# 张量分析及其应用

王运达　王有道　编译

东 北 工 学 院

# 张量分析及其应用

王运达　王有道　译编

（学生讲义）



东北工学院

1983 年 1 月

# 前　　言

张量分析这种数学工具不仅在理论物理、力学、电磁学、数学中很有用，就连工科院校中的一些专业也需要它的基本概念。根据这样要求，我们编译了这份资料并先后在沈阳、郑州、西安等地试教几次，听众反映效果尚好。因此，把它印出来供更多的读者参考。

本书的用法是：工科院校学生只学习第一章前9节和第四章1，2节就够用了，讲课时数约8学时。其他材料是供物理、力学、非几何专门化数学专业用的。讲课时数约25学时。

本书主要内容选自东京工业大学名誉教授矢野健太郎著《黎曼几何学入门》。因此，编者向他表示谢意。

如果有的读者想沿此方向深入学习，请看下列图书或这些书所引文献。


矢野健太郎《黎曼几何学入门》东北工学院 1982。

爱林根《张量分析》江苏科技出版社 1981。

А.И.Борисенко, И.Е.Тарапов,《Векторный анализ и начала тензорного исчисления》Высшая школа 1963。



王运达　王有道


1982年10月

# 目　　录

## 第三章 绝对微分学



## 第四章 欧氏空间



## 第五章 变换论

# 第一章　张量代数学

## 1.1　指标记法

在解析几何与微积分中出现三个独立变量时，普通用三个不同字母如 $x$，$y$，$z$ 表达。可是今后在黎曼几何学或它的推广、现代微分几何学的研究上，却不用不同的字母而用一个字母，但为了加以区别附以不同的指标。即不采用 $x$，$y$，$z$；而用 $x_1$，$x_2$，$x_3$ 更为方便。若采用这种记法，又可把它们写成

$$x_\kappa \quad (\kappa=1,\ 2,\ 3)$$

这种记法之所以方便，在于变量的数目是四个，五个，……，一般来说 $n$ 个时，不用更改字母仅仅增加指标的号数就可以把它们表达出来，如

$$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{n-1},\ x_n.$$

在上述记法中，把用来区分变量的指标写在字母的右下角了。但也可把它们写在右上角，如

$$x^1,\ x^2,\ \cdots,\ x^{n-1},\ x^n$$

或
$$x^\kappa \quad (\kappa=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n-1,\ n).$$

其实在本章要讲解的张量代数之中，巧妙地运用记在右上角的指标和记在右下角的指标进行讨论。以后自然可以理解到在表达自变量和坐标时记在右上角如

$$x^1,\ x^2,\ x^3,\ \cdots,\ x^n$$

好处多。

只是应该注意，即使记做 $x^1$，$x^2$，$x^3\cdots$，$x^n$ 也决不是表达一次方，二次方，三次方，…，$n$ 次方。记在 $x$ 的右肩上的数字仅仅是为了区分变量的不同而已。

在代数学与解析几何学里，普通将 $x$，$y$，$z$ 的一次式记做

$$ax+by+cz.$$

我们已经规定这里出现的变量 $x$, $y$, $z$ 分别用 $x^1$, $x^2$, $x^3$ 表达。此外如果用记号

$$a=a_1,\ b=a_2,\ c=a_3$$

表达 $a$, $b$, $c$, 则上述一次式可以写得非常简洁如

$$\sum_{\lambda=1}^{3} a_\lambda x^\lambda = a_1x^1+a_2x^2+a_3x^3.$$

这种记法尤其方便之处在于，当变量的数目为 $n$ 时可以写成与上完全相同的形状

$$\sum_{\lambda=1}^{n} a_\lambda x^\lambda = a_1x^1+a_2x^2+\cdots+a_nx^n.$$

以上，对于表达变量的字母把指标记在右上角，而对于出现的常系数却记在右下角。为什么要这样作？好处在哪呢？只要读到关于求总和的规定就迎刃而解了。

作为运用指标记法的例，用指标记法改写代数学中的齐二次形。一般形状可写成

$$ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy.$$

与前相同，令

$$x=x^1,\ y=x^2,\ z=x^3,$$

又令

$$a=a_{11},\ b=a_{22},\ c=a_{33},$$
$$f=a_{23}=a_{32},\ g=a_{31}=a_{13},\ h=a_{12}=a_{21},$$

则上列二次形变为

$$\begin{aligned}\sum_{\mu,\lambda=1}^{3} a_{\mu\lambda}x^\mu x^\lambda = {} & a_{11}x^1x^1+a_{12}x^1x^2+a_{13}x^1x^3\\ & +a_{21}x^2x^1+a_{22}x^2x^2+a_{23}x^2x^3\\ & +a_{31}x^3x^1+a_{32}x^3x^2+a_{33}x^3x^3.\end{aligned}$$

这样一来，当变量的数目为 $n$ 个时，二次形也可简写为

$$\sum_{\mu,\lambda=1}^{n} a_{\mu\lambda}x^{\mu}x^{\lambda}=a_{11}x^1x^1+a_{12}x^1x^2+\cdots+a_{1n}x^1x^n$$
$$+a_{21}x^2x^1+a_{22}x^2x^2+\cdots+a_{2n}x^2x^n$$
$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+a_{n1}x^nx^1+a_{n2}x^nx^2+\cdots+a_{nn}x^nx^n.$$

### 1.2 关于求总和的规定

当今后学习黎曼几何学时，一般以 $n$ 维空间为研究对象，故 $x^1$，$x^2$，…的个数为 $n$，因此指标的活动范围是在从 1 到 $n$ 的条件下讨论。再者，在前节所论一次形

$$\sum_{\lambda=1}^{n} a_{\lambda}x^{\lambda}$$

和二次形

$$\sum_{\mu,\lambda=1}^{n} a_{\mu\lambda}x^{\mu}x^{\lambda}$$

里，由 1 加到 $n$ 求总和的指标在各项中出现两次。因此，只要规定

如果在各项中相同指标出现两次，一个在上另一个在下，则其含义是关于这种指标求从 1 到 $n$ 的总和，

这时可略去 $\sum\limits_{\lambda=1}^{n}$ 或 $\sum\limits_{\mu,\lambda=1}^{n}$，简写成

$$a_{\lambda}x^{\lambda}=a_1x^1+a_2x^2+\cdots+a_nx^n,$$
$$a_{\mu\lambda}x^{\mu}x^{\lambda}=a_{11}x^1x^1+a_{12}x^1x^2+\cdots+a_{1n}x^1x^n$$
$$+a_{21}x^2x^1+a_{22}x^2x^2+\cdots+a_{2n}x^2x^n$$
$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+a_{n1}x^nx^1+a_{n2}x^nx^2+\cdots+a_{nn}x^nx^n$$

非常方便。

今后我们就采取这样规定。应该注意的是重复两次的指标仅仅表示求从 1 到 $n$ 的总和，用其它指标代换也行。例如，

$$a_{\lambda}x^{\lambda}=a_{\mu}x^{\mu}=a_{\nu}x^{\nu}=a_1x^1+a_2x^2+\cdots+a_nx^n,$$

$$a_{\mu\lambda}x^{\mu}x^{\lambda}=a_{\beta\alpha}x^{\beta}x^{\alpha}=a_{11}x^1x^1+a_{12}x^1x^2+\cdots+a_{1n}x^1x^n$$
$$+a_{21}x^2x^1+a_{22}x^2x^2+\cdots+a_{2n}x^2x^n$$
$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+a_{n1}x^nx^1+a_{n2}x^nx^2+\cdots+a_{nn}x^nx^n.$$

这样，要设法使求总和指标出现在上下双方才好发挥作用。

与此相反，有时也使用不表示求总和的指标。例如，

$n$ 个变量 $x^{\kappa}$ $(\kappa=1,2,3,\cdots,n)$，

$n$ 个常系数 $a_{\lambda}$ $(\lambda=1,2,3,\cdots,n)$，

$n^2$ 个常系数 $a_{\mu\lambda}$ $(\mu,\lambda=1,2,3,\cdots,n)$

等。以后，大体上指标从 1 变到 $n$，因此就不每次都加附注而规定：

今后如果不特殊声明，用希腊字母 $\alpha,\beta,\gamma,\cdots,\kappa,\lambda,\mu,\nu,\cdots$ 等表示的指标总是从 1 变到 $n$。

即规定用 $x^{\kappa}$ 表示

$$x^1,\ x^2,\ x^3,\ \cdots,\ x^n,$$

用 $a_{\lambda}$ 表示

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,$$

用 $a_{\mu\lambda}$ 表示

$$\begin{array}{l}a_{11},\ a_{12},\ a_{13},\ \cdots,\ a_{1n},\\ a_{21},\ a_{22},\ a_{23},\ \cdots,\ a_{2n},\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{n1},\ a_{n2},\ a_{n3},\ \cdots,\ a_{nn}.\end{array}$$

## 1.3 行列式

在这节里用指标记法改写行列式的几个常见性质。首先考虑 $n$ 阶行列式

$$a=\begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1\cdots a_n^1\\ a_1^2 & a_2^2\cdots a_n^2\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ a_1^n & a_2^n\cdots a_n^n\end{vmatrix}.$$

式中用 $a^{\lambda}_{\mu}$ 表示行列式的元素，右上指标表示行列式 $a$ 中这个元素所在的行数，而右下指标表示这个元素所在的列数。

如果这些元素满足条件

$$a^{\lambda}_{\mu}=a^{\mu}_{\lambda}$$

时，就说这个行列式是对称的；如果满足条件

$$a^{\lambda}_{\mu}=-a^{\mu}_{\lambda}$$

时，就说这个行列式是反称的。

今将行列式 $a$ 沿第一行展开之得

$$a^1_1\begin{vmatrix} a^2_2 & a^2_3\cdots a^2_n \\ a^3_2 & a^3_3\cdots a^3_n \\ \multicolumn{2}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ a^n_2 & a^n_3\cdots a^n_n \end{vmatrix}-a^1_2\begin{vmatrix} a^2_1 & a^2_3\cdots a^2_n \\ a^3_1 & a^3_3\cdots a^3_n \\ \multicolumn{2}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ a^n_1 & a^n_3\cdots a^n_n \end{vmatrix}+\cdots+$$

$$+(-1)^{n-1}a^1_n\begin{vmatrix} a^2_1 & a^2_2\cdots a^2_{n-1} \\ a^3_1 & a^3_2\cdots a^3_{n-1} \\ \multicolumn{2}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ a^n_1 & a^n_2\cdots a^n_{n-1} \end{vmatrix}.$$

如果设 $A^1_1$，$A^2_1$，…，$A^n_1$ 分别表示 $a^1_1$，$a^1_2$，…，$a^1_n$ 的系数，即行列式 $a$ 中 $a^1_1$，$a^1_2$，…，$a^1_n$ 的代数余子式，则上式变为

$$a=a^1_1A^1_1+a^1_2A^2_1+\cdots+a^1_nA^n_1.$$

与此完全相同，欲求沿第二行，第三行，……等的展开，用 $A^{\mu}_{\lambda}$ 表示行列式 $a$ 中 $a^{\lambda}_{\mu}$ 的代数余子式便得

$$a=a^2_1A^1_2+a^2_2A^2_2+a^2_3A^3_2+\cdots+a^2_nA^n_2,$$

$$a=a^3_1A^1_3+a^3_2A^2_3+a^3_3A^3_3+\cdots+a^3_nA^n_3,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a=a^n_1A^1_n+a^n_2A^2_n+a^n_3A^3_n+\cdots+a^n_nA^n_n.$$

如果用前述指标记法改写之，则这些式子变得非常简单如下所示。

$$a={}^1_{\nu}A^{\nu}_1,\quad a=a^2_{\nu}A^{\nu}_2,\quad a=a^3_{\nu}A^{\nu}_3,\quad\cdots,\quad a=a^n_{\nu}A^{\nu}_n.$$

应该注意在这些式子里 $a$ 的右上指标与 $A$ 的右下指标总相同。试问它

们不同时究竟表示什么呢？以 $a^1_\nu A^\nu_2$ 为例说明之。

$$a^1_\nu A^\nu_2 = a^1_1 A^1_2 + a^1_2 A^2_2 + a^1_3 A^3_2 + \cdots + a^1_n A^n_2,$$

式中 $a^1_1$，$a^1_2$，$a^1_3$，…，$a^1_n$ 是行列式 $a$ 的第一行元素，但 $A^1_2$，$A^2_2$，…，$A^n_2$ 是行列式 $a$ 的第二行元素 $a^2_1$，$a^2_2$，…，$a^2_n$ 的代数余子式。因此，上式是向行列式 $a$ 的第一行各元素分别乘以第二行相应元素的代数余子式并相加而得之和，故由行列式的周知性质可见，这个值恒为 0。同理，$a^\kappa_\nu A^\nu_\mu$ 是向行列式 $a$ 的第 $\kappa$ 行元素分别乘以第 $\mu$ 行对应元素的代数余子式并相加而得之和。于是，$a^\kappa_\nu A^\nu_\mu$ 这样式子，当 $\kappa$ 与 $\mu$ 相等时表示行列式的值，当 $\kappa$ 与 $\mu$ 不等时恒为 0。这个事实可用

$$a^\kappa_\nu A^\nu_\mu = a\delta^\kappa_\mu$$

表示。式中 $\delta^\kappa_\mu$ 是一个符号，当 $\kappa=\mu$ 时表示 1，当 $\kappa\neq\mu$ 时表示 0，它叫做**克朗纳格**（L. Kronecker）的**德耳他**。即

$$\delta^\kappa_\mu = \begin{cases} 1 & \kappa=\mu, \\ 0 & \kappa\neq\mu. \end{cases}$$

到目前为止讨论了沿行列式的行展开，完全一样，如果沿列展开可得

$$a^\nu_\mu A^\kappa_\nu = a\delta^\kappa_\mu.$$

今设 $a\neq 0$，令

$$\frac{A^\nu_\mu}{a} = \alpha^\nu_\mu,$$

则上列二公式可写做

$$a^\kappa_\nu \alpha^\nu_\mu = \delta^\kappa_\mu, \quad a^\nu_\mu \alpha^\kappa_\nu = \delta^\kappa_\mu.$$

我们还知道二行列式

$$a = \begin{vmatrix} a^1_1 & a^1_2 \cdots a^1_n \\ a^2_1 & a^2_2 \cdots a^2_n \\ \cdots & \cdots \\ a^n_1 & a^n_2 \cdots a^n_n \end{vmatrix} \quad 与 \quad b = \begin{vmatrix} b^1_1 & b^1_2 \cdots b^1_n \\ b^2_1 & b^2_2 \cdots b^2_n \\ \cdots & \cdots \\ b^n_1 & b^n_2 \cdots b^n_n \end{vmatrix}$$

之积间有公式

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 \cdots a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \cdots a_n^2 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_1^n & a_2^n \cdots a_n^n \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_1^1 & b_2^1 \cdots b_n^1 \\ b_1^2 & b_2^2 \cdots b_n^2 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ b_1^n & b_2^n \cdots b_n^n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1^1 b_1^1 + \cdots + a_n^1 b_1^n, & a_1^1 b_2^1 + \cdots + a_n^1 b_2^n, & \cdots, & a_1^1 b_n^1 + \cdots + a_n^1 b_n^n \\ a_1^2 b_1^1 + \cdots + a_n^2 b_1^n, & a_1^2 b_2^1 + \cdots + a_n^2 b_2^n, & \cdots, & a_1^2 b_n^1 + \cdots + a_n^2 b_n^n \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_1^n b_1^1 + \cdots + a_n^n b_1^n, & a_1^n b_2^1 + \cdots + a_n^n b_2^n, & \cdots, & a_1^n b_n^1 + \cdots + a_n^n b_n^n \end{vmatrix}.$$

如果用指标记法，此式可以写得很简单。

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 \cdots a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \cdots a_n^2 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_1^n & a_2^n \cdots a_n^n \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_1^1 & b_2^1 \cdots b_n^1 \\ b_1^2 & b_2^2 \cdots b_n^2 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ b_1^n & b_2^n \cdots b_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_\nu^1 b_1^\nu, & a_\nu^1 b_2^\nu, & \cdots, & a_\nu^1 b_n^\nu \\ a_\nu^2 b_1^\nu, & a_\nu^2 b_2^\nu, & \cdots, & a_\nu^2 b_n^\nu \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_\nu^n b_1^\nu, & a_\nu^n b_2^\nu, & \cdots, & a_\nu^n b_n^\nu \end{vmatrix}.$$

## 1.4 一次方程组

考虑含 $n$ 个未知数 $x^1$，$x^2$，$\cdots$，$x^n$ 的 $n$ 个一次方程

$$\begin{aligned} &a_1^1 x^1 + a_2^1 x^2 + \cdots + a_n^1 x^n = b^1, \\ &a_1^2 x^1 + a_2^2 x^2 + \cdots + a_n^2 x^n = b^2, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &a_1^n x^1 + a_2^n x^2 + \cdots + a_n^n x^n = b^n. \end{aligned}$$

出现在这些方程左边的系数所作成的行列式是前节讲过的行列式。用指标记法表示上述方程得

$$a_\mu^\lambda x^\mu = b^\lambda.$$

众所周知，当系数 $a_\mu^\lambda$ 作成的行列式 $a$ 不是 0 时，则从上方程可解出未知数 $x^\mu$。今用指标记法可将解法简化，说明如下。因由假设行列式 $a$ 的值不是 0，故令行列式 $a$ 中元素 $a_\mu^\lambda$ 的代数余子式为 $A_\lambda^\mu$，又令

$$\alpha_\lambda^\mu = \frac{A_\lambda^\mu}{a},$$

则由前节的结论可见

$$\alpha^{\nu}_{\lambda} a^{\lambda}_{\mu} = \delta^{\nu}_{\mu} \quad 与 \quad \alpha^{\mu}_{\nu} a^{\lambda}_{\mu} = \delta^{\lambda}_{\nu}$$

故用 $\alpha^{\nu}_{\lambda}$ 乘

$$a^{\lambda}_{\mu} x^{\mu} = b^{\lambda}$$

的两边，并关于 $\lambda$ 求从 1 到 $n$ 的总和得

$$\alpha^{\nu}_{\lambda} a^{\lambda}_{\mu} x^{\mu} = \alpha^{\nu}_{\lambda} b^{\lambda},$$

即

$$\delta^{\nu}_{\mu} x^{\mu} = \alpha^{\nu}_{\lambda} b^{\lambda}.$$

然因 $\delta^{\nu}_{\mu} x^{\mu}$ 表示 $n$ 个量：

当 $\nu=1$ 时表示 $\delta^1_1 x^1 + \delta^1_2 x^2 + \delta^1_3 x^3 + \cdots + \delta^1_n x^n$,

当 $\nu=2$ 时表示 $\delta^2_1 x^1 + \delta^2_2 x^2 + \delta^2_3 x^3 + \cdots + \delta^2_n x^n$,

……………………………………………………………

当 $\nu=n$ 时表示 $\delta^n_1 x^1 + \delta^n_2 x^2 + \delta^n_3 x^3 + \cdots + \delta^n_n x^n$.

回忆关于 $\delta^{\nu}_{\mu}$ 的规定，显然第一式表示 $x^1$，第二式表示 $x^2$，…，第 $n$ 式表示 $x^n$。故得

$$\delta^{\nu}_{\mu} x^{\mu} = x^{\nu}.$$

即

$$x^{\nu} = \alpha^{\nu}_{\lambda} b^{\lambda}.$$

以上是以克拉美（Cramer）定律称著的解法在指标记法下的表示。

## 1.5 齐线性变换

考虑 $n$ 个互相独立的 $n$ 个变量 $x^1$, $x^2$, …, $x^n$ 变为互相独立的 $n$ 个新变量 $x^{1'}$, $x^{2'}$, …, $x^{n'}$ 的齐线性变换

$$x^{1'} = A^{1'}_1 x^1 + A^{1'}_2 x^2 + \cdots + A^{1'}_n x^n,$$
$$x^{2'} = A^{2'}_1 x^1 + A^{2'}_2 x^2 + \cdots + A^{2'}_n x^n,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x^{n'} = A^{n'}_1 x^1 + A^{n'}_2 x^2 + \cdots + A^{n'}_n x^n.$$

但假设变换的行列式 $A = |A^{\kappa'}_{\kappa}|$ 的值不是 0．用指标记法可将这些变换式写做

$$x^{\kappa'} = A^{\kappa'}_{\kappa} x^{\kappa}.$$

然因 $A=|A_{\kappa}^{\kappa'}|\neq 0$，故可从方程组

$$A_{\kappa'}^{\lambda}A_{\mu}^{\kappa'}=\delta_{\mu}^{\lambda}$$

解出 $A_{\kappa'}^{\lambda}$。因此，用它可将前式中的 $x^{\kappa}$ 解出，得

$$x^{\kappa}=A_{\kappa'}^{\kappa}x^{\kappa'}.$$

即前面考虑的齐线性变换的逆变换仍然是齐线性变换。

特别当 $A_{\lambda}^{\kappa'}=\delta_{\lambda}^{\kappa}$ 时得

$$x^{\kappa'}=\delta_{\lambda}^{\kappa}x^{\lambda}=x^{\kappa}, \qquad |A_{\lambda}^{\kappa'}|=1\neq 0,$$

这样的齐线性变换叫做**恒等变换**。

再设在齐线性变换

$$x^{\kappa'}=A_{\kappa}^{\kappa'}x^{\kappa} \qquad (|A_{\kappa}^{\kappa'}|\neq 0)$$

下将变量 $x^{\kappa}$ 变为 $x^{\kappa'}$，又在齐线性变换

$$x^{\kappa''}=A_{\kappa'}^{\kappa''}x^{\kappa'} \qquad (|A_{\kappa'}^{\kappa''}|\neq 0)$$

下将变量 $x^{\kappa'}$ 变为变量 $x^{\kappa''}$，则将变量 $x^{\kappa}$ 直接变为 $x^{\kappa''}$ 的变换式是

$$x^{\kappa''}=A_{\kappa'}^{\kappa''}A_{\kappa}^{\kappa'}x^{\kappa}.$$

故令

$$A_{\kappa'}^{\kappa''}A_{\kappa}^{\kappa'}=A_{\kappa}^{\kappa''}$$

时，则

$$x^{\kappa''}=A_{\kappa}^{\kappa''}x^{\kappa},$$

而且从

$$|A_{\kappa}^{\kappa''}|=|A_{\kappa'}^{\kappa''}A_{\kappa}^{\kappa'}|=|A_{\kappa'}^{\kappa''}|\cdot|A_{\kappa}^{\kappa'}|\neq 0$$

可见，由两个齐线性变换复合而成的，将 $x^{\kappa}$ 直接变到 $x^{\kappa''}$ 的变换仍然是一个齐线性变换。

当某变换的集满足下列三条件时就说这个集作成**群**。

（i）如果将 $x^{\kappa}$ 变为 $x^{\kappa'}$ 的变换以及将 $x^{\kappa'}$ 变为 $x^{\kappa''}$ 的变换都属于这个集，则将 $x^{\kappa}$ 直接变为 $x^{\kappa''}$ 的变换也属于这个集。

（ii）这个变换的集包含恒等变换。

（iii）如果某变换属于这个集，则其逆变换存在，并且也属于这个集。

故齐线性变换全体而成的集作成群。

## 1.6 在齐线性变换下的不变量，反变向量与共变向量

今有变量 $x^1$，$x^2$，…，$x^n$ 的函数 $f(x^1, x^2, \cdots, x^n)$，如果在变量的齐线性变换

$$x^{\kappa'} = A_\kappa^{\kappa'} x^\kappa \quad (A_\kappa^{\kappa'} \text{ 是常数})$$

下，此函数的值不变，就说在齐线性变换下此量是**不变量**或**数量**。

又有变量 $x^1$，$x^2$，…，$x^n$ 的 $n$ 个函数 $v^1$，$v^2$，…，$v^n$，如果在变量的齐线性变换 $x^{\kappa'} = A_\kappa^{\kappa'} x^\kappa$ 下，这些函数的变化规律是

$$v^{\kappa'} = A_\kappa^{\kappa'} v^\kappa$$

时，就说函数 $v^1, v^2, \cdots, v^n$ 是一**反变向量的分量**。故变量本身 $x^1$，$x^2$，…，$x^n$ 也是一反变向量的分量。

又有变量 $x^1$，$x^2$，…，$x^n$ 的 $n$ 个函数 $v_1$，$v_2$，…，$v_n$，如果在变量的齐线性变换下，这些函数的变换规律是

$$v_{\lambda'} = A_{\lambda'}^{\lambda} v_\lambda,$$

就说函数 $v_1$，$v_2$，…，$v_n$ 是一**共变向量的分量**。

今设 $v_1$，$v_2$，…，$v_n$ 为一共变向量的分量，用它们当系数作一次形

$$v_\lambda x^\lambda = v_1 x^1 + v_2 x^2 + \cdots + v_n x^n,$$

则此一次形是不变量。原因是，如果在变量变换下 $v_\lambda$ 与 $x^\lambda$ 分别按前述规律变为 $v_{\lambda'}$ 与 $x^{\lambda'}$，则

$$v_{\lambda'} x^{\lambda'} = (A_{\lambda'}^{\lambda} v_\lambda)(A_\mu^{\lambda'} x^\mu) = (A_{\lambda'}^{\lambda})(A_\mu^{\lambda'}) v_\lambda x^\mu = \delta_\mu^\lambda v_\lambda x^\mu = v_\lambda x^\lambda.$$

如上所示，今后我们规定将反变向量的分量的指标记在右上角，共变向量的分量的指标记在右下角以资区别。

## 1.7 在齐线性变换下的张量

设 $u^\lambda$ 与 $v^\kappa$ 分别是反变向量的分量，则在变量的齐线性变换 $x^{\kappa'} = A_\kappa^{\kappa'} x^\kappa$ 下这些函数分别变为

$$u^{\lambda'} = A_\lambda^{\lambda'} u^\lambda, \qquad v^{\kappa'} = A_\kappa^{\kappa'} v^\kappa.$$

故 $u^\lambda$ 与 $v^\kappa$ 相乘而得到的 $n^2$ 个函数 $u^\lambda v^\kappa$ 在上述变量的齐线性变换

下的变换规律是

$$u^{\lambda'}v^{\kappa'}=A^{\lambda'}_{\lambda}A^{\kappa'}_{\kappa}u^{\lambda}v^{\kappa}\ .$$

推而广之，有带两个指标的 $n^2$ 个函数如 $T^{\lambda\kappa}$，在变量的齐线性变换下的变换规律是

$$T^{\lambda'\kappa'}=A^{\lambda'}_{\lambda}A^{\kappa'}_{\kappa}T^{\lambda\kappa}$$

时，就说这些函数是**二阶反变张量的分量**。

再设 $u_\mu$，$v_\lambda$ 分别为共变向量的分量。因为这些函数在齐线性变换下的变换规律分别是

$$u_{\mu'}=A^{\mu}_{\mu'}u_{\mu}\quad 与\quad v_{\lambda'}=A^{\lambda}_{\lambda'}v_{\lambda},$$

故 $u_\mu$ 与 $v_\lambda$ 相乘而得到的 $n^2$ 个函数 $u_\mu v_\lambda$ 的变换规律是

$$u_{\mu'}v_{\lambda'}=A^{\mu}_{\mu'}A^{\lambda}_{\lambda'}u_{\mu}v_{\lambda}\ .$$

象这样，带两个指标的 $n^2$ 个函数 $T_{\mu\lambda}$ 在变量的齐线性变换下的变换规律是

$$T_{\mu'\lambda'}=A^{\mu}_{\mu'}A^{\lambda}_{\lambda'}T_{\mu\lambda}$$

时，就说这些函数是**二阶共变张量的分量**。

用方才定义的共变张量的分量 $T_{\mu\lambda}$ 为系数，变量 $x^\lambda$ 的二次形 $T_{\mu\lambda}x^\mu x^\lambda$ 是不变量。原因是，

$$\begin{aligned}T_{\mu'\lambda'}x^{\mu'}x^{\lambda'}&=A^{\mu}_{\mu'}A^{\lambda}_{\lambda'}T_{\mu\lambda}A^{\mu'}_{\omega}x^{\omega}A^{\lambda'}_{\nu}x^{\nu}\\&=(A^{\mu}_{\mu'}A^{\mu'}_{\omega})(A^{\lambda}_{\lambda'}A^{\lambda'}_{\nu})T_{\mu\lambda}x^{\omega}x^{\nu}\\&=\delta^{\mu}_{\omega}\delta^{\lambda}_{\nu}T_{\mu\lambda}x^{\omega}x^{\nu}\\&=T_{\mu\lambda}x^{\mu}x^{\lambda}\ .\end{aligned}$$

最后设 $u$ 为一反变向量的分量，$v_\lambda$ 为一共变向量的分量。这些函数在变量的齐线性变换下的变换规律分别是

$$u^{\kappa'}=A^{\kappa'}_{\kappa}u^{\kappa},\qquad v_{\lambda'}=A^{\lambda}_{\lambda'}v_{\lambda},$$

故它们相乘作出 $n^2$ 个函数 $u^\kappa v_\lambda$，在变量的齐线性变换下的变换规律是

$$u^{\kappa'}v_{\lambda'}=A^{\kappa'}_{\kappa}A^{\lambda}_{\lambda'}u^{\kappa}v_{\lambda}.$$

象这样，带两个指标的 $n^2$ 个函数 $T^{\kappa}{}_{\lambda}$ 在变量的齐线性变换下的变换规律是

$$T^{\kappa'}{}_{\lambda'} = A^{\kappa'}_{\kappa} A^{\lambda}_{\lambda'} T^{\kappa}{}_{\lambda}$$

时，就说这些函数是**二阶混合张量的分量**.

进一步推广上述定义，可以定义**任意阶张量**. 例如，变换规律是

$$T^{\mu'\lambda'\kappa'} = A^{\mu'}_{\mu} A^{\lambda'}_{\lambda} A^{\kappa'}_{\kappa} T^{\mu\lambda\kappa}$$

的 $n^3$ 个函数 $T^{\mu\lambda\kappa}$ 叫做**三阶反变张量的分量**. 变换规律是

$$T_{\mu'\lambda'}{}^{\kappa'} = A^{\mu}_{\mu'} A^{\lambda}_{\lambda'} A^{\kappa'}_{\kappa} T_{\mu\lambda}{}^{\kappa}$$

的 $n^3$ 个函数 $T_{\mu\lambda}{}^{\kappa}$ 叫做**三阶混合张量的分量**. 而变换规律是

$$T_{\mu'\lambda'\kappa'} = A^{\mu}_{\mu'} A^{\lambda}_{\lambda'} A^{\kappa}_{\kappa'} T_{\mu\lambda\kappa}$$

的 $n^3$ 个函数 $T_{\mu\lambda\kappa}$ 叫做**三阶共变张量的分量**. 故不变量是0阶张量，反变向量是一阶反变张量，共变向量是一阶共变张量.

## 1.8 张量的加法，乘法与缩短

设有二同类张量，例如 $R_{\mu\lambda}{}^{\kappa}$ 与 $S_{\mu\lambda}{}^{\kappa}$，求它们的分量之和

$$R_{\mu\lambda}{}^{\kappa} + S_{\mu\lambda}{}^{\kappa} = T_{\mu\lambda}{}^{\kappa},$$

则 $T_{\mu\lambda}{}^{\kappa}$ 与 $R_{\mu\lambda}{}^{\kappa}$，$S_{\mu\lambda}{}^{\kappa}$ 是同类张量的分量. 原因是，因为 $R_{\mu\lambda}{}^{\kappa}$ 与 $S_{\mu\lambda}{}^{\kappa}$ 分别是张量的分量，所以在变量的齐次变换下其变换规律是

$$R_{\mu'\lambda'}{}^{\kappa'} = A^{\mu}_{\mu'} A^{\lambda}_{\lambda'} A^{\kappa'}_{\kappa} R_{\mu\lambda}{}^{\kappa}$$

以及

$$S_{\mu'\lambda'}{}^{\kappa'} = A^{\mu}_{\mu'} A^{\lambda}_{\lambda'} A^{\kappa'}_{\kappa} S_{\mu\lambda}{}^{\kappa}.$$

边边相加得

$$R_{\mu'\lambda'}{}^{\kappa'} + S_{\mu'\lambda'}{}^{\kappa'} = A^{\mu}_{\mu'} A^{\lambda}_{\lambda'} A^{\kappa'}_{\kappa} (R_{\mu\lambda}{}^{\kappa} + S_{\mu\lambda}{}^{\kappa}),$$

即

$$T_{\mu'\lambda'}{}^{\kappa'} = A^{\mu}_{\mu'} A^{\lambda}_{\lambda'} A^{\kappa'}_{\kappa} T_{\mu\lambda}{}^{\kappa}.$$

求这样一个新张量叫做求**二张量的和**.

根据完全一样的论法可以证明同类张量的分量之差，例如

$$R_{\mu\lambda}{}^{\kappa} - S_{\mu\lambda}{}^{\kappa}$$

也是一同类新张量的分量，它叫做**二张量的差**. 只要二张量是同类的，不论它们的阶数如何，都可定义和与差. 当然二向量 $u^{\kappa}$ 与 $v^{\kappa}$ 的和 $u^{\kappa}+v^{\kappa}$ 或差 $u^{\kappa}-v^{\kappa}$ 也包括在这个定义之中.