

数学思维与方法

SHUXUE SIWEI YU FANGFA

——研究式教学

陈鼎兴 著

数学思维与方法

SHUXUE SIWEI YU FANGFA

东南大学出版社

数学思维与方法

——研究式教学

陈鼎兴 著

东南大学出版社
·南京·

内 容 提 要

本书是一本研讨教与学两方面的书。通过丰富和详实的例子,力图阐明知识的发现过程和常用的科学思想方法。本书所需的基础知识不超过工科大学一年级的数学知识,即使只有高中数学知识的读者也可以阅读本书一半的内容。本书是正在大中学辛勤耕耘的老师,尤其是年青教员的益友;也是在大中学刻苦攻读的莘莘学子的良朋。

图书在版编目(CIP)数据

数学思维与方法/陈鼎兴著. —南京:东南大学出版社,2001.10

ISBN 7-81050-835-0

I. 数… II. 陈… III. ①数学-思维方法 ②数学方法-方法论 IV. 01-0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 071116 号

东南大学出版社出版发行

(南京四牌楼 2 号 邮编 210096)

江苏省新华书店经销 华东有色地研所印刷厂印刷

开本 850mm×1168mm 1/32 印张 8.75 字数 211 千字

2001 年 10 月第 1 版 2003 年 2 月第 2 次印刷

定价:15.00 元

前 言

本书是讲教学的。更确切地说,本书依托高等数学的教学舞台,探讨知识的研究和发现的过程和方法。全书洋溢着浓郁的研究气氛。

“教学”的本义包含教与学两个方面。但不知从何时开始,“教学”仿佛只意味着教书。这也许因为传统的教学太偏重于知识的传授,学生只是知识的被动接受者,从而,窒息了他们在教学中的主动性和积极性。本书力图恢复“教学”的本义。不知道学生想学什么的教学,一定不是一种好的教学。

本书共分5章。前3章侧重于“教”。以工科院校本科高等数学教学为载体,阐述了我所倡导的一种教学风格,或说教学方法——研究式教学。第1章是概述:简要阐述了研究式教学的内涵。第2章是实例:通过高等数学4堂课的实例,展现研究式教学的全貌。第3章是实施要点:总结了研究式教学的实施过程中的八大要点。后2章侧重于“学”,介绍了在教学和研究中常用的一些科学思想方法。第4章是方法:通过大量详实的例子,阐述了各种常用的科学思想方法(包括常用的数学方法)。第5章是实践:借助于一个例子“求内接于椭圆的周长最大的三角形”,展现了研究问题的一个全过程及各种科学思想方法的综合应用。

本书的宗旨是阐明知识的研究和发现过程以及有关的科学思想方法。因此,在选材和举例上力求通俗,贴近教学、贴近学生、贴近实际。所以,只要具备大学一年级的数学知识就可以通读全书。即使只有高中数学知识,也可以读懂其中的一半内容。本书的题材局限于高等数学教学的小天地,所以,阐述的数学思维的深度和广度都是极其有限的。然而,在本书中无论是评教还是论学,都力图展示发现知识的数学思维过程和数学方法的升华,因此,作者用

《数学思维与方法》作为书名,有不当之处敬请读者批评指正。然而,作者认为:就培养创新性人才而言,其理应该是相通的。作者的最大心愿是能给阅读本书的每一位读者在创新精神和科学思想方法方面有一些启迪。

在本书的写作过程中得到了许多领导和同志的支持、鼓励和帮助。解放军理工大学训练部长薛通同志、解放军理工大学通信工程学院副院长王金龙同志、解放军理工大学理学院院长张亚非同志给了极大的关切和支持;我的同事岳振军博士、张学仁副教授给了热情的鼓励和切实的帮助;特别是许群同志,不辞劳苦,不分昼夜,帮我将书稿输入电脑。在这里向他们表示最诚挚的谢意!

本书承北京大学数学科学学院张顺燕教授和东南大学应用数学系管平教授的精心审阅,提出了许多宝贵意见并多处修改了原稿中的疏漏和错误。在此,向张教授和管教授致以深深的敬意和由衷的感谢!

陈鼎兴

2001.1.31

目 录

1 研究式教学概述	(1)
2 研究式教学的实例	(10)
2.1 实例1 绪论	(10)
2.2 实例2 导数与微分的概念	(33)
2.3 实例3 微分中值定理	(57)
2.4 实例4 幂级数	(77)
3 研究式教学的实施要点	(102)
3.1 点题	(103)
3.2 统观全局	(104)
3.3 科学的洞察力:猜测	(109)
3.4 科学的敏感性	(114)
3.5 提高教学起点	(116)
3.6 实际性	(120)
3.7 趣味性	(126)
3.8 哲理性	(133)
4 浅谈科学思想方法	(138)
4.1 一切研究从最简状态开始	(138)
4.2 一个重要的思维模型:一般 $\Rightarrow$ 特殊	(146)
4.3 必要条件法	(157)
4.4 发散性思维	(169)
4.5 本质论	(180)
4.6 RMI 方法	(190)
4.7 MM 方法	(199)
4.8 常用的数学方法	(210)
4.8.1 转换	(210)

4.8.2	化归	(213)
4.8.3	逼近	(217)
4.8.4	合情推理	(225)
4.8.5	对偶	(233)
4.8.6	数学的美	(237)
5	一次亲身的实践	(247)
	参考书目	(267)

1 研究式教学概述

在当前教育界有一个中心议题:如何在教育中培养具有创新精神和创新能力的一代新人,造就一批站在世界科学技术前沿的学术带头人和尖子人才。

人才的培养是一个长期的系统工程,需要一代又一代人的不懈努力,可谓“十年树木,百年树人”。培养创新型人才应该贯彻到教育的全过程,无论是初、中等教育,还是高等教育;也无论是基础教育,还是专业教育都概莫能外。只有在全社会造成一种氛围,造成一种土壤,才能使拔尖的创新人才脱颖而出。当然,在高等教育中,培养创新型人才显得格外瞩目,因为,高等学府本来就肩负着培养高层次、高素质人才的使命。而在高等学府中求学的青年学子,恰同学少年,风华正茂,他们正处于最具活力、最有热情、最少保守思想的黄金时期,也是他们的世界观逐渐形成和逐渐走向成熟的重要时期。

众所周知,每门学科都有它特定的研究范畴和研究对象,在教学上形成了该学科的知识点,这是全部教学活动的载体。没有知识点的教学是不存在的,而且,一个人的创新能力往往与他所掌握的知识量密切相关。Engels(恩格斯,1820—1895年)曾在《自然辩证法》一书中写道:“那时差不多没有一个著名人物不曾做过长途旅行,不会说四五种语言,不在许多部门放射光芒。”因此,有人认为:在传授知识的同时,也就在增长能力、也就在提高人的素质。这当然是有道理的。因为,知识与能力、素质具有同一性。但是,还应该看到另一面:知识与能力、素质具有对立性。单纯的知识传授式的教学,也就是“教师只要能将知识传授给学生,便是尽了教学之职责;学生只要能将知识记住,就算是学习的成功”。这样的教学模式即使在过去也受到许多著名的有识之士的非议和批评。比如 20 世纪最杰出的物理学家, Nobel 物理学奖获得者 Einstein

(爱因斯坦,1879—1955年)就批评道:“知识是死的,学校却要为学生服务。”他在《自述》中写道:“人们为了考试,不论愿意与否,都得把所有这些废物统统塞进自己的脑袋。这样强制的结果使我如此畏缩不前,以致我在通过最后的考试以后,整整一年对科学问题的任何思考都感到扫兴。”更何况到了今天的信息时代,知识的爆炸、知识更新的加速等都是不争的事实。那种单纯的知识传授式的传统教学方法,学生称之为“照本宣科”,越来越不受学生欢迎。更为甚者,这样的教学必然挫伤学生学习的积极性,使得学生的学习兴趣普遍下降。学生为考试而学,老师为考试而教,形成了各种形式的应试教育。正所谓:考,考,考,老师的法宝;分,分,分,学生的命根。这是值得每个教育工作者和教育管理工作深思的严峻现实。

那么,学生究竟要学什么?他们的学习兴趣在哪里?为此,我广泛地调查和征询学生意见。除去他们渴望要求拓宽知识面外,还有如下3条意见:

1) 为什么要学这些知识?

2) 学了这些知识后有什么用处?

3) 如果遇到问题后,老师,您是怎么想的?

这些问题实质上反映了学生不满足于“是什么”的知识型的学习,而要探究“为什么”的能力型学习。要讲明白“是什么”并不困难,教材也写得一清二楚。要讲清“为什么”却不是这么容易的。其中第3个问题尤其值得我们深思。提出这个问题的学生常常是一些比较优秀的,甚至是略微调皮的学生(比如参加数学建模集训的学生)。这个学生群体是值得我们在教学中格外关注的。他们的学习态度比较积极,思想比较活跃,又比较富有独立进取心。他们渴望从老师那里学到思维,学到方法,学到能力。用一句话来讲,他们希望看到“老师的风采”。这个群体具有较大的发展潜力和发展空间。

改革传统的单纯知识传授型的教学模式,是当前教学改革

一个重要方向。强调素质教育,提倡创新精神就是一个关键。然而,目前素质教育的主要思路还是增加选修课、开辟第二课堂、组织课外兴趣小组等等。而作为当前教育主战场的第一课堂的教学如何贯彻素质教育的宗旨呢?从总体上讲,理论的探讨多于实际的操作。因此,绝大多数的第一课堂的教学仍然在传统的知识传授型的模式中运行,不免使人感到素质教育有脱离教学主战场之嫌。甚至,有人认为现在的教学有滑坡的趋势。由此可见,习惯势力是非常顽固的,课堂教学,即教学方法的改革是很困难的,甚至可以说:教学方法的改革是当前教学改革攻坚战。

我在教学岗位上已有 30 余年,从事高校数学教学亦已有 20 个年头。在长期的教学实践中,逐渐形成了我特有的教学风格,或说教学方法,我称之为研究式教学。我的研究式教学有它独特的内涵:将所讲授的知识点当作一个研究课题,在教学中着重讲授以下 2 件事:

- 1) 发现该知识的原始过程;
- 2) 发现该知识时所用的科学思想方法。

这个教学法仍然以老师的讲授为主体(更适合于低年级学生)。但讲授的内容已经发生了实质性变化:从单纯的知识传授改变成熔知识、能力、素质于一炉,仿佛引导学生参加了研究和发现的全过程。

下面,我来分别加以阐述。

每个人的自身都蕴藏有创新的潜能。因为,创造新事物的能动作用是人的基本特性之一,也是人与动物的基本区别之一。培养学生创新精神,实际上就是在传授知识的同时,努力激活这种创新的潜能、激发他们的创新欲望、增长他们的创新能力、燃起他们的创新激情。

创新能力的提高是需要学习的。那么,谁是他们最好的老师呢?我认为:古今中外的千百位科学大师才是他们最好的老师。在人类的文化遗产的宝库中,最为弥足珍贵的就是这些科学大师

们的足迹——他们创造和发现知识的过程。这是极富创造性和启发性的,是人类文化宝库中的极品。请看微积分的创立过程吧!

在古代,Aristotle(亚里斯多德,公元前384年—公元前322年)学派认为:宇宙是上帝创造的,地球是宇宙的中心,静止是最自然的状态,一切物体都有趋于中心及归于自然的趋向。所以,成熟的苹果会从树枝上落到地面,这是趋于中心;而一切运动如果“不受力”的作用,终究会停下来,这是归于静止(自然状态)。这个宇宙观统治了人们长达两千多年。天才的物理学家Newton(牛顿1642—1727年)在前人研究的基础上,向这个旧宇宙观发起了总攻击。虽然一切实验都表明:运动物体在“不受力”的作用下,都归于静止。但是,人们也观察到:同一运动物体在光滑表面上比在粗糙表面上运动的距离要远得多。由此可见,运动物体归于静止,并不是因为“上帝害怕运动,静止是最自然的状态。”等等原因,而是因为运动物体表面间的作用,也即我们现在称为“摩擦力”的缘故。这个自然现象在当时已经被许多人所发现和讨论,然而,Newton拔高一筹。他展开了他的思维实验:如果一个运动物体在一个阻力愈来愈小的环境中运动,它必然愈走愈远。而一旦完全没有了阻力,那么,它必然保持原有的运动状态一直运动下去。这就是著名的Newton第一运动定律:

任何一个物体都保持静止的或匀速直线运动的状态,
除非物体受力的作用被迫改变这种状态。

——Newton

进一步,物体运动的速度不是由力产生的,然而阻力确实可以使运动静止下来。由此事实,Newton敏锐地发现了第二运动定律:

$$F = ma$$

即力产生了加速度(速度的改变)。

至此,Newton已经有了伟大的发现。但是,才华横溢的Newton

并没有停止前进的步伐。怎样来证实自己的发现呢？Newton 将他深邃的目光投向了浩瀚的星空。他坚信星际的运动也必遵循他的运动定律。为了寻觅星际的作用力 F ，他发现了万有引力定律；为了阐明变速曲线运动的加速度 a ，他创立了微积分。Newton 借助于微积分的新数学工具，更准确、更深刻地揭示了天体运动的规律。同时，也证明了 Newton 的运动定律与万有引力定律的正确性；以及证明了被封建教会迫害长达两百年的 Copernicus(哥白尼，1473—1543 年)的日心说的正确性。这是微积分的巨大成功。

Newton 成为千古传颂的伟人。

多么精彩的发现过程！它充满激情和哲理，给人以无限的想像空间和启迪。但是，在传统的教学中，常常只把科学大师们所创造的成果，即知识，传授给了学生，而他们创造和发现知识的过程却被湮没了。这是非常遗憾的，也是一种不完全的教学。因此，研究式教学主张追踪科学大师们的足迹，遵循他们的思维脉络，发掘他们发现知识的原始过程，并且在今天的水准上展现出来（注意：不是简单重复，也不是讲述科学发展史）。这样的教学具有示范和潜移默化的作用，对于激发学生的创新热情和提高学生的创新能力有十分重要的影响，甚至会影响人的一生。

研究和创新是需要掌握一定的科学思想方法的。历史表明：科学上的重大发现和理论上的重大飞跃，往往伴随着科学思想方法上的重大突破。然而，在传统的教学中，太侧重于知识的传授，而常常忽视了科学思想方法上的提高和升华，这又是一种不完全的教学，正所谓：丢了西瓜，拣了芝麻。下面我们来举两个简单的例子。

例 1 计算 $X = 3.14 \times 2.58$ 。

解 两边取对数

$$\lg X = \lg 3.14 + \lg 2.58 \xrightarrow{\text{查对数表}} 0.4969 + 0.4116 = 0.9085;$$

查反对数表： $X = 8.1003$ 。

这是中学数学教学中,利用对数进行计算的例题。现在有了袖珍计算器,只须轻轻一按,结果就跃然眼前。无论速度与精度都大大提高。对数表、计算尺等工具已经成为了历史的文物。然而,它所蕴含的数学思想方法却永远熠熠生辉。它就是著名的“关系—映射—反演”方法(简称 RMI 方法),它的示意框图如图 1 所示:

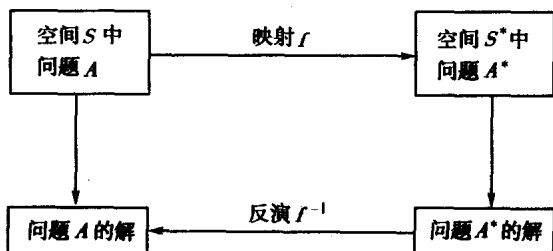


图 1 RMI 方法

这个方法在众多的领域里有广泛的应用,如微分方程中的 Laplace(拉普拉斯,1749—1827 年)变换,离散数学中的母函数等等。由于电子计算机的迅猛发展,今天我们步入了数字化时代,按其本质来讲,数字化也是“关系—映射—反演”。如电子计算机的 ASCII 码就是字符与整数之间的一个“关系—映射—反演”的例子。

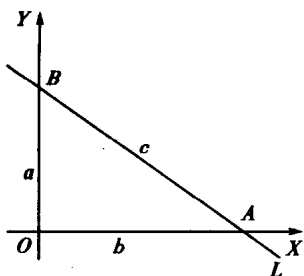
在传统的教学中,只讲知识(如何用对数进行计算),而缺乏高层次的科学思想方法上的升华。这不能不认为是一种缺憾。这种科学思想方法上的熏陶应该在中小学教学中就应该开始。如以上的对数教学就是一个很好的例子。

例 2 设 a, b, c 是两两互相垂直的(非零)矢量,则

$$|(b-a) \times (c-a)|^2 = |a \times b|^2 + |b \times c|^2 + |c \times a|^2 \quad (1)$$

这是一道矢量代数的练习题。它的证明并不困难。这里就省略了。请读者自行补出。

这道题目似乎平平淡淡,毫不起眼。它也有什么深刻含义吗?如果你看了以下的类比(见图 2),也许会别有一番滋味在心头。

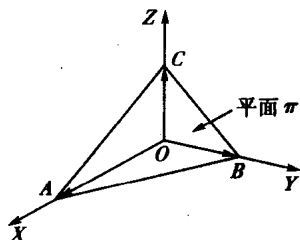


在平面直角坐标系 XOY 中，
直线 L 在 2 条坐标轴之间得 3 个
截距：

$$a, b, c$$

则有

$$c^2 = a^2 + b^2$$



在空间直角坐标系 $O-XYZ$ 中，
平面 π 在 3 个坐标面之间得到 4 个“截
距”：

$$\triangle OAB, \triangle OBC, \triangle OCA, \triangle ABC$$

则有

$$S_{\triangle ABC}^2 = S_{\triangle OAB}^2 + S_{\triangle OBC}^2 + S_{\triangle OAC}^2 \quad (2)$$

图 2 三维空间的勾股定理

左边是大名鼎鼎的勾股定理。通过类比，式(2)就是勾股定理在三维空间的有趣推广。简直是画龙点睛之神笔。由这么一点，将这道普普通通的题点活了。它给人的启示，远远大于原题给人的启示。(如果我们要求学生将勾股定理推广到三维空间，有谁会想到这个结果呢?)更为重要的是：联想、类比及推广等等，这些科学思想方法的学习，正是学生学习研究和创新的开始；也是学习研究和创新的必由之路。

知识与科学思想方法可以比喻成“鱼和渔”。古人云：“授之以鱼，不如授之以渔。”这句至理名言道出了科学思想方法的重要性。日本的数学教育家米山圆藏说：“我搞了多年的数学教育，发现：学生在初中，高中等接受的数学知识因毕业进入社会后几乎没有什么机会应用这种作为知识的数学，所以通常是出校门后不到一两年，很快就忘掉了。然而，不管他们从事什么业务工作，惟有深深

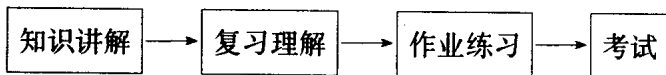
地铭刻于头脑中的数学精神,数学的思维方法、研究方法、推理方法和着眼点等(若培养了这方面的素质的话),却随时随地发生作用,使他们受益终生。”所以,他认为:“无论是对于科学工作者,技术人员,还是数学工作者,最重要的就是数学的精神、思想和方法,而数学知识只是第二位的。”这一段话很值得我们深思。

在 1999 年我与新生的一次座谈会上有如下一段对话:

学生 中学老师曾教我们如下的学习方法:遇到问题先进行分类;然后联系并搜索有关知识;最后得到问题的解答。这个方法可行吗?

回答 电子计算机的功能是什么? 1. 存储信息;2. 按预定程序检索。你不就被造就成了一台计算机。通过上课输入知识;再通过大量的练习,测验及考试(摸底考、阶段考、模拟考、统考等)输入检索程序。那么,人的创新精神到哪里去了?

这段对话真实地反映了传统教学中的弊病。把知识当成教条,把知识的应用当成机械的模仿行为。有人把这样的教学归结为八个大字“死记硬背,勤学苦练。”在学生中,也常常自嘲为“考试机器”。长此以往,只能窒息了他们的创新精神和创新欲望。该到下决心的时候了,要把学生从



的狭小的圈子中解放出来。

以平面几何作图的教学为例,比较两种教学思路也许会有益的。一种思路是总结各种作图的方法和技巧,诸如:

奠基法 平移法 旋转法 翻折法

轨迹法 相似法 计算法 逆序法

等等。然后,辅以大量的练习,以期融会贯通。传统的教学就是这样一个思路,我少年时期就是这样学的,能做出这样的总结,已经是很敬业的老师与很优秀的学生们携手共创的业绩了。然而,这实在是“死记硬背,勤学苦练”的一个典范。由此培养的学生少了

一点独立性,少了一点创新精神,少了一点叱咤风云的气魄。

另一种思路,如 Descartes(笛卡尔,1596—1650 年),他不拘泥于个别问题的讨论,而是从一般的方法论出发,提出了如下 3 个发人深省的问题:

- 1) 尺规的功能是什么?
- 2) 几何作图的本质是什么?
- 3) 几何作图有解的充要条件是什么?

由此,从根本上解决了几何作图的问题。弹指间,将困扰人们长达两千年之久的几何作图古典三大难题给化解了,而且开创了解析几何学的新领域。Descartes 成了近代数学的创始人之一(请参阅 2.1 实例 1 绪论)。

凭心而论,这两种教学思路都是需要的。前者精雕细刻,仿佛生产一个工艺品;后者气势恢宏,往往开辟一个新天地。然而,传统的教学太钟情于第一种教学思路,而对于第二种教学思路却很少涉猎,这对于培养高层次的创造性人才是极不利的。

教育改革的关键在于思想观念的转变。整体的创新精神和大批创新人才的涌现是关系到国家和民族盛衰的大问题。倘如我们现在还掉以轻心,将会犯历史性的、不可逆转的错误。这应该成为我们思考教育问题的共同出发点。那种片面强调知识传授,推行保姆式教学,既背离了培养创新人才的大方向,也低估了学生中蕴藏的学习和创新意识的积极性。在这里我想再次强调:每个人(无论是所谓的“好学生”,还是“差学生”)的自身都蕴藏着创新的潜能,需要我们精心地培养和发掘。我多年的教学实践证明:学生欢迎这样的教学改革。因为他们从中学到了分析和研究问题的能力。

全国的教育工作者们:这是历史给了我们的使命,可谓“责无旁贷,任重道远”。

2 研究式教学的实例

研究式教学具体是怎样实施的?今选4堂课的教学实例来阐明它的实施过程。这4堂课选自工科大学本科一年级的主干课程高等数学的教学实践。所用的教材是同济大学数学教研室主编的《高等数学》(第4版)。

在教案中,用虚线框标示的内容是课堂上板书的内容,其中的数码标号是板书的时机。为了便于做成多媒体教学软件,我将板书的内容作了分屏处理。如果有多媒体教室,将会收到更好的效果。有关软件也可在网上运行,供学生自学和复习之用。

文中的评注栏是关于研究式教学的注释,供参考之用。

2.1 实例1 绪论

第1屏

● 同学们好!今天我们上《高等数学》的第一次课。●

● 绪 论

如果我们把学习一门课当作在科学的殿堂里的一次遨游,那么,〈绪论〉就是一个总导游。一次好的绪论课对该门课的学习有提纲挈领的作用。

● 高等数学的绪论课将从以下3个方面展开:

● 一、高等数学发展简史

● 我们将从数学发展史上来考察微积分的形成和历史地位。●

● 二、微积分的基本思想和方法

● 10 ●

评 注

点题:开门见山。

《高等数学》的教学全局观。