中等專業學校教學用書

三角學教程

П. Я. 柯仁烏若夫著

商務印書館

中等專業學校教學用書

三　角　學　教　程

Н. Я. 柯仁烏茲夫著
李　榮　涑　譯

商　務　印　書　館

本書係根據蘇聯國營技術理論書籍出版社（ГОСТЕХИЗДАТ）出版的柯仁烏若夫（П. Я. Кожеуров）新著"三角學教程"（Курс тригонометрии）1952年初版譯出的。原書經蘇聯高等教育部審定爲中等技術學校教科書。

三　角　學　教　程

李　棨　涑　譯

商　務　印　書　館　出　版

上海河南中路二一一號

（上海市書刊出版業營業許可證出字第〇二五號）

新　華　書　店　總　經　售

商務印書館印刷廠印刷

上海天通菴路一九〇號

(51273)

1953年7月初版　　1956年1月4版

版面字數 237,000　　印張 8 2/16

印數 311,001–371,000(3月第2次印)定價(7)￥0.73

序　言

本書適用於中等技術學校的一切專業。著者所持定的任務：在科學道理上給三角學以嚴密的、符合於中等技術學校數學教學大綱的敍述，以及選擇出不僅足供課堂作業而且還夠家庭作業之用的習題。

爲了滿足系統敍述的要求，不得不引入少量超出教學大綱範圍的材料；這一切材料以及例題和習題都是用小號字排印的。

在中等技術學校的數學教學大綱中，規定了先學習平面上的坐標法，但極大部分的中等技術學校還要學習高等數學的初步知識。這種情況在某種程度上決定了本書編寫的體系；但是定義和術語完全符合於通用的；很多定義和術語是選自初等三角學教程和高等數學教程的。在本書中廣泛地利用着平面上的坐標法，來下定義及當作研究的工具。

著者認爲將本書編寫成像普通中學用的那樣是不可能的；中等技術學校用的三角教科書，在數學科目的體系中應當成爲整個教學計劃的一個有機組成部分。

在書末有三角學的發展簡史，B. A. 蘇洛德可夫同志曾參加這一部分的編寫工作。

C. П. 諾沃謝洛夫同志在我編寫本書時曾給與我許多珍貴的意見和指教，在此謹對他的幫助表示我衷心的感謝。同時對於提供了若干寶貴意見的 P. A. 卡爾寧同志與 B. П. 米諾耳斯基同志也表示衷心的感謝。本書曾經 Г. C. 莫金諾夫同志仔細校訂，著者特向他致以謝忱。

П. Я. 柯仁烏諾夫

目　　錄

第一章　銳角的三角函數.直角三角形的解法

§1. 定義

取任意的銳角 α (圖 1)。作一直角三角形,使它的一個銳角等於 α。在角的一邊上,取不與角的頂點 A 重合的任意一點 B,並從 B 點向另一邊作垂線 BC。引入記號: $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$。

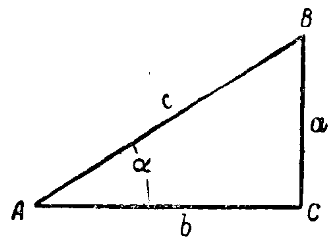

圖 1

定義 1. 銳角 α 所對的直角邊 a 與斜邊 c 這二者的比值稱爲銳角 α 的正弦:

$$\sin\alpha=\frac{a}{c}。$$

定義 2. 和銳角 α 相鄰的直角邊 b 與斜邊 c 這二者的比值稱爲銳角 α 的餘弦:

$$\cos\alpha=\frac{b}{c}。$$

定義 3. 銳角 α 所對的直角邊 a 與此角相鄰的直角邊 b 這二者的比值稱爲銳角 α 的正切:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{a}{b}。$$

定義 4. 銳角 α 相鄰的直角邊 b 與此角所對的直角邊 a 這二者的比值稱爲銳角 α 的餘切:

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{b}{a}。$$

我們用例子來表明,如何求任何一個角 (這裏係指任何銳角

——譯者),例如角 48° 的正弦、餘弦、正切和餘切的近似值。

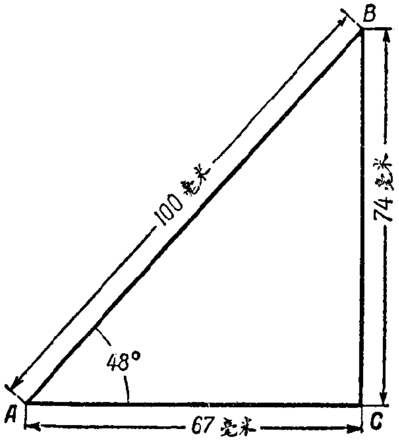

圖 2

利用直尺、圓規和量角器作出直角三角形 ABC,這三角形中 $\angle BAC=48°$, 而斜邊 $AB=100$ 毫米(圖2,縮小 1.5 倍)。量直角邊 BC 和 AC 得: $BC\approx 74$ 毫米,而 $AC\approx 67$ 毫米。則有:

$$\sin 48° \approx \frac{74}{100}=0.74;$$

$$\cos 48° \approx \frac{67}{100}=0.67;$$

$$\operatorname{tg} 48° \approx \frac{74}{67}\approx 1.1;$$

$$\operatorname{ctg} 48° \approx \frac{67}{74}\approx 0.90。$$

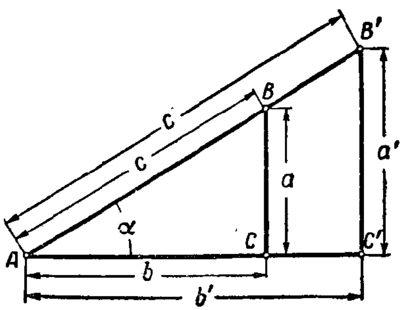

圖 3

用同樣的方法可求得任何銳角的正弦、餘弦、正切和餘切的值。

定理 1. 當已知 α 角時,它的正弦、餘弦、正切和餘切的值即完全確定,也就是說,這幾個值與作輔助直角三角形時對 B 點的選擇無關。

證明 研究有銳角 α 的任意兩個直角三角形 ABC 及 $AB'C'$ (圖 3)。這兩三角形相似,所以

$$\frac{a}{c}=\frac{a'}{c'}=\sin\alpha,$$

$$\frac{b}{c}=\frac{b'}{c'}=\cos\alpha,$$

$$\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}=\operatorname{tg}\alpha,$$

$$\frac{b}{a}=\frac{b'}{a'}=\operatorname{ctg}\alpha。$$

定理已被證明。

因此，對應於銳角 α 有完全確定的值 $\sin\alpha$，$\cos\alpha$，$\operatorname{tg}\alpha$ 和 $\operatorname{ctg}\alpha$。所以 $\sin\alpha$，$\cos\alpha$，$\operatorname{tg}\alpha$ 和 $\operatorname{ctg}\alpha$ 是角 α 的函數。這些函數叫做三角函數。

§2. 根據已知三角函數作出銳角的方法

從 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$ 的定義推得，銳角 α 的正弦和餘弦是小於1的正數：

$$0<\sin\alpha<1,$$

$$0<\cos\alpha<1,$$

式中 α 爲銳角。

定理1. 對於任何小於1的正數 y，只能找得到一個銳角 α，它的正弦等於 y。

$$\sin\alpha=y。$$

證明 作出直角三角形 ABC（圖4），使它的一直角邊等於 y，斜邊等於1。於是

$$\sin\angle BAC=\sin\alpha=\frac{BC}{AB}=\frac{y}{1}=y。$$

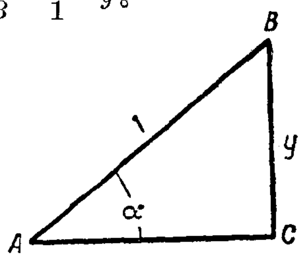

圖 4

我們已經證明了，存在有這樣的一個銳角 $\angle BAC=\alpha$，它的正弦等於 y。

我們將證明，正弦等於 y 的任何銳角 β 必等於銳角 α。

事實上：設 β 爲銳角，它的正弦等

於 y；作出直角三角形 $A'B'C'$，它有銳角 $B'A'C'=\beta$(圖 5)。於是

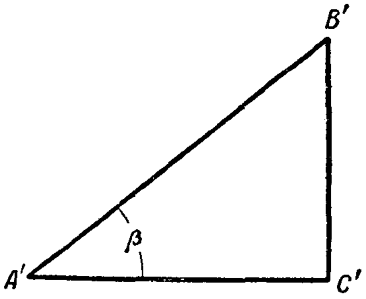

圖　5

$$\frac{B'C'}{A'B'}=\sin\beta=y。$$

但　$$\frac{BC}{AB}=y,$$

所以　$$\frac{B'C'}{A'B'}=\frac{BC}{AB}。$$

因此，直角三角形 ABC 相似於直角三角形 $A'B'C'$，卽是說 $\angle BAC==\angle B'A'C'$，也就是 $\alpha=\beta$。

我們已經證明了，僅存在有一個銳角，它的正弦等於 y。

同樣，可證明下列定理。

定理 2. 對於任何小於 1 的正數 x，只能找得到一個銳角 α，它的餘弦等於 x：

$$\cos\alpha=x。$$

定理 3. 對於任何的正數 p，只能找得到一個銳角 α，它的正切等於 p：

$$\operatorname{tg}\alpha=p。$$

定理 4. 對於任何的正數 q，只能找得到一個銳角 α，它的餘切等於 q：

$$\operatorname{ctg}\alpha=q。$$

我們用例子來說明，怎樣根據銳角的已知三角函數去作出銳角 α 的方法。

例 1. $\sin\alpha=\frac{3}{4}$。

在任意直線上取線段 $DE=3$ (圖 6)。

過 E 點引直線 $EF\perp DE$。作出中心在 D 點，半徑爲 4 的圓周。

令 K 爲此圓周與直線 EF 的交點。則角 EKD 爲所求的銳角 α，因爲它的正弦等於 $\frac{DE}{DK}=\frac{3}{4}$。

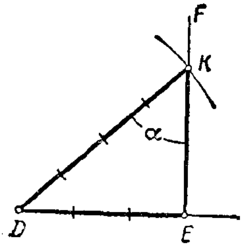

圖 6

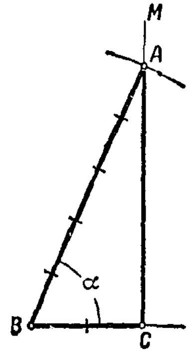

圖 7

例 2. $\cos\alpha=\frac{2}{5}$。

在任意直線上取線段 $BC=2$(圖 7)。過 C 點引直線 $CM\perp BC$。作出中心在 B 點，半徑 $r=5$ 的圓周。令 A 爲此圓周與直線 CM 的交點。則角 ABC 的餘弦等於 $\frac{BC}{BA}=$ $=\frac{2}{5}$；因之，$\angle ABC$ 是所求的銳角 α。

例 3. $\operatorname{tg}\alpha=\frac{2}{3}$。

在直角 MON (圖 8) 的一條邊上，例如在 OM 上，從頂點 O 取線段 $OA=3$，而在另一條邊上取線段 $OB=2$。連結 A 點和 B 點。角 OAB 的正切等於 $\frac{2}{3}$，因之，$\angle OAB=\alpha$。

例 4. $\operatorname{ctg}\alpha=3$。

仿照前面的作圖法。在直角 LKM (圖 9)的兩邊上取線段 KA 和 KC，在這兩條

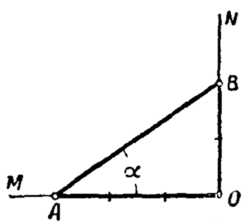

圖 8

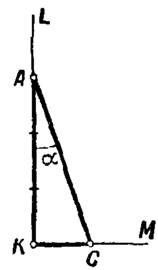

圖 9

線段之中，例如第一條(KA)爲第二條 (KC) 的三倍。連結 A 點和 C 點。角 KAC 的餘切等於 3，因之，$\angle KAC=\alpha$。

§ 3. 同一銳角的各三角函數間的關係

取任意的銳角 α 並作出直角三角形 ABC，它的一個銳角等於 α（圖 10）。設 $BC=a$, $CA=b$ 和 $AB=c$。

根據畢達哥拉斯定理 ⊖，從直角三角形 ABC 得：

$$a^2+b^2=c^2。$$

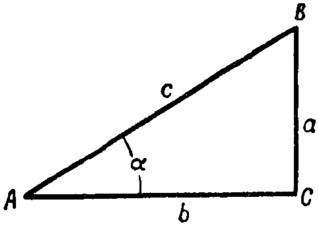

圖 10

用 c^2 去除這個等式的兩端，得：

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2=1$$

或

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1, \qquad (1)$$

因為 $\frac{a}{c}=\sin\alpha$ 和 $\frac{b}{c}=\cos\alpha$。

我們再指出下列公式，這些公式也是從三角函數的定義推出：

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \qquad (2)$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \qquad (3)$$

$$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1。 \qquad (4)$$

事實上，因為

$$\sin\alpha=\frac{a}{c}, \quad \cos\alpha=\frac{b}{c},$$

則

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{a}{c}:\frac{b}{c}=\frac{a}{b}=\operatorname{tg}\alpha,$$

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{b}{c}:\frac{a}{c}=\frac{b}{a}=\operatorname{ctg}\alpha,$$

⊖ 譯者註：該定理為我國人所最先發現，因此應改為我國發現該定理之人的名字，有人主張改為「商高定理」，也有人主張改為「陳子定理」。（見中國數學雜誌 1 卷 1 期「商高定理呢？陳子定理呢？」及 1 卷 4 期「關於商高或陳子定理的討論」二文）。

其次：
$$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=1。$$

§4. 根據銳角的一個三角函數計算此角的其他三角函數的方法

由前節的公式，可從一個三角函數的值求出其餘一切三角函數的值，現在用例子來表明應當如何去作。

例 1. 已給：$\sin\alpha=\frac{20}{29}$。計算銳角 α 的其他各三角函數值。

從公式 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 有：
$$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha。$$

把 $\sin\alpha$ 的已知值 $\frac{20}{29}$ 代入，得：
$$\cos^2\alpha=1-\left(\frac{20}{29}\right)^2=\frac{29^2-20^2}{29^2}=\frac{49\times9}{29^2}。$$

於是 $\cos\alpha=\frac{21}{29}$。

要求 $\operatorname{tg}\alpha$ 可用公式
$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}。$$

得：
$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{20}{29}:\frac{21}{29}=\frac{20}{21}。$$

由此得
$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{21}{20},$$

因為 $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1$。

例 2. 已給：$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{45}{28}$。計算銳角 α 的其他各三角函數值。

把 $\operatorname{tg}\alpha$ 的值作為 $\operatorname{ctg}\alpha$ 的倒數記下來：
$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{28}{45}。$$

根據公式 $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ 有：$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{45}{28}$。將此等式的兩端平方，得：
$$\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=\frac{45^2}{28^2}。$$

將上式的兩端各加 1：
$$1+\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=1+\frac{45^2}{28^2}\quad 或\quad \frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=\frac{28^2+45^2}{28^2}。$$

考慮到 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$（§ 3），得：

$$\sin^2\alpha=\frac{28^2}{2025+784},\quad \text{由此得 } \sin\alpha=\frac{28}{53}。$$

從公式 $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ 有 $\cos\alpha=\operatorname{ctg}\alpha\cdot\sin\alpha$。

應用上面的結果得:

$$\cos\alpha=\frac{45\times28}{28\times53}=\frac{45}{53}。$$

例 3. 若 $\cos\alpha=\frac{2}{7}$,求銳角 α 的其他各三角函數值。

解 從公式 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 有:

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{4}{49}}=\frac{3\sqrt{5}}{7},$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{3\sqrt{5}}{2},$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{2}{3\sqrt{5}}。$$

例 4. 若 $\operatorname{tg}\alpha=\frac{p}{q}$,求銳角 α 的其他各三角函數值。

用下法解這個例子最簡便。研究以 p 和 q 爲直角邊的直角三角形(圖 11)。它的斜邊等於 $\sqrt{p^2+q^2}$,所以

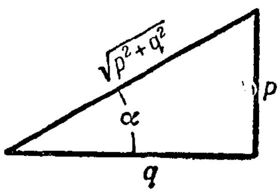

圖 11

$$\cos\alpha=\frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}},$$

$$\sin\alpha=\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}},$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{q}{p}。$$

根據值

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{p}{q}$$

用幾何的方法推出以下兩個三角函數值

$$\sin\alpha=\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}},\quad \cos\alpha=\frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}}。$$

這個方法,最好記住,因爲在應用中往往必須根據 $\operatorname{tg}\alpha$ 的值來求 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$ 的值。

例 5. $\operatorname{tg}\alpha=\frac{2}{3}$(圖 12)。有:

$$\sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{13}};\quad \cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{13}}。$$

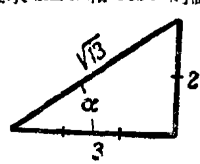

圖 12

也可根據 $\operatorname{ctg}\alpha$ 的值,幾何地求出 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$ 的值,這裏 α 是銳角。

例 6． $\operatorname{ctg}\alpha=3$ (圖 13)。於是

$$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{10}};\quad \cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{10}}。$$

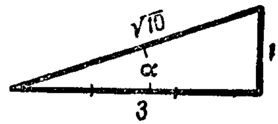

圖 13

作出一切計算的普遍形式，即是說，不使已給函數具有確定的值，可推出普遍公式。

例 7． 用 $\cos\alpha$ 表示銳角 α 的三角函數值。

從公式 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 求得：

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}。$$

從公式

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

有：

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha},$$

隨之

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}。$$

例 8． 推出用 $\operatorname{tg}\alpha$ 表示銳角 α 的三角函數的式子。

從公式

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

有：

$$\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\quad 和\quad \frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}。$$

在這些等式的兩端各加 1，得：

$$1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha},$$

$$1+\frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha},$$

因 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，則

$$1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha},$$

$$\frac{1+\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{1}{\sin^2\alpha},$$

由此得

$$\sin^2\alpha=\frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha},$$

$$\cos^2\alpha=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha},$$

因此

$$\sin\alpha=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}},$$

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}。$$

最後
$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}。$$

用 $\sin\alpha$ 和 $\operatorname{ctg}\alpha$ 表示銳角 α 的三角函數公式的推論，留待讀者。

茲寫出用 $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ 和 $\operatorname{ctg}\alpha$ 表示銳角三角函數的公式：

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha},\quad \operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}},$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha};$$

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha},\quad \operatorname{tg}\alpha=\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha},$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}};$$

$$\sin\alpha=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}},\quad \cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}},\quad \operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha};$$

$$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}},\quad \cos\alpha=\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}},\quad \operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}。$$

注意 這些公式不須要記得。根據銳角的一個三角函數，計算此角的其他各個三角函數時，每一次都必須如上面所示各例子那樣進行，且利用基本公式：

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1;\quad \operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha};\quad \operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha};\quad \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1,$$

這些公式必須牢固地記熟。

§5. 三角恆等式

§3 中表示同一銳角的三角函數之間的關係式是三角恆等式的例子，無論角的大小如何它們都成立。要證明三角恆等式，可把恆等式的左端改變成右端，或把右端改變成左端，或把恆等式的每一端都改變成同一的式子。