



中等專業學校教學用書

三角學教程

П. Я. 柯仁烏若夫著

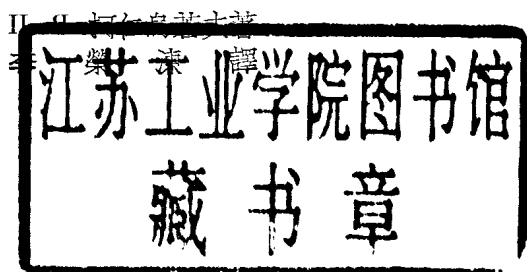
商務印書館



中等專業學校教學用書



三角學教程



商務印書館

本書係根據蘇聯國營技術理論書籍出版社 (ГОСТЕХИЗДАТ) 出版的柯仁烏若夫 (П. И. Кожуров) 新著“三角學教程” (Курс тригонометрии) 1952 年初版譯出的。原書經蘇聯高等教育部審定爲中等技術學校教科書。

三 角 學 教 程

李 榮 涑 譯

★ 版權所有 ★

商 務 印 書 館 出 版

上海河南中路二一一號

(上海市書刊出版業營業許可證出字第〇二五號)

新 華 書 店 總 經 售

商 務 印 書 館 印 刷 廠 印 刷

上海天通巷路一九〇號

(51273)

1953 年 7 月初版

1956 年 1 月 4 版

版面字數 237,000

印張 8 2/16

印數 311,001-371,000(3月第2次印)定價(7)¥0.73

序 言

本書適用於中等技術學校的一切專業。著者所特定的任務：在科學道理上給三角學以嚴密的、符合於中等技術學校數學教學大綱的敘述，以及選擇出不僅足供課堂作業而且還夠家庭作業之用的習題。

爲了滿足系統敘述的要求，不得不引入少量超出教學大綱範圍的材料；這一切材料以及例題和習題都是用小號字排印的。

在中等技術學校的數學教學大綱中，規定了先學習平面上的坐標法，但極大部分的中等技術學校還要學習高等數學的初步知識。這種情況在某種程度上決定了本書編寫的體系；但是定義和術語完全符合於通用的；很多定義和術語是選自初等三角學教程和高等數學教程的。在本書中廣泛地利用着平面上的坐標法，來下定義及當作研究的工具。

著者認爲將本書編寫成像普通中學用的那樣是不可能的；中等技術學校用的三角教科書，在數學科目的體系中應當成爲整個教學計劃的一個有機組成部分。

在書末有三角學的發展簡史，B. A. 蘇洛德可夫同志曾參加這一部分的編寫工作。

C. II. 諾沃謝洛夫同志在我編寫本書時曾給與我許多珍貴的意見和指教，在此謹對他的幫助表示我衷心的感謝。同時對於提供了若干寶貴意見的 P. A. 卡爾寧同志與 B. II. 米諾耳斯基同志也表示衷心的感謝。本書曾經 П. С. 莫金諾夫同志仔細校訂，著者特向他致以謝忱。

II. Я. 柯仁烏諾夫

目 錄

序言

第一章 銳角的三角函數·直角三角形的解法.....1

§ 1. 定義	1
§ 2. 根據已知三角函數作出銳角的方法	3
§ 3. 同一銳角的各三角函數間的關係	6
§ 4. 根據銳角的一個三角函數計算此角的其他三角函數的方法	7
§ 5. 三角恆等式	10
§ 6. 30° , 45° 和 60° 各角的三角函數	11
§ 7. 餘角的三角函數	13
§ 8. 銳角三角函數的增大和減小	14
§ 9. 直角三角形中邊與角之間的關係和直角三角形解法的四種基本情形	17
§ 10. 三角函數表	18
§ 11. 解直角三角形的例	23
§ 12. 等腰三角形的解法	25
練習	27

第二章 角的概念的推廣·角的測量法..... 37

§ 13. 角的概念的推廣	37
§ 14. 角的弧度法	38
§ 15. 某些角的度與徑表示式之間的關係表	39
§ 16. 由角的度化為弧度和由弧度化為度的變換	40
§ 17. 圓周的弧長	42
§ 18. 問題	42
§ 19. 線速度和角速度	46
練習	48

第三章 三角函數概念的推廣·三角函數的週期性..... 51

§ 20. 任意角的三角函數	51
§ 21. 三角函數的週期性	63
§ 22. $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ 諸角的三角函數	65

§ 23. 三角函數的符號	69
§ 24. 三角函數的增大和減小	74
§ 25. 基本的恆等式	76
§ 26. 根據一個三角函數計算其餘各三角函數	78
練習	82
第四章 誘導公式·三角函數的圖形	87
§ 27. 負角的三角函數的誘導公式	87
§ 28. 角的形狀為 $90^\circ + \alpha$ 的三角函數的誘導公式	90
§ 29. 角的形狀為 $90^\circ - \alpha$, $180^\circ - \alpha$, $180^\circ + \alpha$, $270^\circ - \alpha$, $270^\circ + \alpha$, $360^\circ - \alpha$ 的三角函數的誘導公式	93
§ 30. 三角函數的圖形	101
練習	108
第五章 餘弦定理·加法定理·二倍角及半角的三角函數	112
§ 31. 餘弦定理	112
§ 32. 加法定理	113
§ 33. 二角的和及差的正切	117
§ 34. 二倍角的正弦、餘弦和正切	118
§ 35. 用半角的正切來表整角的各三角函數	121
§ 36. 半角的正弦、餘弦和正切	122
練習	127
第六章 變換三角函數的和與差為乘積	132
§ 37. 變換兩個正弦或餘弦的和與差為乘積	132
§ 38. 變換兩個正切或餘切的和與差為乘積	134
§ 39. 將表示式化為適於對數計算形式的例題	135
練習	138
第七章 反三角函數	142
§ 40. 定義	142
§ 41. 基本恆等式	147
§ 42. 關於反三角函數的例題	148
練習	150
第八章 三角方程式	153
§ 43. 最簡單的三角方程式	153

§ 44. 含一未知數的三角方程式的一般解法	163
§ 45. 解三角方程式的例子	163
練習	174
第九章 斜三角形各元素間的基本關係式及利用三角函數表	
求解斜三角形	180
§ 46. 正弦定理	180
§ 47. 根據三角形的二邊及其夾角求三角形的其他二角的公式	184
§ 48. 根據三角形的三邊求三角形諸角的公式	185
§ 49. 三角形的面積	186
§ 50. 平行四邊形的面積	188
§ 51. 根據一邊與二角解斜三角形	189
§ 52. 根據二邊及其中一邊的對角解斜三角形	190
§ 53. 根據二邊及其夾角解斜三角形	192
§ 54. 根據三邊解斜三角形	194
練習	195
第十章 三角函數對數表及其對解三角形的應用	200
§ 55. 三角函數對數表	200
§ 56. 四位數字表的精確度	201
§ 57. 利用對數表進行計算的例子	202
§ 58. 利用對數表解直角三角形的例子	203
§ 59. 利用對數表解斜三角形的例子	205
練習	209
第十一章 三角學在立體幾何學上的應用	215
§ 60. 應用三角學解立體幾何學上問題的例子	215
練習	227
三角學的發展簡史	240
三角公式及其他幾種便覽表	249

第一章 銳角的三角函數. 直角三角形的解法

§ 1. 定義

取任意的銳角 α (圖 1)。作一直角三角形, 使它的一個銳角等於 α 。在角的一邊上, 取不與角的頂點 A 重合的任意一點 B , 並從 B 點向另一邊作垂線 BC 。引入記號: $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$ 。

定義 1. 銳角 α 所對的直角邊 a 與斜邊 c 這二者的比值稱為銳角 α 的正弦:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}。$$

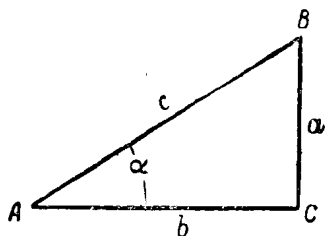


圖 1

定義 2. 和銳角 α 相鄰的直角邊 b 與斜邊 c 這二者的比值稱為銳角 α 的餘弦:

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}。$$

定義 3. 銳角 α 所對的直角邊 a 與此角相鄰的直角邊 b 這二者的比值稱為銳角 α 的正切:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}。$$

定義 4. 銳角 α 相鄰的直角邊 b 與此角所對的直角邊 a 這二者的比值稱為銳角 α 的餘切:

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}。$$

我們用例子來表明, 如何求任何一個角 (這裏係指任何銳角

——譯者),例如角 48° 的正弦、餘弦、正切和餘切的近似值。

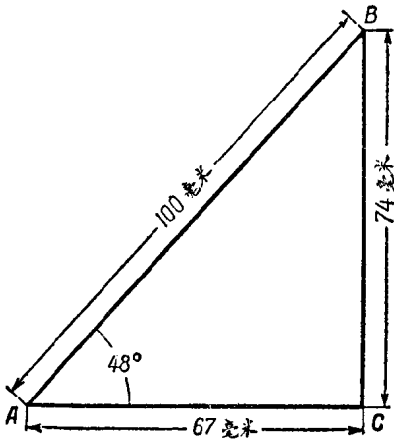


圖 2

利用直尺、圓規和量角器作出直角三角形 ABC , 這三角形中 $\angle BAC = 48^\circ$, 而斜邊 $AB = 100$ 毫米(圖2, 縮小 1.5 倍)。量直角邊 BC 和 AC 得: $BC \approx 74$ 毫米, 而 $AC \approx 67$ 毫米。則有:

$$\sin 48^\circ \approx \frac{74}{100} = 0.74;$$

$$\cos 48^\circ \approx \frac{67}{100} = 0.67;$$

$$\operatorname{tg} 48^\circ \approx \frac{74}{67} \approx 1.1;$$

$$\operatorname{ctg} 48^\circ \approx \frac{67}{74} \approx 0.90。$$

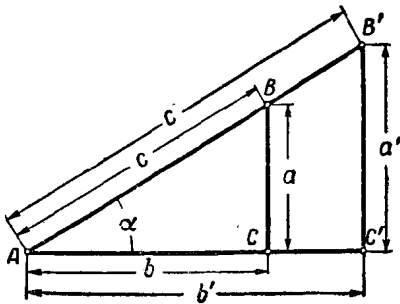


圖 3

用同樣的方法可求得任何銳角的正弦、餘弦、正切和餘切的值。

定理 1. 當已知 α 角時, 它的正弦、餘弦、正切和餘切的值即完全確定, 也就

是說, 這幾個值與作輔助直角三角形時對 B 點的選擇無關。

證明 研究有銳角 α 的任意兩個直角三角形 ABC 及 $AB'C'$ (圖 3)。這兩三角形相似, 所以

$$\frac{a}{c} = \frac{a'}{c'} = \sin \alpha,$$

$$\frac{b}{c} = \frac{b'}{c'} = \cos \alpha,$$

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \operatorname{tg} \alpha,$$

$$\frac{b}{a} = \frac{b'}{a'} = \operatorname{ctg} \alpha。$$

定理已被證明。

因此，對應於銳角 α 有完全確定的值 $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ 和 $\operatorname{ctg} \alpha$ 。所以 $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ 和 $\operatorname{ctg} \alpha$ 是角 α 的函數。這些函數叫做三角函數。

§ 2. 根據已知三角函數作出銳角的方法

從 $\sin \alpha$ 和 $\cos \alpha$ 的定義推得，銳角 α 的正弦和餘弦是小於 1 的正數：

$$0 < \sin \alpha < 1,$$

$$0 < \cos \alpha < 1,$$

式中 α 為銳角。

定理 1. 對於任何小於 1 的正數 y ，只能找得到一個銳角 α ，它的正弦等於 y 。

$$\sin \alpha = y。$$

證明 作出直角三角形 ABC (圖 4)，使它的一直角邊等於 y ，斜邊等於 1。於是

$$\sin \angle BAC = \sin \alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{y}{1} = y。$$

我們已經證明了，存在有這樣的一個銳角 $\angle BAC = \alpha$ ，它的正弦等於 y 。

我們將證明，正弦等於 y 的任何銳角 β 必等於銳角 α 。

事實上：設 β 為銳角，它的正弦等

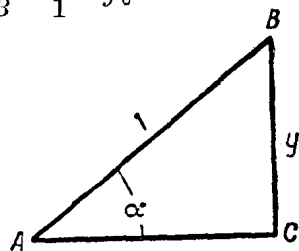


圖 4

於 y ；作出直角三角形 $A'B'C'$ ，它有銳角 $B'A'C' = \beta$ (圖 5)。於是

$$\frac{B'C'}{A'B'} = \sin \beta = y。$$

但 $\frac{BC}{AB} = y，$

所以 $\frac{B'C'}{A'B'} = \frac{BC}{AB}。$

因此，直角三角形 ABC 相似於直角三角形 $A'B'C'$ ，即是說 $\angle BAC = \angle B'A'C'$ ，也就是 $\alpha = \beta$ 。

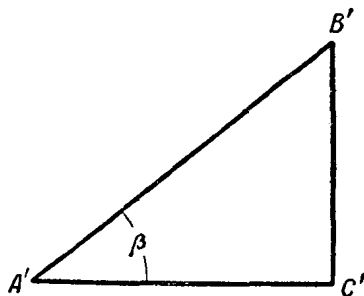


圖 5

我們已經證明了，僅存在有一個銳角，它的正弦等於 y 。

同樣，可證明下列定理。

定理 2. 對於任何小於 1 的正數 x ，只能找得到一個銳角 α ，它的餘弦等於 x ：

$$\cos \alpha = x。$$

定理 3. 對於任何的正數 p ，只能找得到一個銳角 α ，它的正切等於 p ：

$$\operatorname{tg} \alpha = p。$$

定理 4. 對於任何的正數 q ，只能找得到一個銳角 α ，它的餘切等於 q ：

$$\operatorname{ctg} \alpha = q。$$

我們用例子來說明，怎樣根據銳角的已知三角函數去作出銳角 α 的方法。

例 1. $\sin \alpha = \frac{3}{4}。$

在任意直線上取線段 $DE = 3$ (圖 6)。

過 E 點引直線 $EF \perp DE$ 。作出中心在 D 點，半徑為 4 的圓周。

令 K 為此圓周與直線 EF 的交點。則角 EKD 為所求的銳角 α ，因為它的正弦等

於 $\frac{DE}{DK} = \frac{3}{4}。$

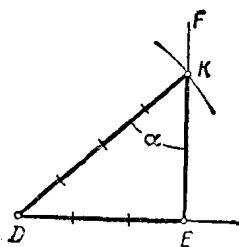


圖 6

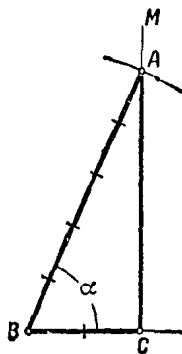


圖 7

例 2. $\cos \alpha = \frac{2}{5}$.

在任意直線上取線段 $BC=2$ (圖 7)。過 C 點引直線 $CM \perp BC$ 。作出中心在 B 點，半徑 $r=5$ 的圓周。令 A 為此圓周與直線 CM 的交點。則角 ABC 的餘弦等於 $\frac{BC}{BA} = \frac{2}{5}$ ；因之， $\angle ABC$ 是所求的銳角 α 。

例 3. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3}$ 。

在直角 MON (圖 8) 的一條邊上，例如在 OM 上，從頂點 O 取線段 $OA=3$ ，而在另一條邊上取線段 $OB=2$ 。連結 A 點和 B 點。角 OAB 的正切等於 $\frac{2}{3}$ ，因之， $\angle OAB = \alpha$ 。

例 4. $\operatorname{ctg} \alpha = 3$ 。

仿照前面的作圖法。在直角 LKM (圖 9) 的兩邊上取線段 KA 和 KC ，在這兩條

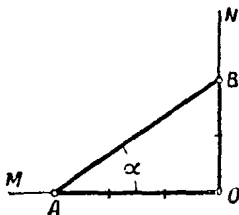


圖 8

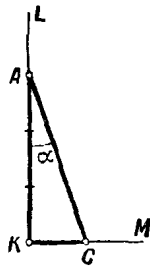


圖 9

線段之中，例如第一條 (KA) 為第二條 (KC) 的三倍。連結 A 點和 C 點。角 KAC 的餘切等於 3，因之， $\angle KAC = \alpha$ 。

§ 3. 同一銳角的各三角函數間的關係

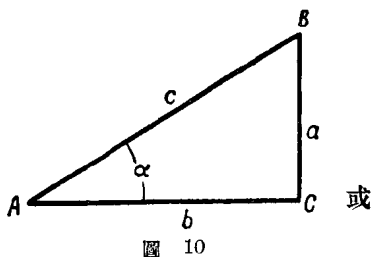
取任意的銳角 α 並作出直角三角形 ABC ，它的一個銳角等於 α (圖 10)。設 $BC=a$, $CA=b$ 和 $AB=c$ 。

根據畢達哥拉斯定理 $\ominus$ ，從直角三角形 ABC 得：

$$a^2 + b^2 = c^2。$$

用 c^2 去除這個等式的兩端，得：

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$$



$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \quad (1)$$

因為 $\frac{a}{c} = \sin \alpha$ 和 $\frac{b}{c} = \cos \alpha$ 。

我們再指出下列公式，這些公式也是從三角函數的定義推出：

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad (2)$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad (3)$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1。 \quad (4)$$

事實上，因為

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}, \quad \cos \alpha = \frac{b}{c},$$

則

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{a}{c} : \frac{b}{c} = \frac{a}{b} = \operatorname{tg} \alpha,$$

$$\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{b}{c} : \frac{a}{c} = \frac{b}{a} = \operatorname{ctg} \alpha,$$

$\ominus$ 譯者註：該定理為我國人所最先發現，因此應改為我國發現該定理之人的名字，有人主張改為「商高定理」，也有人主張改為「陳子定理」。(見中國數學雜誌 1 卷 1 期「商高定理呢？陳子定理呢？」及 1 卷 4 期「關於商高或陳子定理的討論」二文)。

其次：

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1.$$

§ 4. 根據銳角的一個三角函數計算此角的其他三角函數的方法

由前節的公式，可從一個三角函數的值求出其餘一切三角函數的值，現在用例子來表明應當如何去做。

例 1. 已給： $\sin \alpha = \frac{20}{29}$ 。計算銳角 α 的其他各三角函數值。

從公式 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ 有：

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha.$$

把 $\sin \alpha$ 的已知值 $\frac{20}{29}$ 代入，得：

$$\cos^2 \alpha = 1 - \left(\frac{20}{29}\right)^2 = \frac{29^2 - 20^2}{29^2} = \frac{49 \times 9}{29^2}.$$

於是 $\cos \alpha = \frac{21}{29}$ 。

要求 $\operatorname{tg} \alpha$ 可用公式

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

得：

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{20}{29} : \frac{21}{29} = \frac{20}{21}.$$

由此得

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{21}{20},$$

因為 $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$ 。

例 2. 已給： $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{45}{28}$ 。計算銳角 α 的其他各三角函數值。

把 $\operatorname{tg} \alpha$ 的值作為 $\operatorname{ctg} \alpha$ 的倒數記下來：

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{28}{45}.$$

根據公式 $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ 有： $\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{45}{28}$ 。將此等式的兩端平方，得：

$$\frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{45^2}{28^2}.$$

將上式的兩端各加 1：

$$1 + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = 1 + \frac{45^2}{28^2} \quad \text{或} \quad \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{28^2 + 45^2}{28^2}.$$

考慮到 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ (§ 3)，得：

$$\sin^2 \alpha = \frac{28^2}{2025+784}, \text{ 由此得 } \sin \alpha = \frac{28}{53}.$$

從公式 $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ 有 $\cos \alpha = \operatorname{ctg} \alpha \cdot \sin \alpha$.

應用上面的結果得：

$$\cos \alpha = \frac{45 \times 28}{28 \times 53} = \frac{45}{53}.$$

例 3. 若 $\cos \alpha = \frac{2}{7}$, 求銳角 α 的其他各三角函數值。

解 從公式 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ 有：

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{4}{49}} = \frac{3\sqrt{5}}{7},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{3\sqrt{5}}{2},$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{2}{3\sqrt{5}}.$$

例 4. 若 $\operatorname{tg} \alpha = \frac{p}{q}$, 求銳角 α 的其他各三角函數值。

用下法解這個例子最簡便。研究以 p 和 q 爲直角邊的直角三角形 (圖 11)。它的斜邊等於 $\sqrt{p^2 + q^2}$, 所以

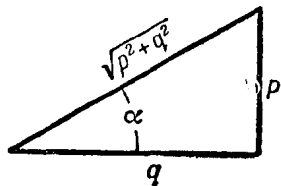


圖 11

根據值

$$\cos \alpha = \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2}},$$

$$\sin \alpha = \frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2}},$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{q}{p}.$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{p}{q}$$

用幾何的方法推出以下兩個三角函數值

$$\sin \alpha = \frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2}}, \quad \cos \alpha = \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2}}.$$

這個方法, 最好記住, 因為在應用中往往必須根據 $\operatorname{tg} \alpha$ 的值來求 $\sin \alpha$ 和 $\cos \alpha$ 的值。

例 5. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3}$ (圖 12)。有：

$$\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}; \quad \cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}.$$

也可根據 $\operatorname{ctg} \alpha$ 的值, 幾何地求出 $\sin \alpha$ 和 $\cos \alpha$ 的值, 這裏 α 是銳角。

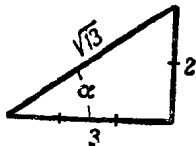


圖 12

例 6. $\operatorname{ctg} \alpha = 3$ (圖 13)。於是

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}; \quad \cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

作出一切計算的普遍形式，即是說，不使已給函數具有確定的值，可推出普遍公式。

例 7. 用 $\cos \alpha$ 表示銳角 α 的三角函數值。

從公式 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ 求得：

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}.$$

從公式

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

有：

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha},$$

隨之

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}.$$

例 8. 推出用 $\operatorname{tg} \alpha$ 表示銳角 α 的三角函數的式子。

從公式

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

有：

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \quad \text{和} \quad \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}.$$

在這些等式的兩端各加 1，得：

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha},$$

$$1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha},$$

因 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ ，則

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha},$$

$$\frac{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha},$$

由此得

$$\sin^2 \alpha = \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha},$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha},$$

因此

$$\sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}},$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}.$$

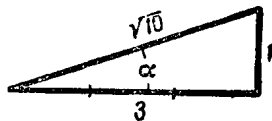


圖 13

最後

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}。$$

用 $\sin \alpha$ 和 $\operatorname{ctg} \alpha$ 表示銳角 α 的三角函數公式的推論，留待讀者。

茲寫出用 $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ 和 $\operatorname{ctg} \alpha$ 表示銳角三角函數的公式：

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}},$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha};$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha},$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}};$$

$$\sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}, \quad \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha};$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}}, \quad \cos \alpha = \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}。$$

注意 這些公式不須要記得。根據銳角的一個三角函數，計算此角的其他各個三角函數時，每一次都必須如上面所示各例子那樣進行，且利用基本公式：

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}; \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}; \quad \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1,$$

這些公式必須牢固地記熟。

§ 5. 三角恆等式

§ 3 中表示同一銳角的三角函數之間的關係式是三角恆等式的例子，無論角的大小如何它們都成立。要證明三角恆等式，可把恆等式的左端改變成右端，或把右端改變成左端，或把恆等式的每一端都改變成同一的式子。