罗增儒数学奥林匹克丛书

LUO ZENG RU SHU XUE AO LIN PI KE CONG SHU

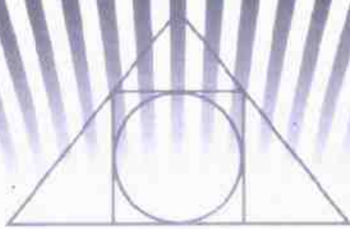
新世纪版

初中数学奥林匹克

同步辅导 专题讲练 激发兴趣 拓展思维

一年级

罗增儒 主编



陕西师范大学出版社

责任编辑 朱永庚 / 封面设计 徐 明 / 责任校对 郭健娇

罗增儒 1945年生，广东惠州人，陕西师范大学教育考试研究所所长、教授，硕士生导师。获曾宪梓教师奖，享受国务院的政府特殊津贴。是中国数学奥林匹克首批高级教练，长期从事数学竞赛的命题、解题、辅导和理论研究工作。1984年以来，已为全国初中联赛、高中联赛、冬令营提供了10余道正式试题，多次聘为高、初中联赛命题组成员。1992年，曾受到中国数学奥委会与中国数学普委会的联合表彰；1993年，他所主持的“奥林匹克数学学科建设”研究课题获全国高校优秀教学成果国家级二等奖。主编的小学、中学、大学数学奥林匹克丛书受到广泛的欢迎。代表作有《数学竞赛导论》、《数学解题学引论》、《直觉探索方法》。

ISBN 7-5613-0736-5

9 787561 307366 >

ISBN 7-5613-0736-5/G·530

定价：6.50元

罗增儒数学奥林匹克丛书

初中数学奥林匹克

一 年 级

主　编　罗增儒
副主编　安振平
　　　　江树基
　　　　刘康宁

陕西师范大学出版社

图书代号:JF184900

图书在版编目(CIP)数据

初中数学奥林匹克·一年级/罗增儒主编. —西安:陕西师范大学出版社,2001.7

ISBN 7-5613-0736-5

Ⅰ.初… Ⅱ.罗… Ⅲ.数学课—初中—教学参考资料 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第15581号

责任编辑 朱永庆
封面设计 徐 明
责任校对 郭健娇
出版发行 陕西师范大学出版社
社 址 西安市陕西师大120信箱(邮政编码:710062)
网 址 http://www.snupg.com
经 销 新华书店
印 制 陕西师范大学印刷厂
开 本 850×1168 1/32
印 张 6.5
字 数 143千
版 次 2001年7月第1版
印 次 2003年5月第4次
定 价 6.50元

开户行:光大银行西安南郊支行 账号:0303070-00330004695
读者购书、书店添货或发现印装问题,请与本社营销中心联系、调换
电 话:(029)5307864 5233753 5251046(传真)
E-mail:if-centre@snupg.com

让竞赛培训更加科学——写在前面

1986年4月，中国数学会普及工作委员会在西安召开了第四届年会，会上讨论了竞赛培训工作中一个近乎空白的问题——资料.没想到两三年后，各级各类的数学竞赛"讲座"或"教材"如雨后春笋，我本人也深深卷入到"奥林匹克数学学科建设"的课题中去，为多家报刊、出版社编写了从小学、中学到大学的辅导资料.然而，这主要是一种热情，说真的，我当时对数学竞赛的内容与方法心中没底.后来随着中国数学奥林匹克的国际性崛起，竞赛教材与竞赛培训都在急剧升温，一些意想不到的情况出现了：重复性的资料既多又滥，名目繁多的竞赛和以创收为目的的奥校应运而生，横行双休日的培训加重了学生的负担……

主要发生在大城市的"竞赛热"有悖于数学竞赛的初衷.今天我们回过头来再看数学竞赛培训工作的时候，10年的时间使我们成熟了20年.有一些基本的经验我们愿作为本书的编写说明与使用建议供大家参考.

1. 知识同步　能力超前

就是说，数学竞赛培训的日常内容与中学教材进度同步，而在能力培养上适当超前.

据此，我们在编写本书时，有意跟初中义务教育新教材的进度保持一致，所穿插的算术问题(数论)、智力问题(组合数学)也力图从教

材中寻找生长点.而课本内容的深层挖掘与课外内容的同步渗透,将使学有余力的学生有机会能力超前.

由于各地的情况不一样,"同步"也应有差别,读者在具体使用中可以调整内容的顺序,一些较新、较深、较难的课题不妨移到假期再学习.

怎样从"知识同步"与"能力超前"之间找到一个可操作的切入点呢?我们的建议是:从高处接近中考,从低处靠拢竞赛.退可站稳中考脚跟,进可迈向竞赛高台.

2. 精讲多练　学会学习

数学竞赛是一种智力竞赛,又是一种第二课堂活动.因此,与第一课堂的教与学都应有区别,都应更注重于智力的开发.教练员的精讲应精在"结论是怎样发现的?解法是怎样找到的?"有的课题还可以组织学生自学讨论.学生的多练不是追求"习题效应",而是要磨炼心理素质、培养解题感觉、学会怎样学习.

聪明的孩子到处都有,聪明而不学习只能成为蠢才,聪明而不善于学习会沦为庸才,聪明而又"会学习"的学生才有希望成为数学竞赛的佼佼者.同样,如果培训不能放手培养学生的自学能力、独立思考能力,便不可能产生竞赛型的强手.

与此相适应,我们在编写中,非常注意例题讲解的思路分析和习题配备的巩固性、启发性与新颖性.这当中,有我们命题、解题的经验积累,但也给读者的创造性思考留下了广阔的空间.我们期望读者,在使用本书过程中提出新思路、找到新解法、写出小论文.

3. 重视即时信息　站到起跑线上

第一课堂教学在传授知识上有个时间差,不可能随着日新月异的科技发展频繁更迭内容,讲的都是"昔时信息".同样,尽管我们在写本书时采用了较新资料,但出版后也会逐渐变旧.而竞赛内容和方法是一种"活"的数学,每年都有大批新题目问世,读者在使用本书时,应随时吸收国内外数学竞赛的"即时信息",使自己站到起跑线

上．一方面能开阔视野、形成更广泛的智力背景，另方面能造成一种既学习、又研究的开放性局面．

4．**业余自愿　激发兴趣**

数学竞赛培训是一种第二课堂活动，它是日常课堂的延伸与补充，能够体现因材施教、发展个性特征、丰富学习生活、促进全面发展，但不能冲击第一课堂．因而，一定要坚持自愿参加的原则，包括学生兴趣转移的自由．一般说来，初中学生的兴趣指向还不太成熟，思维最近发展区也不甚明朗，竞赛培训的重点在于使初中学生获得数学文化的熏陶和创造机智的启蒙而终生受益．把初中生的竞赛培训当作数学工作者的早期职业培训是不恰当的．

作为前言的最后，谨向帮助、支持本书出版的有关人士表示由衷的感激，也向关心本书、并将提出批评指正意见的读者提前表示欢迎与谢意．

罗增儒

2001 年 4 月

目　录

(详细解答请参看罗增儒主编的《初中数学奥林匹克题解》)

第一讲 巧算

据说,我国著名数学家苏步青教授小时候,曾在电车上碰到一位有名的外国数学家,这位数学家给他出了这样一道应用题:甲乙两人同时从相距 100 千米的东西两地相向而行.甲每小时行 6 千米,乙每小时行 4 千米.甲带着一只狗,狗每小时走 10 千米,这只狗同甲一道出发,碰到乙后立刻调头朝甲走,碰到甲后再调头朝乙那边走,直到两人相遇.问这只狗一共走了多少千米?

苏步青略加思索,很快就把正确的答案告诉了这位外国数学家.原来他是巧妙地观察了问题的特点,先算出甲乙两人从开始到相遇所需的时间,即为狗走的时间:$\frac{100}{6+4}=10$(小时),这就立即算出狗走的路程为:$10\times10=100$(千米),这里因为抓住了问题的关键,从而得以巧算.

同学们要学好数学,既要善于动脑筋仔细地思考,又要勤于动手算题.因此,怎么观察、怎么分析、怎样快速解题,巧算就显得特别重要了.

一、巧用运算律

在计算过程中,最常用的技巧是利用加法的交换律、结合律和乘法的交换律、结合律、分配律.计算时,首先应观察、分析参与运算的

数的特征、排列顺序等.不妨交换一下各数的位置,或先算某几个数,后算另几个数,达到简化运算过程,用脑直接进行快速计算的目的.

【例1】 计算

(1) $2.89\times4.68+4.68\times6.11+4.68$;

(2) $1+2+3+4+5+6+7+8+9$;

(3) $1\underbrace{00\cdots0}_{1995个0}1\times\underbrace{99\cdots9}_{1996个9}-1\underbrace{99\cdots9}_{1996个9}$;

(4) $\frac{1}{1}+\left(\frac{2}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{3}{1}-\frac{2}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{4}{1}-\frac{3}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{9}{1}-\frac{8}{2}+\frac{7}{3}-\frac{6}{4}+\cdots+\frac{3}{7}-\frac{2}{8}+\frac{1}{9}\right)$.

解 (1)
$$\begin{aligned}&2.89\times4.68+4.68\times6.11+4.68\\=&4.68\times(2.89+6.11+1)\\=&4.68\times10=46.8.\end{aligned}$$

(2) 将首尾"等距离"的两数结合,得

$$\begin{aligned}&1+2+3+4+5+6+7+8+9\\=&(1+9)+(2+8)+(3+7)+(4+6)+5\\=&10+10+10+10+5=45.\end{aligned}$$

如果给原算式的数1前加上0,可有同样算法.

$$\begin{aligned}&1+2+3+4+5+6+7+8+9\\=&0+1+2+3+4+5+6+7+8+9\\=&(0+9)+(1+8)+(2+7)+(3+6)+(4+5)\\=&9+9+9+9+9=45.\end{aligned}$$

上面两种算法的关键是从这一长串各数互不相等中挖掘出相等因素——首尾等距离的两数之和相等.抓住这个规律,就有下面的"倒写相加"算法.

$$\begin{array}{rl}&S=1+2+3+4+5+6+7+8+9\\+&S=9+8+7+6+5+4+3+2+1\\\hline&2S=10+10+10+10+10+10+10+10+10,\end{array}$$

即　$2S=90$.

所以　$S=45$.

(3)　$1\underbrace{00\cdots0}_{1995个0}1\times\underbrace{99\cdots9}_{1996个9}-1\underbrace{99\cdots9}_{1996个9}$

$$=(1\underbrace{00\cdots00}_{1996个0}+1)\times\underbrace{99\cdots9}_{1996个9}-1\underbrace{99\cdots9}_{1996个9}$$

$$=\underbrace{99\cdots9}_{1996个9}\underbrace{00\cdots0}_{1996个0}+\underbrace{99\cdots9}_{1996个9}-1\underbrace{99\cdots9}_{1996个9}$$

$$=\underbrace{99\cdots9}_{1996个9}\underbrace{00\cdots0}_{1996个0}-1\underbrace{00\cdots0}_{1996个0}=\underbrace{99\cdots9}_{1995个9}8\underbrace{00\cdots0}_{1996个0}.$$

(4) 把原算式中各组里的数排成三角数阵

$$\begin{array}{c}
\frac{1}{1}\\
\frac{2}{1}\quad -\frac{1}{2}\\
\frac{3}{1}\quad -\frac{2}{2}\quad \frac{1}{3}\\
\frac{4}{1}\quad -\frac{3}{2}\quad \frac{2}{3}\quad -\frac{1}{4}\\
\cdots\quad\cdots\quad\cdots\\
\frac{9}{1}\quad -\frac{8}{2}\quad \frac{7}{3}\cdots\quad\cdots\quad -\frac{2}{8}\quad \frac{1}{9}
\end{array}$$

仔细观察这些数的特征,很快发现,只要利用运算律,把分母相同的数放在同一组里,就很容易求和.

$$原式=\left(\frac{1}{1}+\frac{2}{1}+\cdots+\frac{9}{1}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{2}+\cdots+\frac{8}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\cdots+\frac{7}{3}\right)-\cdots-\left(\frac{1}{8}+\frac{2}{8}\right)+\frac{1}{9}$$

$$=(1+2+\cdots+9)-\frac{1}{2}\times(1+2+\cdots+8)+\frac{1}{3}\times(1+2+\cdots+7)-\cdots-\frac{1}{8}\times(1+2)+\frac{1}{9}$$

$$=45-\frac{1}{2}\times36+\frac{1}{3}\times28-\frac{1}{4}\times21+\cdots-\frac{3}{8}+\frac{1}{9}$$

$$=45-18+\frac{28}{3}-\frac{21}{4}+3-\frac{5}{3}+\frac{6}{7}-\frac{3}{8}+\frac{1}{9}$$

$$=33\frac{5}{504}.$$

注 想一想,怎样求出

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n\times(n+1)}{2}.$$

二、化整与分拆

化整与分拆是巧算的主要思考方法."化整"就是指将算式中的数化成整数.整10、整100等;其转化方法是对原算式加、减、乘、除适当的数.而"分拆"一般是指将算式中的数分为两个数的和或差.有时候需要先"分拆"后"化整".如何进行合理的"分拆"与"化整",要依据具体的题目,达到以巧算为目的而确定.

【例2】 计算

(1) $5991+599.1+59.91+5.991$;

(2) $8+98+998+9998+99998$;

(3) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}+\frac{1}{256}$;

(4) $\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{1995\times1996}$.

解 (1) $5991+599.1+59.91+5.991$

$$=(6000-9)+(600-0.9)+(60-0.09)+(6-0.09)$$

$$=6666-9.999$$

$$=6666-10+0.001=6656.001.$$

本例的另一做法是将全式乘以10,然后减去原式,把多个数的求和转化为减法与除法.

(2) $8+98+998+9998+99998$

$$=(10-2)+(100-2)+(1000-2)+(10000-2)+(100000-2)$$

$=111110-5\times2=111100.$

(3) 将 1 分拆为 $2-1$，得

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}+\frac{1}{256}$$

$$=\frac{1}{2}\times(2-1)+\frac{1}{4}\times(2-1)+\frac{1}{8}\times(2-1)+\frac{1}{16}\times(2-1)+$$

$$\frac{1}{32}\times(2-1)+\frac{1}{64}\times(2-1)+\frac{1}{128}\times(2-1)+\frac{1}{256}\times(2-1)$$

$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\frac{1}{16}-\frac{1}{32}+$$

$$\frac{1}{32}-\frac{1}{64}+\frac{1}{64}-\frac{1}{128}+\frac{1}{128}-\frac{1}{256}$$

$$=1-\frac{1}{256}=\frac{255}{256}.$$

本例的另一处理是将原式乘以 2 后减去原式，得

$$原式=1-\frac{1}{256}=\frac{255}{256}.$$

(4) 将 1 分拆为 $1=(n+1)-n$ 得

$$\frac{1}{n\times(n+1)}=\frac{1}{n\times(n+1)}\times[(n+1)-n]=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}.$$

则
$$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{1995\times1996}$$

$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{1995}-\frac{1}{1996}$$

$$=1-\frac{1}{1996}=\frac{1995}{1996}.$$

三、巧用估值法

有些问题从正面硬算难以进行，如果改变角度，利用扩、缩法先估计出值的范围或近似值，就容易找出答案.

【例 3】 求数$\dfrac{1}{\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{19}}$的整数部分.

解 原数$>\dfrac{1}{\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{10}}=1$,

原数$<\dfrac{1}{\frac{1}{19}+\frac{1}{19}+\frac{1}{19}+\cdots+\frac{1}{19}}=1.9$,

即 1<原数<1.9.

所以 原数的整数部分是 1.

四、探索规律法

从问题的特殊情况入手,在计算中找出规律,然后利用规律进行巧算.

【例 4】 计算

$$\text{共 1995 层}\left\{1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{\cdots 1-\cfrac{1}{1-\frac{113}{355}}}}}}\right.$$

解 这是一道繁分数的运算题,如果一层一层地算下去,共有1995层,显然很繁难.我们不妨一层一层试算,看看能发现什么规律?

(1) $1-\dfrac{113}{355}=\dfrac{242}{355}$;

(2) $1-\dfrac{1}{1-\frac{113}{355}}=1-\dfrac{355}{242}=-\dfrac{113}{242}$;

(3) $1-\dfrac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{113}{355}}}=1+\dfrac{242}{113}=\dfrac{355}{113}$;

(4) $1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-\cfrac{113}{355}}}}=1-\frac{113}{355}=\frac{242}{355}$.

从这4步的计算,我们容易看出:经过3层分数线繁分式的运算,我们仍然得到

$$1-\frac{113}{355}=\frac{242}{355},$$

即这个繁分式的运算是每隔3次,数字就重复出现(称为周期性重复).

因 $1995=3\times 665$,恰好是3的倍数,

故 原式 $=\frac{355}{113}$.

注 数值$\frac{355}{113}$是我国古代著名数学家祖冲之发现的"密率"——圆周率的近似值,作为数学爱好者了解它是有意义的.

五、考虑极端情况

考虑问题的某些极端情况,抓住其自身的独特性质,可使问题获得巧解.

【例5】 图1-1-1是中国古代著名的"杨辉三角形"的示意图,图中填入的所有数的总和是(　　).

(A) 126　　(B) 127　　(C) 128　　(D) 129

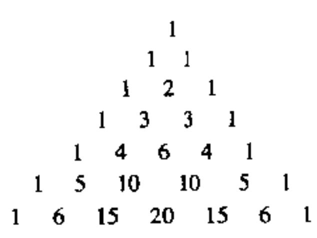


图1-1-1

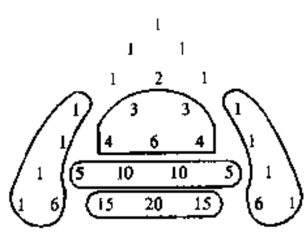


图1-1-2

【分析】 由于4个选支中只有1个是正确的，而各选项的个位数字均不相同，所以，我们只需计算表中各数总和的个位数字，即可选出正确答案.

解 如图1－1－2所示，每个圈的数之和的个位数均为零，从而所有数总和的个位数是7，故选(B).

习 题 1

(一) 选择题(有且只有1个正确)

1. 给出20个数：

87　91　94　88　93　91　89　87　92　86

90　92　88　90　91　86　89　92　95　88

它们的和是(　　).

(A) 1789　(B) 1799　(C) 1879　(D) 1899

2. $3-6+9-12+\cdots+1995-1998$ 等于(　　).

(A) -335　(B) 335　(C) -999　(D) 999

3. 在自然数1，2，3，4，5，…中，前15个素数之和的负倒数等于(　　).

(A) $-\frac{1}{328}$　(B) $-\frac{1}{329}$　(C) $-\frac{1}{337}$　(D) $-\frac{1}{340}$

4. 为了从500只外形相同的鸡蛋中找出惟一的一只双黄蛋，检查员将这些蛋按1～500的序号排成一列，第一次先从中取出序号为单数的蛋，发现其中没有双黄蛋；他将剩下的蛋在原来的位置上又按1～250编了序号(即原来的2号变为1号，原来的4号的变为2号，……，原来的500号变为250号)，又从中取出新序号为单数的蛋进行检查，仍没有发现双黄蛋；如此继续下去，检查到最后一个蛋才是双黄蛋. 这只双黄蛋最初的编号是(　　).

(A) 48　(B) 250　(C) 256　(D) 500