(t)+L_{\dot{x}}\delta\dot{x}(t)+\lambda(t)G_x\delta x(t)+\lambda(t)G_{\dot{x}}\delta\dot{x}(t))\mathrm{d}t,$$

分部积分可得

$$0=\int_{t_0}^{t_1}\left(L_x-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}L_{\dot{x}}+\lambda G_x-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\lambda G_{\dot{x}})\right)\delta x(t)\mathrm{d}t,\quad \forall\,\delta x(t).$$

由变分学基本引理可得(1.2.10)的第一个方程亦成立,证毕.

注

(1) 驻值曲线中的 $x^*(t),u^*(t),\lambda(t)$由 Euler 方程(1.2.9)及约束方程(1.2.6)同时确定. 同条件函数极值的乘子法则一样,约束方程为多个时,只须相应增加乘子的个数即可.

(2) 动态、几何约束的乘子均为函数 $\lambda(t)$,所以称为乘子法则.

(3) 动态约束与几何约束不同之处在于动态约束的 Euler 方程组中含有 $\dot{\lambda}(t)$ 项,即 $x(t)$与 $\lambda(t)$地位相同. 若称 $x(t)$为状态变量时,$\lambda(t)$称为协态(或伴随,