

運動幾何學

朱廣才編

高等教育出版社

學 何 幾 動 運

編 才 廣 朱

社 版 出 教 育 等 高

本書名为“运动几何学”，内容是研究运动的几何特性，籍以更深刻地了解运动学和机构学。本書可作为綜合大学和高等工業学校的参考書。

运 动 几 何 学

朱 广 才 編

高 等 教 育 出 版 社 出 版 北 京 流 通 版 170 号

(北京市書刊出版業營業許可証出字第054号)

京 华 印 書 局 印 刷 新 华 書 店 总 經 售

統 一 書 号 13010·374 開 本 $850 \times 1168 \frac{1}{32}$ 印 張 $6 \frac{11}{16}$ 字 数 154,000 印 数 1,701—3,100

1955 年 9 月 第 1 版 1958 年 3 月 北 京 第 2 次 印 刷 定 價 (10) 元 1.00

目 錄

曾序.....	11
引言.....	13

第一章 點的位移與連續運動

(1.1) 概論.....	16
(1.2) 點在平面內的位置之確定法.....	16
(1.3) 點在平面內的位置之確定條件.....	17
(1.4) 點在平面內的軌跡或軌道.....	17
(1.5) 點在空間的位置之確定法.....	18
(1.6) 點在空間的軌跡或軌道.....	19
(1.7) 位移與連續運動.....	19
(1.8) 點的直線位移及其幾何表示法.....	20
(1.9) 直線位移之組合.....	20
(1.10) 點繞定軸的旋轉位移及其幾何表示法.....	21
(1.11) 運動點由於 φ 所表示的旋轉位移所發生的線位移的解析式.....	22
(1.12) 旋轉位移之組合.....	23
(a) 繞平行軸的旋轉位移之組合.....	23
(b) 繞匯交軸的旋轉位移之組合.....	26
(1.13) 點的平面位移與平面運動.....	27
(a) 點的典型平面位移.....	27
(b) 點的平面運動.....	28
(1.14) 例題.....	30
(1.15) 運動點繞一定點的位移與運動.....	30
(a) 繞定點的典型位移.....	31
(b) 繞定點的連續運動.....	31
(1.16) 點在空間的任意位移.....	32

(a) 補題.....	32
(b) 點在空間的典型位移.....	33
(1.17) 螺旋位移與螺旋運動.....	34
(1.18) 圓柱螺旋線的基本幾何特性.....	34
(1.19) 點在空間的任意運動.....	38
(1.20) 例題.....	39

第二章 “平面剛形”在其平面內的 位移與連續運動

(2.1) 概論.....	42
(2.2) “平面剛形”在其平面內位移之設想法.....	42
(2.3) 平面形在其平面內的位置之確定法.....	43
(2.4) 製圖題.....	43
(2.5) 平面形在其平面內的位置之確定條件.....	44
(2.6) 平面形在其平面內的“一參數運動”和“二參數運動”.....	45

(A) 平面形在其平面內的位移

(一) 基本位移

a. 平行位移

(2.7) 定義.....	45
(2.8) 定理.....	46
(2.9) 平行位移的幾何表示法.....	48
(2.10) 平面形在其平面內的平行位移的實現法.....	48
(2.11) 二平行位移之組合.....	48
(2.12) 二個以上平行位移之組合.....	49

β. 旋轉位移

(2.13) 定義.....	50
(2.14) 定理.....	50
(2.15) 旋轉位移的幾何表示法.....	51
(2.16) 定理(2.14)之系.....	52

(2, 17) 定理	52
(2, 18) 平面形旋轉位移的實現法	53
(2, 19) 二有限旋轉位移之組合	53
(2, 20) 注意	55
(2, 21) 二無限小旋轉位移之組合	55
(2, 22) 異心的二相等而方向相反的旋轉位移之組合	55

二 典型位移

(2, 23) 旋轉位移與平行位移之組合	56
(2, 24) 定理	59

(B) 平面形在其平面內的連續運動

(2, 25) 瞬時旋心的定義	62
(2, 26) 瞬時旋心的幾何特性：夏爾定理	63
(2, 27) 夏爾定理的應用舉例	64
(2, 28) 與運動平面形聯屬之曲線的包線	66
(2, 29) 定理	67
(2, 30) 例題	67
(2, 31) 瞬時旋心在固定平面 P 內的軌跡 Γ 與瞬時旋心在運動平面 P_1 內的軌跡 Γ_1	70
(2, 32) 對於曲線 Γ , 曲線 Γ_1 移動的方式	72

(C) 平面形在其平面內的普遍運動

之歸結為無滑行的滾動

(2, 33) 定理	78
(2, 34) 總結	76
(2, 35) 習題	76

第三章 運動平面形之任一點的軌道及 任一線的包線與基線及滾線間的幾何關係

(3, 1) 概論	78
(3, 2) 關於平面曲線的幾何基本概念	78

(3, 3) 經曲線(M)上兩點的切線在曲線(L)上截切的弧線的變化	80
(3, 4) 運動平面形之各點的軌道的曲率中心	81
(3, 5) 求曲率中心的薩瓦利法	84
(3, 6) 平面形之任一點的軌道的特殊點	85
(3, 7) 平面形之任一線的包線之曲率中心	87
(3, 8) 依基線和滾線的對應曲率中心扭曲圓的畫製法	
基線和滾線均為任意之曲線的一般情形	90
(3, 9) 在滾線 Γ_1 為直線的特殊情形下 H 點的位置	92
(3, 10) 在基線 Γ 為直線的特殊情形下 H 點的位置	93
(3, 11) 基線 Γ 與滾線 Γ_1 對於其公共切線對稱的特殊情形	93
(3, 12) 求運動平面形內任一點的軌道曲率中心之畫法舉例	94
(3, 13) 求運動平面形內一線的包線曲率中心的畫法舉例	96

複旋運動

(3, 14) 定義	97
(3, 15) 複旋線的參數及複旋線的種類和形狀	98
(3, 16) 複旋線有回折點的條件	100
(3, 17) 複旋線有扭曲點的條件	100
(3, 18) 經過基線圓中心，能引複旋線的切線的條件	101
(3, 19) 任一複旋線的曲率中心	102
(3, 20) 通常複旋線的曲率中心	102
(3, 21) 定理	103
(3, 22) 定理(3, 21)應用於一特殊情形	105
(3, 23) 複旋運動所產生的橢圓線	106
(3, 24) 複旋運動的他種特殊情形	107
(3, 25) 作複旋運動的一條線的包線	108
(3, 26) 複旋線的漸屈線	109
(3, 27) 通常複旋線弧的長度	110
(3, 28) 習題	110

第四章 “剛體”在空間的位移和連續運動

(4, 1) 概論	112
-----------	-----

(4, 2) 剛體在空間位移的設想法	112
(4, 3) 剛體在空間的位置之確定法	113
(4, 4) 製圖題	113
(4, 5) 剛體在空間的位置之確定條件	114
(4, 6) 一自由度運動, 或一參數運動, 定理	115
(4, 7) 定理 (4, 6) 之系	115
(4, 8) 二參數及多參數運動	116

基本位移

α . 平行位移

(4, 9) 定義	116
(4, 10) 定理	117
(4, 11) 平行位移實現的他種方法	118
(4, 12) 平行位移之幾何表示法與組合法	118

β . 繞定軸的旋轉位移

(4, 13) 定義	119
(4, 14) 定理	120
(4, 15) 定理	121
(4, 16) 旋轉位移的幾何表示法	122
(4, 17) 注意	125
(4, 18) 研究空間運動的程序	125

(一) 平行於一固定平面的運動

(4, 19) 總論	126
(4, 20) (a) 位移之組合與典型位移	126
(b) 連續運動	127

(二) 繞一固定點的運動

(a) 有限位移

(4, 21) 剛體繞一固定點的基本位移	128
(4, 22) 繞匯交軸的旋轉位移之組合	128

(4, 23) 達朗伯爾定理	130
----------------------	-----

(4, 24) 定理(1, 23)的另一證法	131
------------------------------	-----

四 連續運動

(4, 25) 瞬時旋轉軸	132
---------------------	-----

(4, 26) 剛體繞一固定點的普遍運動	132
----------------------------	-----

(三) 空間的普遍運動

(a) 有限位移

(4, 27) 定理	134
------------------	-----

(4, 28) 空間任一位移之結締爲相配之「平行位移和」旋轉位移	134
--	-----

(4, 29) 典型的空間位移、螺旋位移	136
----------------------------	-----

(4, 30) 形體由一位置達到另一指定位置的螺旋位移之惟一性	138
---------------------------------------	-----

(4, 31) 螺旋位移之組合	138
-----------------------	-----

(b) 連續運動

(4, 32) 掉轉軸	139
-------------------	-----

(4, 33) 普遍運動的幾何分析	140
-------------------------	-----

(4, 34) 注意 1.	142
--------------------	-----

(4, 35) 注意 2.	142
--------------------	-----

(4, 36) 總結	148
------------------	-----

(4, 37) 習題	148
------------------	-----

第五章 一參數運動中的軌道曲線和曲面

二參數運動中的軌道曲面的法線

(5, 1) 概論	144
-----------------	-----

關於翹線的一些基本概念略述

(5, 2) 密切平面	144
-------------------	-----

(5, 3) 聯於曲線之一點的三面形	147
--------------------------	-----

(5, 4) 曲率與扭率——密切圓——密切球面	147
-------------------------------	-----

(5, 5) 翹線的錐投影與正投影	148
-------------------------	-----

(5, 6) 球面示線	150
-------------------	-----

(5, 7) 法面的特徵直線	152
----------------------	-----

翹線的漸伸線與漸屈線

(5, 8) 一線段長度的變化公式	152
(5, 9) 翹線的漸伸線	154

關於一般翹線的概念應用於螺旋線

(5, 10) 聯於螺旋線之一點的三角形	155
(5, 11) 螺旋線上一點的曲率和扭率	157
(5, 12) 經螺旋線上一點的密切球面之半徑	159
(5, 13) 螺旋線的漸伸線	160
(5, 14) 關於一般螺旋線的研究所得結果應用於普通螺旋線	160
(5, 15) 與一翹線相密切於其一點的普通螺旋線	161

任意曲線的切線軌跡面、密切平面的包面、可展曲面

(5, 16) 關於包面的一些古典概念略述	162
(5, 17) 可展面上之一微分弧線及可展面之展開	163
(5, 18) 可展面展開時，面上一曲線的曲率之變化	165

聯繫於一翹線的可展面

(5, 19) 翹線的極面	167
(5, 20) 密切球面的半徑	168
(5, 21) 翹線(M)的調直面	168
(5, 22) 翹線的漸屈線	169
(5, 23) “可展螺旋面”或“等斜曲面”	171
(5, 24) 普通可展螺旋面	172

翹 面

(A) 翹面的一般特性

(5, 25) 翹面之確定與產生法	174
(5, 26) 翹面的切面	175
(5, 27) 關於“一對應關係”的基本特性略述	178

(5, 28) 並聯的曲面	179
(5, 29) 法線雙曲拋物面	180

(B) 關於一般直紋翅面的定理之應用於直紋螺旋面

(5, 30) 普通翅螺旋面	181
(5, 31) 三角形脊螺絲面	184
(5, 32) 有“準平面”的直紋螺旋面	186
(5, 33) 方脊螺絲面	186

運動體各點所畫軌道的法線線叢

(5, 34) 空間的種種無限直線系。法線線叢	189
-------------------------------	-----

相配直線及其基本特性

(5, 35) 定理	190
(5, 36) 定理	190
(5, 37) 定理	190
(5, 38) 定理	191

二參數運動中的軌道曲面的法線

(5, 39) 引題	192
(5, 40) 二參數運動中的相配直線	193
(5, 41) 定理	194
(5, 42) 習題	194

習題解答	195
------------	-----

參考書	213
-----------	-----

曾 序

本書是朱廣才先生根據一九五二年在華北大學工學院的講稿修改後寫成的。當時，一年級的學生中有一班是老解放區的初中學生經過兩年補習後升入本科的。他們在代數方面學的東西不少，但在幾何方面的知識則很嫌不夠。估計他們在往後的學習中，在理論力學和畫法幾何方面的理解難以深入而且會遇到很多困難。因此，請朱先生用“實用幾何”之名給他們補充了兩方面的知識：畫法幾何的一些基本原理和運動幾何學的一些初步知識。這門課程曾引起了學生的濃厚興趣，而且對他們程度的提高起了很大的作用。在我的提議下，朱先生把原稿中的畫法幾何部分刪去，把運動幾何學的部分作了些修改和補充而成此書。

本書的內容是用幾何的方法說明幾何體的運動，也就是去掉運動的時間因素而只論究其位置的關係。爲了研究方便起見，我們常把運動現象首先分解爲兩部分來討論，即運動學和靜力學。運動學無視力的作用而只論究運動體所在的空間與時間的關係，而靜力學則只研究物體受力的特殊情況，即物體的平衡情況（捨去物體的變形情況）。分別研究後再把這兩種情況綜合起來加以研究即爲動力學的部分。

運動幾何學是在力學的運動學部分中再將時間的因素捨去而只研究物體運動時位置的相互關係。這樣，就把運動現象分解的更爲單純，更加抽象，使其化爲更簡單的問題，因而研究起來也就更易明瞭和更易深入。這種分析與綜合的方法是合乎我們研究科學的一般的方法的。運動幾何學把運動的一些現象化爲簡單的幾

何問題，用簡捷的方法作了深入的解釋，特別是它的直觀性能使讀者易於理解和掌握。我以為本書對於高等學校學生學習力學的提高會有不少幫助。書中的某些部分，例如螺旋線和複旋轉線部分對於螺絲和齒輪的基本原理作了透澈的說明，因而對學習機構學者也會有很多幫助。

運動幾何學是新近發展起來的科學，它是研究科學的有力工具之一。但是，目前在我國高等學校的授課中應用的還不廣泛。我想今後會廣泛的應用起來。

本書付印之際，僅誌數言，略述經過

曾毅謹識

一九五四年五月十日

引 言

‘運動’和‘幾何學’兩名詞連用起來，成一相當新的名稱，近在1900年左右才出現於各國科學文獻中。運動幾何學，就其意義而言，是研究運動的幾何學，或者說是幾何學的一部分，專門研究‘運動’的幾何特性的。這個簡單的說明，不過給我們對於這門科學一個大概的輪廓。至於它的內容和應用，非但不能領會，且反而引起兩個疑問：第一，‘運動’似乎不屬於幾何學的範圍，但為什麼把它放在幾何學裏來研究？第二，‘運動學’是研究運動的專門科學，而運動幾何學也是以研究運動為目的的，那麼二者究竟有什麼關係和什麼區別？若把這兩個疑問解答出來，運動幾何學的內容和其應用也就可以瞭然了。

任何運動的研究，撇開運動的原因不談（這應劃入動力學的範圍），一方面應包括運動體在空間如何改變位置，不問及所費的時間；另一方面還要考察這種變化，對時間來說，如何演進。根據由這兩個觀點（一對空間，一對時間）研究運動所得，才能了解它的整個真實現象，才能把它確切地描寫出來。譬如舉一個點的運動為例；找到它的軌道，只能算達到了了解它的運動的初步，認識了運動的一個面貌，從幾何學觀點來看的面貌；這僅是注意到該點在空間的改變位置；還須考察位置之改變與時間的關係，即運動點在每一時刻的速度和加速度，才能將該點的運動情形完全確定。這樣說來，運動的幾何研究是研究運動的一個必需步驟；所以按邏輯說，應該被包括在運動學內。

然而從另一觀點來看，形體的位移，按其本性說，顯然是屬於

幾何學範圍的；蓋位移與幾何物量性質相同：所謂幾何物量即指長度為基本物量，面積和體積為導出物量而言。再者，幾何學常被認作是研究空間之形體的科學，而形體又是藉幾何的基本概念（如點，線，面，體）所構成。幾何學的基本概念，分析到極端，是由觀察自然現象直覺地得來的。若把一個點看作最簡單的形體，或是認為點就是在空間指出的一個精確的地位，則對於其他基本概念均能給予一個運動性的定義；如一個點運動起來所產生的叫作線；線運動所產生的叫作面；面運動所產生的叫作體。按這種看法，不但把運動的研究劃入幾何領域絲毫不覺牽強，甚而有關運動的幾何問題，還要在幾何學中佔一個很重要的地位。

從兩個不同的觀點出發，達到兩個不同的結論。然而這兩個結論並非對立的。一般的理論力學書籍，往往採取第一個看法，把位移的幾何特性劃入運動學內去研究。這是任何人亦不會反對的。不過位移的幾何特性，既屬於幾何學的範圍，而在幾何學中若不加以討論，似乎是一缺點。如果把運動的純粹幾何特性，運動所服從的幾何定律，以及由運動產出的形體的幾何研究，綜合起來，成一系統，不但對於幾何學的教學，即對於運動學的教學，亦必有些幫助。

從歷史上看，笛卡爾，在確定經過一曲線之一點的切線時，首次應用了運動形體位移的幾何特性。柯西(Cauchy)，在他發表於1827年的一篇論文中，指出一平面形在其平面內的任何連續運動，均可由與之聯繫的一曲線，依一固定的曲線的滾動得之；不過此定理未經明顯地寫出而已。此定理是由夏爾(Charles)在其以“關於幾種運動曲線的法線之確定法”為題的一篇論文中發表的。柯西和夏爾的工作，直到現在還是平面運動幾何學的基礎。後來許多幾何學家，特別是馬倫翰(A. Mannheim)經過不斷的努力，把運動幾何學的範圍推廣，由平面到空間，將所證明的一切基本定理應用於

曲線和曲面的研究。這種研究在 1900 年左右已經達到了很大的發展，其材料之豐富有不得不釐為專書之勢。運動幾何學之名稱亦就由此而起。

以上所述創立運動幾何學的理由，也就是我們編纂本書的動機。本書只是一個運動幾何學的概論；還有許多應包括在運動幾何學內的問題，均未提出討論。我們的目的是在供給讀者關於運動學中未能盡詳的問題的一些補充資料，藉以證明在運動學中所得的許多結論，究其實，無非是幾何學的定理。本書第三章對於平面運動軌道作些補充並對‘複旋運動’加以研究。第五章對於空間的運動作些補充並對於直紋螺旋面加以研究。整個運動幾何學，尤其是第三章和第五章所討論的部分，在機構學上有很重要的應用。這種應用，如有機會，將另作補充。讀者，如只在了解運動學所必需的基本概念，第三和第五兩章可以撇開不讀。

本書的前身為著者於 1952 年在前華北大學工學院的講演稿。在副院長曾毅推動下寫出，以供同學參考；爰略加整理寫成此冊。果於讀者稍有幫助，庶曾副院長的熱心贊助不致落空，而著者的希望亦就算達到了。讀者如不吝批評，著者尤為感激。

北京 1954 年春

第一章

點的位移與連續運動

(1, 1) 概論

運動幾何學是以研究形體運動的幾何特性為目的的。而所謂運動，我們知道，都是相對的；任何運動必須指出對何參考系而言才有一定的意義：譬如平面運動常以與某一平面聯繫不變的正交坐標系為參考系；而空間的運動，則以所選取的某一正交坐標系為參考系。對於參考系位置不變之點，我們約定稱為定點。對於參考系位置不變的形體，我們約定稱為靜止的形體。任何運動形體都可以看作是由一系列的運動點所組成；所以從單獨一個點的運動說起是很自然的，因為點可以看作是最簡單的形體。

(1, 2) 點在平面內的位置之確定法

在平面幾何學裏，一個點的位置總可以兩線相交處確定的。譬如對於平面的坐標軸 Ox, Oy M 點的位置即可用分別與兩軸平行而與之有給出的距離 y 和 x 的兩直線的相交處確定之（圖 1, 1a）。

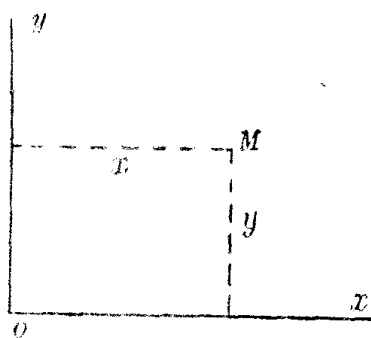


圖 1, 1a

M 點的位置亦可以用另外兩線相交處確定之：一為直線 Δ ，與平面內的定軸 Ox 成一給出的角度 θ ；一為以 O 點為中心，以給出的線