齿轮啮合原理

〔苏联〕Ф. Л. 李特文著　丁　淳譯

上海科学技术出版社

齿輪嚙合原理

〔苏联〕Ф. Л. 李特文 著

丁 淳 譯
国 楷 校

上海科学技术出版社

內 容 提 要

本书叙述齿輪嚙合的現代解析理論，包括1)共軛齿面和共軛齿廓的形成原理；2)研究空間嚙合和平面嚙合的一般方法(本书主要采用"运动学"法)；3)平面和空間嚙合的各基本型式的几何学。

本书所討論的問題一般都有計算例題。本书注意了原理的应用問題，特别是齿輪刀具齿廓的計算。

本书供齿輪研究、設計、工艺人員閱讀，以及作大专学校教学参考。

ТЕОРИЯ ЗУБЧАТЫХ ЗАЦЕПЛЕНИЙ

Ф. Л. Литвин

Физматгиз • 1960

齿 輪 嚙 合 原 理

丁 淳 譯 国 楷 校

上海科学技术出版社出版（上海瑞金二路450号）

上海市书刊出版业营业許可証出093号

上海市印刷四厂印刷 新华书店上海发行所发行

开本850×1168 1/32 印張14 20/32 排版字数359,000

1964年8月第1版 1964年8月第1次印刷

印数 1—7,000

統一书号 15119·1778 定价(科六) 2·20元

前　言

在这本书里，打算叙述齿輪嚙合的現代解析理論．本书的內容包括下列問題：

1) 共軛齿面和共軛齿廓（平面嚙合中）的形成原理；

2) 研究空間嚙合和平面嚙合的一般方法，利用这些方法可使我們求出：а)与給定齿面共軛的齿面；б)接触綫——共軛齿面的特征綫；в)嚙合面——接触綫在和机座固連的固定坐标系中的軌迹；

3) 平面和空間嚙合的各基本型式的几何学．

本书着重讲述研究齿輪嚙合的一般方法．对于 Х. И. Гохман 法，我們只叙述到足以了解它和能够运用它的程度．应用“运动学”法（参看 § 38）得到的好处提示我們应首先推荐采用这个方法．

对于許多型式的齿輪嚙合，如果利用嚙合軸，則研究方法可以簡化．所謂嚙合軸是指和齿輪机构的机座相固連的一些直綫；并且两齿面在接触点处的法綫，应与这些直綫相交．在本书里，这个方法被用来研究圓柱和圓錐齿輪嚙合、計算加工螺旋面的盘状銑刀的齿廓以及分析圓柱蝸杆嚙合．

研究齿輪嚙合时，往往需要作多次的坐标变换．为了把这种运算条理化，并且給运算者一个可靠的方法来检驗所作的运算，书中讲述了点坐标变换的矩陣方法．讀者可以在 § 6、§ 7 及 § 35 中，找到进行坐标变换所必需的有关矩陣論及其应用的基本知識．讀者为了学习这几节所花費的劳动，可以在推导坐标变换公式时，从时間上得到額外的补偿．

书中讲述了几乎所有型式的齿輪嚙合的几何学，其中也包括非圓形齿輪．仅仅沒有談到准双曲面齿輪(hypoid gears)．照我們看来，这种齿輪在目前研究得还不够完善．书中也沒有接触到

圓柱-圓錐齿輪嚙合．不过讀者可在 Я. С. Давыдов[19] 的书中詳細了解这种齿輪．

正文中以編号方式注明了作者所引用的各种文献．

在撰写这本书的过程中，作者得到了一系列新的結論．証明了在圓柱蝸杆傳动中有两根嚙合軸，制定了求这种蝸杆傳动的接触綫和嚙合区域的簡化方法，确定了一对非圓形齿輪能有相同瞬心綫的条件，等等．

书中所討論的問題，一般都有計算例題来說明，并且都把例題作到得出数值結果．

对于嚙合原理的应用問題，特别是对于齿輪刀具齿廓的計算給予了相当大的注意．

本书审閱人技术科学博士 А. Н. Грубин 教授，在閱讀手稿时，提出了許多批評和建議．为此，作者向他表示謝意．

作者欢迎对本书的批評和建議．

作 者

目 录

前 言
緒 論 …… 1

第一篇 平面嚙合

第一章 基本問題 …… 5
§1 齿輪的瞬心綫 …… 5
§2 Willis 定理 …… 11
§3 共軛齿廓 …… 12
§4 齿廓的漸屈綫 …… 16
§5 Euler-Savary 方程式 …… 25
§6 有关矩陣的必要知識 …… 31
§7 坐标变换 …… 34
§8 用 X. И. Гохман 法計算平面嚙合 …… 41
§9 齿廓法綫法 …… 47
§10 过渡曲綫 …… 49
§11 具体应用 …… 52
第二章 漸开綫嚙合 …… 66
§12 引言. 广义漸开綫方程式 …… 66
§13 基本特性 …… 69
§14 重迭系数 …… 72
§15 切齿方法 …… 75
§16 用齿条刀具加工时輪齿的根切 …… 77
§17 关于修正的概念 …… 79
§18 例題 …… 85
第三章 擺綫嚙合 …… 89
§19 基本知識. 循环曲綫 …… 89
§20 Camus 定理 …… 100
§21 普通型式的擺綫嚙合 …… 102

§22 針輪嚙合 ……105
§23 Roots 輪 ……115
第四章 非圓形齿輪 ……127
§24 应用 ……127
§25 瞬心綫的計算 ……133
§26 封閉瞬心綫 ……136
§27 瞬心綫为凸形的条件 ……139
§28 具有相同瞬心綫的两齿輪的共軛 ……143
§29 簡单輪系 ……146
§30 变形橢圓齿輪 ……159
§31 切齿方案 ……169
§32 漸屈綫和齿廓 ……176
§33 压力角 ……185

第二篇　空間嚙合

第五章 基本問題 ……187
§34 两构件軸綫相錯时的相对运动 ……187
§35 空間坐标变换 ……192
§36 齿面、切面和法綫方程式 ……197
§37 Х. И. Гохман 法 ……203
§38 运动学法 ……210
§39 嚙合軸 ……219
§40 共軛齿面的形成 ……232
§41 誤差的影响 ……233
第六章 圓錐齿輪 ……240
§42 初步知識 ……240
§43 直齿圓錐齿輪的切齿方案 ……244
§44 直齿圓錐齿輪 ……248
§45 斜齿圓錐齿輪 ……265
§46 弧齿圓錐齿輪 ……279
§47 Klingelnberg 嚙合 ……303
§48 研究圓錐齿輪嚙合的近似方法 ……316
第七章 螺旋齿圓柱齿輪 ……323

§ 49 两軸平行时的嚙合条件 ……323
§ 50 漸开綫斜齿輪 ……327
§ 51 M. Л. Новиков 嚙合 ……338
§ 52 两軸相錯时的嚙合条件 ……342
§ 53 漸开綫螺旋齿輪 ……348
第八章 圓柱蝸杆嚙合……362
§ 54 初步知識 ……362
§ 55 护軸綫螺旋面 ……365
§ 56 阿基米德螺旋面 ……374
§ 57 漸开綫螺旋面 ……375
§ 58 用盘狀錐面刀具加工出的螺旋面 ……382
§ 59 蝸杆的合理几何形狀的选擇 ……391
§ 60 軸向截面为凹形齿廓的蝸杆螺旋齿的非直紋螺旋面 ……394
§ 61 接触綫．嚙合面 ……398
§ 62 求接触綫的簡化方法 ……404
§ 63 嚙合区域 ……409
第九章 加工圓柱蝸杆和蝸輪的刀具齿廓的計算……415
§ 64 飞刀的齿廓 ……415
§ 65 指狀銑刀的齿廓 ……425
§ 66 盘狀銑刀齿廓的計算 ……429
第十章 弧面蝸杆嚙合……435
§ 67 引言．蝸杆螺旋齿面 ……435
§ 68 接触綫．嚙合面 ……439
§ 69 蝸輪的齿面 ……446
参考文献……450

緒　論

齿輪傳动是机器和仪器中用得最广的一种机械傳动．齿輪可以傳递平行軸、相交軸和相錯軸之間的回轉运动，換句話說，它可以傳递实踐中任何配置情况的两軸之間的回轉运动．齿輪的嚙合元素有各种各样的結构形式．我們知道，有直齿、斜齿和螺旋齿齿輪；蝸輪的外形，有时甚至蝸杆的外形都作成弧面；齿面作成柱面和錐面，直紋面和非直紋面．

到目前为止，主要应用主被动两构件速比为常数的齿輪机构．近年来，采用了非圓形齿輪来傳递速比为变数的两构件之間的回轉运动．这种齿輪用于机器制造业中的各种自动机；在仪器制造业中，由非圓形齿輪組成的机构，用来作为再現具有一个独立变量的函数的发生装置．

实际需要促使人們去发明新型齿輪．不久以前，美国出現了所謂錐形蝸杆嚙合[105] (spiroid gears)．在西德，研究出了一种新型圓柱蝸杆傳动[102]．苏联 M. Л. Новиков[83] 发明了非常有效的、承载能力相当大的新型圓柱齿輪．

机器的速度和载荷的增大，要求提高齿輪的制造精度，需要采用热处理，然后再精加工来提高工作齿面的硬度．因此，齿輪的制造方法在不断地完善着；現在几乎到处都用滚切法(метод обкатки)来切制齿輪；用这种方法加工时，工件和刀具处于連續嚙合．机床制造业花了很大的力量来提高齿輪机床的精度，研究出了新切齿法和新型設备，日益广泛地在掌握齿面精加工的方法：剃齿、研齿和磨齿．

由于嚙合原理的研究及其应用，齿輪傳动設計和制造的技术革新才有可能．

要发明新齿輪，不知道共軛齿面形成的基本規律是不可想象

的．此外，还需詳細研究齿面的接触特性，为的是来估計所設計的齿輪傳动的承載能力．刀具設計者在計算切齿刀具的齿廓时，也要用到嚙合原理．齿輪机床設計者要根据切齿方案来設計机床，而切齿方案要依据嚙合原理来拟定．所有这一切都表明，齿輪嚙合原理是和实际生产紧密結合的；嚙合原理所研究的問題是从生产的需要中提出的；而解决这些問題所得到的結果将广泛地为工程师們所利用．

齿輪嚙合原理的迅速发展是由大批学者的努力而取得的．这里不允許对嚙合原理的历史发展概况作全面的叙述❶，我們只作一个簡短的介紹．

La Hire、Poncellet 和 Camus 的功績在于制定了平面嚙合中求共軛齿廓的包絡曲綫法和旋輪曲綫法(метод рулетт).L. Euler[99] 提出了圓柱齿輪的漸开綫嚙合．这种齿輪后来在工业中获得了非常广泛的应用．

在 E. Buckingham [4]、X. Ф. Кетов [36]、Я. И. Дикер[20]、B. H. Кудрявцев [52]、B. A. Гавриленко [8, 9] 及其他作者的著作中，漸开綫嚙合的几何原理已經探討得非常詳尽了．

到目前为止，漸开綫嚙合是用得最广泛的一种平面嚙合．只是最近几年，M. Л. Новиков[83] 才提出了高承載能力的新型平行軸齿輪嚙合．毫无疑問，Новиков 齿輪嚙合将获得愈来愈多的应用，并将大大地排挤在工业中几乎占壟断地位的漸开綫嚙合．

法国几何学家 T. Olivier 和俄国学者 X. И. Гохман 的著作奠定了空間嚙合原理的理論基础．

T. Olivier 引进了求共軛齿面的一般方法——包絡曲面法，論証了利用輔助曲面法获得綫接触和点接触共軛齿面的可能性．自从滚切方法在实践中应用以来，我們知道，刀具的齿面就是輔助曲面．

T. Olivier 在探討这些問題时，只局限在若干几何形象，并且

❶ 在 X. И. Гохман [14] 的著作中，根据十九世紀末叶的状况，对嚙合原理的发展史作了概述．——原注

他还肯定:"……嚙合問題完全是画法几何的問題……". Х. И. Гохман 在表彰 T. Olivier 的无可爭辯的功績的同时,正确地批評了他的这种把嚙合原理和解析法割裂开来的看法.

Х. И. Гохман 的巨大功績在于他研究出了齿輪嚙合的解析原理[14]. 在提出制定研究嚙合的解析方法这个問題时,他写道:

"嚙合原理这个問題,尽管它的实际重要性很大,也可能正是由于它的这种重要性,却成了数学文献中一个十分奇特的現象.果然是这样,几乎在各个不同程度重要的数学問題中,都有一个总的指导思想,并且这个指导思想包罗了那个問題的各个方面,使研究这个問題的人可以一下子抓住所选定的途徑,并且遵循这一途徑前进的时候,唯独嚙合原理却缺少这样一个总的指导思想——一般的公式;由于这种情况,研究嚙合原理的人,不得不摸索着前进,并且在每一步都要寻找立足点,有时甚至沒有成效". Х. И. Гохман 成功地解决了他提出的任务,制定了研究齿輪嚙合的新方法,这个方法的要点将在本书的§8和§37中讲述. Н. И. Колчин[42] 和 И. А. Фрайфельд[85] 是苏維埃时代 Х. И. Гохман 的追随者.在 Н. И. Колчин 的著作中,計算了几乎所有型式的現代空間嚙合,并且把計算和切齿方法以及所用的刀具的形状都結合了起来. И. А. Фрайфельд 成功地应用 Х. И. Гохман 法設計了按滚切法 (метод обкатки) 工作的切齿刀具的齿廓.

由于制定了所謂"运动学"法 (кинематический метод),空間嚙合問題的研究現已得到簡化.在苏联,首先是 В. А. Шишков[90, 92] 的著作,然后 Я. С. Давыдов[19] 和本书作者的著作[56, 61, 62] 討論了"运动学"法. 国外,在 D. W. Dudley 和 H. Poritsky[98]❶及 O. Saari[105] 的著作中有研究空間嚙合的这种方法. 这个方法的主要特点是利用如下原理:互为包絡的两齿面,在接触点处的相对运动速度向量 $\boldsymbol{v}$ 垂直于法綫向量 $\boldsymbol{n}$, 即 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}=0$.

---

❶ D. W. Dudley 和 H. Poritsky 的这篇文章是在战爭时期 (1943 年) 书写的,看来它沒有被人們所发現. 关于这一点,可由苏联和国外的許多文献中沒有引用过这篇文章而得到証实. 本书作者直到 1959 年才看到它.——原注

在苏联和国外，已經有許多內容丰富的著作討論了空間嚙合的几何問題，在本书的正文中引証了这些著作，其名称列于书末。

第 一 篇

平 面 嚙 合

第一章 基 本 問 題

§1 齿輪的瞬心綫

我們来研究平面嚙合，平面嚙合是用来傳遞平行軸之間的运动的，在一般情况下，速比是变动的。

当然，所得的結果也适用于实踐中最常碰到的傳遞定速比运动的情况。

傳动比函数确定了随第一个齿輪的轉角 φ_1 而变化的两齿輪的瞬时角速比。

$$i_{12}=\frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{d\varphi_1}{dt}:\frac{d\varphi_2}{dt}=f(\varphi_1).$$

类似地，

$$i_{21}=\frac{\omega_2}{\omega_1}=\frac{1}{f(\varphi_1)}.$$

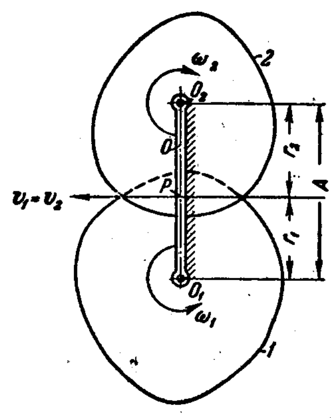

图 1

在 φ_1 的变化区域内，函数 $i_{12}=f(\varphi_1)$ 取有限的正値（参看 §25）。

設需要把回轉运动从 O_1 軸傳到 O_2 軸（图 1）。在垂直于軸綫 O_1 和 O_2 的平面中，构件 *1* 和 *2* 的相对运动可以归結为两条共軛曲綫彼此互相滚动，这两条相互滚动的共軛曲

綫叫做瞬心綫.

两条瞬心綫的接触点在固定平面中的軌迹——瞬心綫的嚙合綫——称为复瞬心綫. 由这个定义可知复瞬心綫是瞬时回轉中心在固定平面中的軌迹.

瞬时回轉中心是固定平面中的这样一个点 P，在这一点，两构件的相对运动速度 $\boldsymbol{v}_{12}$ 等于零，即

$$\boldsymbol{v}_{12}=\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2=0,$$

式中 $\boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{v}_2$——同一点 P 分别繞 O_1 和 O_2 回轉时的速度向量.

如果在固定平面中的一点，相对运动速度等于零，那么在这点速度向量 $\boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{v}_2$ 的大小和方向都相同. 显然，这点 (P) 应位于直綫 O_1O_2 上，因为只有在这条綫上的点，速度 $\boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{v}_2$ 才可能有相同的方向；其次，P 点应該把中心距分成 O_1P 和 O_2P 这样两个綫段，使得等式 $|\boldsymbol{v}_1|=|\boldsymbol{v}_2|$ 成立，也就是使得

$$\frac{O_2P}{O_1P}=\frac{\omega_1}{\omega_2}.$$

由此可以得出結論，构件 *1* 和构件 *2* 相对运动的瞬时回轉中心 P，位于固定平面中連心綫 O_1O_2 上，而且把中心距分成两段，这两段的长度和两齿輪的瞬时角速度成反比.

在嚙合原理中，把瞬时回轉中心 P 叫做嚙合节点. 当傳动比是变数时，在傳遞回轉运动的过程中，嚙合节点沿連心綫移动.

每个齿輪的瞬心綫，就是瞬时回轉中心在与該齿輪相固連的坐标系中的軌迹.

引入記号 $O_1P=r_1$ 和 $O_2P=r_2$，則

$$i_{12}=\frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{r_2}{r_1}=f(\varphi_1).$$

中心距：$A=r_2\pm r_1$.

上式和下文中，上面的正負号对应于外嚙合，而下面的正負号对应于內嚙合，同时假定 $r_2>r_1$.

由于 $i_{12}=\dfrac{r_2}{r_1}=\dfrac{A\mp r_1}{r_1}$，第一个齿輪的瞬心綫的方程式可以写成：

$$r_1=\frac{A}{i_{12}\pm 1}=\frac{A}{f(\varphi_1)\pm 1}. \tag{1.1}$$

我們来求第二个齿輪的瞬心綫的方程式．对于轉角 φ_1 的每一个固定值，可以确定瞬时回轉中心到第二个齿輪軸的距离 r_2，

$$r_2=A\mp r_1=A\,\frac{i_{12}}{i_{12}\pm 1}.$$

再求对应于 r_2 值的轉角 φ_2 之值，

$$i_{12}=\frac{d\varphi_1}{dt}:\frac{d\varphi_2}{dt}=\frac{d\varphi_1}{d\varphi_2},$$

由此，

$$\varphi_2=\int_0^{\varphi_1}\frac{d\varphi_1}{i_{12}}.$$

所以，第二个齿輪的瞬心綫的方程式可以写成：

$$\left.\begin{aligned} r_2&=A\,\frac{i_{12}}{i_{12}\pm 1},\\ \varphi_2&=\int_0^{\varphi_1}\frac{d\varphi_1}{i_{12}}, \end{aligned}\right\} \tag{1.2}$$

式中 $i_{12}=f(\varphi_1)$.

必須預先說明，齿輪的轉角 φ 和瞬心綫的极角 ϑ 大小相等，但是应当按照相反的方向来計量．在图 2 中，极角的計量是按照虛綫所示的方向进行的．

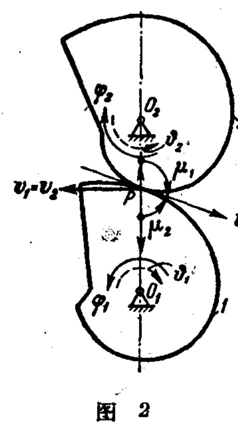

图 2

由微分几何学中知道，向徑和切綫的正向所夹的角 μ，可以由下面的方程式确定：

$$\operatorname{tg}\mu=\frac{r}{\dfrac{dr}{d\varphi}}.$$

切綫的正向和通常一样，应当取得与瞬心綫极角的計量方向一致．

对于第一个瞬心綫，利用方程式 (1.1)，得到：

$$\operatorname{tg}\mu_1=\frac{r_1}{\frac{dr_1}{d\varphi_1}}=-\frac{i_{12}\pm 1}{i'_{12}}. \tag{1.3}$$

在这个方程式以及下文中，

$$i'_{12}=\frac{d}{d\varphi_1}(i_{12}).$$

同样，对于第二个瞬心綫有：

$$\operatorname{tg}\mu_2=\frac{r_2}{\frac{dr_2}{d\varphi_2}}=\frac{r_2}{\frac{dr_2}{d\varphi_1}i_{12}}=\pm\frac{i_{12}\pm 1}{i'_{12}}. \tag{1.4}$$

方程式 (1.3) 和 (1.4) 証明了，两个齿輪的瞬心綫在瞬时嚙合节点有公共切綫 Pt (图 2)，而 μ_1 角和 μ_2 角之間有下面的关系：

$$\mu_1+\mu_2=\pi \quad (\text{对于外嚙合}),$$

$$\mu_1=\mu_2 \quad (\text{对于内嚙合}).$$

对于傳递 $i_{12}=$常数的傳动，两齿輪的瞬心綫就是半徑为 r_1 和 r_2 的两个圓．显然，这时有 $\mu_1=\mu_2=\frac{\pi}{2}$.

現在来研究把回轉运动变为直移运动的情形 (图 3)．我們引用記号

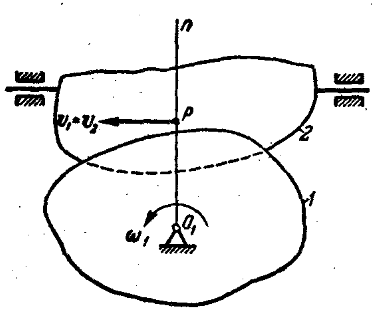

图 3

$$\psi(\varphi_1)=\frac{ds}{dt}:\frac{d\varphi_1}{dt},$$

式中 $\frac{ds}{dt}$——构件 2 的移动速度．用与前面相类似的証明，可以求得：

$$O_1P=\frac{v_2}{\omega_1}=\psi(\varphi_1).$$

在把回轉运动变为直移运动的傳动中，瞬时嚙合节点 P 位于和移动方向垂直的 O_1n 綫上，而該点离回轉中心的距离取决于移动速度与回轉角速度的瞬时値之比．

非圓形齿輪和齿条的搭配就是这种傳动 (图 4)．

非圓形齿輪的瞬心綫由下面的方程式确定：

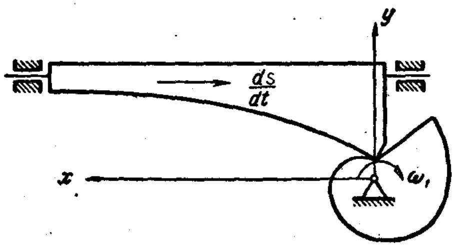

图 4

$$r_1=\psi(\varphi_1). \tag{1.5}$$

最好在直角坐标系中給出齿条的瞬心綫，坐标系x軸的方向和直移运动的方向重合，于是，

$$\left.\begin{aligned} x&=\int_0^{\varphi_1} r_1 d\varphi_1, \\ y&=r_1. \end{aligned}\right\} \tag{1.6}$$

当傳遞定速比的运动时，$\psi(\varphi_1)=$常数；在这种情况下，齿輪的瞬心綫是一半徑为$r_1=\frac{v_2}{\omega_1}$的圓，而齿条的瞬心綫是一条和这个圓相切的直綫.

上面已經說过，在相对运动中，两齿輪的瞬心綫相互滾动. 为了求滾动角速度，我們利用反轉运动法.

給整个机构的所有构件加上一个轉动，其轉速与第一个瞬心綫的轉速大小相等而方向相反. 这时构件 *1* (图 5) 将固定不动，而构件 *2* 将参与两个运动：牽連运动——和系杆一起以角速度 ω_1 順着箭头 s_1 的方向回轉；相对运动——繞本身固有的軸綫以角速度 ω_2 順着箭头 s_2 的方向回轉.

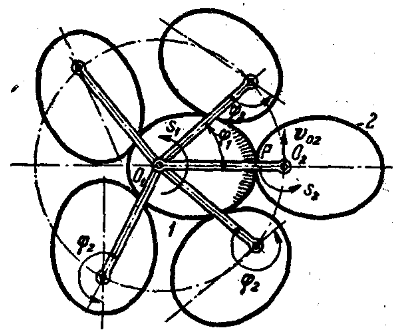

图 5

我們来求相对运动的角速度 ω_{21}.