

力学译丛

第五辑

上海市力学学会編譯委员会

上海市科学技术編譯館

目 录

二元全空泡水翼的自由流綫理論.....	吳耀祖	(1)
纵向重力場对繞楔形体超空泡流的作用.....	A. J. Acosta	(17)
水翼的非定常理論(一).....	西山 哲男	(23)
水翼的非定常理論(二).....	西山 哲男	(37)
空泡数为零时全空泡水翼的不定常升力及弯矩.....	M. Martin	(42)
波形迎流的水翼理論.....	W. H. Isay	(55)
綫长和薄的对称物体的垂直出水和入水.....	J. P. Moran	(69)
两相边界层及其减阻特性.....	E. M. Sparrow 等	(81)
利用流变-电比拟法計算不定常的空气动力系数.....	R. Duquenne M. O. Aguesse	(89)
激波在不可压缩液面上激起的波浪.....	Б. Н. Румянцев	(97)

二元全空泡水翼的自由流綫理論

吳耀祖 著

I. 引言

由于固体于水中高速运动时出現空泡現象，空泡流动問題在流体力学发展的早期就已引起注意。这方面的早期工作主要涉及空泡流动中的阻力計算。具有空泡(或尾流)的升力問題較晚出現于水泵、船舶推进、失速机翼和水翼艇的应用上。虽然以前曾指出空泡流中升力問題的某些表述^[1-3]，但这些理論迄今尚未发展到給出足以进行統一的討論并表示成明显形式的一般結果。

有限空泡的空泡流动問題要求推广空泡的尺度为无穷大的經典的 Helmholtz 自由边界理論。为此，引入一些自洽模型，企图計及通常小于自由流压力的空泡底压。在 Helmholtz-Kirchhoff 流动中，这二个压力假定是相等的。

在此將談一下現存模型中三个主要的模型。第一个有限空泡的模型是 Riabouchinsky^[4] 提出的。有限空泡是借助于在实际物体下游引进一个“影象”体。另一个不同的模型假定有返回射流，Wagner 提出，稍晚由 Kreisel 进行研究，并为 Gilbarg 及 Serrin^[5] 进一步加以发展。最近 Roshko^[6] 提出底压不同于自由流压力的另一个自由流綫模型，在这个模型接近物体的尾流(或空泡)底压可以取任一指定值。从某一由此理論可决定的确定点，下游的流动假設按如下方式变化，即在平行于自由流綫带内压力从指定值逐步增加到自由流压力。显然此模型也曾独立地由 Eppler^[7] 更一般地考虑过。这些模型的另一变型也曾提出过^[8]，但它們与这儿需要特别提到的上述三个模型并无基本的差别。用此三个模型，垂直于来流方向平板流动問題的数学解曾于 [6, 9] 中給出。在整个底压的实际範圍內，所有这些理論給出了同样的結果。如此符合正是所期望的，如下节所討論，不需要这些不同模型的詳細解答，可以由考虑不同模型的基本物理意义而指出。

本文将自由流綫理論推广，并应用于具有全空泡尾流二元水翼的升力問題。借助于用 Roshko 模型来近似下游远方的尾流以进行分析。使用这个模型的原因主要是因为它比 Riabouchinsky 模型或回流模型在数学上簡單。事实上，正如在純阻力情况那样，可以証明这些不同模型实际上得到相同的結果，模型間結果相差不超过二級微量。如經典理論一样，这儿的数学考虑和复速度平面保角映射至复势平面有关。將解决曲綫障碍体的 Levi-Civita 方法推广于空泡流中，曲綫水翼的流动問題最后簡化为一个解析函数的非綫性边值問題，此解析函数定义于上半单位圓，对它可应用 Schwarz 的对称原理。然后可以应用此解析函数在单位圓內的展开式及物理平面內的边界条件而解决此問題。为了避免在确定自由流綫从鈍头水翼分离的位置时所遭遇的困难，这儿研究的水翼具有尖銳的前緣与后緣，并假定前后緣是分离点。除了这个限制，这儿的非綫性理論适用于任意空泡数的、任意形状翼型的水翼，以及几乎所有的攻角，只要尾流具有全空泡的流动图形。

作为两个典型的例子。將圓弧和平板問題的解表成明显的形式，对这两种情况不同的流动参量可表为簡單的公式。如空泡数、翼的拱度及攻角等不同的效应，从最后的結果进行了詳細討論。同样可以看出这儿的理論与实验符合很好。

II. 自由流綫理論中模型的簡述

流体作用于固体的合力(二元流动中的阻力与升力)当然可以表示为局部力的积分，局部力由固体表面

的压力及粘性应力所組成。然而也可以将合力用动量定理表示成包容物体的任意曲面的面积分。在实际流体流过鈍物体的場合，实验观察指出，流动的不連續面或自由流綫实际上是一个薄的切变层，其中的渦量由分离点前的附面层所供給。切变层通常并不光滑地延續至下游远方，而是以一定的頻率于每一边交替地卷起形成旋渦。旋渦很快扩散而事实上耗散于尾流之中。对一常值的来流速度，尾流仅平均而言才是稳定的。因这个复杂的尾流流动之故，使用需要对无穷远处的自由流綫詳細考虑的动量理論，看来是无益的。此問題的較为现实的方法是这样的去求解，这个解当恰当地考虑了空泡压力后，在物体的近旁是正确的。这在物理上是合理的，即下游远方尾流的具体結構实际上对物体附近的流場仅有微弱的影响。从而如果恰当選擇的話，可以用等价的势流模型来描述耗散的尾流流动。

空泡流的一般性质决定于空泡数 σ 的数值，它由下式定义

$$\sigma = (P - p_\sigma) / \left(\frac{1}{2} \rho U^2 \right) \quad (2.1)$$

这儿 P 表示未經扰动的自由流的压力， U 是其相对速度， ρ 是流体密度，而 p_σ 是空泡中的蒸汽或气体压力。实际的空泡通常具有有限的长度和正的空泡数 ($\sigma > 0$ ，或 $p_\sigma < P$)。早先曾提出一些数学式，以研究获得滿足下述条件的理想流体稳定空泡流动解的可能性：

- (i) 空泡数大于零， $\sigma > 0$ ，或 $p_\sigma < P$ ；
- (ii) 整个空泡的空泡压力是均匀的；
- (iii) 流体的压力无一处小于空泡压力；
- (iv) 穿过空泡边界，压力是連續的。

前面两个条件由于它們的物理真实性而設 ($\sigma = 0$ 的情形在物理上是不真实的)。第三个条件得自势流理論，即速度不可能在流場內部有最大值。最后的条件意即流体的两相的交面不可能維持任何的壓力突变。从而由 (ii) 导出自由流綫是速度为常数的面；而由 (iii) 空泡边界弯向流場內部。由条件 (iii) 使用了伯努利方程則得空泡边界上的速度乃是最大速度。必須指出，和經典理論相比，这些条件仅仅在 (i) 上有所不同，經典理論中， $\sigma = 0$ (或 $p_\sigma = P$) 对应于无限长的空泡。如果限制流动到处都是势流，則对 $\sigma \geq 0$ ，空泡不可能有有限的长度。若空泡在其自身后部閉合，則自物体兩側来的二条流綫或以相对的方向于駐点处相遇或彼此在下游方向形成尖点。第一个推测与条件 (ii) 是矛盾的，而第二个破坏了条件 (iii)。虽然如一般所观察到的，流綫可掉轉头来形成返回射流，但射流是不可能在物理平面上終結的。上面的論述指出了如果問題的建立限制于势流理論的范围，有必要以势流模型去替代下游的耗散尾流。为表明这些模型的特点，現在我們来考察流动繞垂直于来流的二元平板而形成有限空泡的問題。于 Riabouchinsky 模型，影象平板 A' (見图 1a) 置于实物板 A 的下游。自由流綫自 A 脫出抵达 A' ，流場到处都假定是无旋的。在一对板上的总力等于零，但計算单独作用于 A 上的阻力产生了下述阻力系数的近似表达式：

$$C_D(\sigma) \cong \{1 + \sigma + [8(\pi + 4)]^{-1} \sigma^2\} C_D(0) \cong (1 + \sigma) C_D(0) \quad (2.2)$$

这儿 $C_D(0) = 2\pi / (4 + \pi) = 0.88$ 是 $\sigma = 0$ 的 Helmholtz 的經典解。影象平板的物理意义可以大概的由下述的討論闡明。在无穷远处流体靜止的座标系中，施于 A' 的力作了負功，并等于 $W = -DU$ ， D 是 A 上的阻力，而 U 是板的移动速度。由 $C_W = W / \left(\frac{1}{2} \rho U^3 l \right)$ 定义的功系数就等于 $-C_D$ ，这儿的 l 是板长。現假如尾流是以渦列来近似，則 C_D 由轉移至尾流的渦的能量来計算，其結果是 [見文献 10, p. 557]

$$C_D = \frac{\alpha}{l} \left[1.59 \frac{U_s}{U} - 0.63 \left(\frac{U_s}{U} \right)^2 \right] \quad (2.3)$$

这儿， α 是同列相繼兩渦的距离，而 U_s 是渦相对于未扰动流的后移速度。若空气取作流体介质 (因此时有較多的可用数据)，測得的底压^[11]相当 $\sigma = 1.2$ ，而对此 (2.2) 式給出 $C_D = 1.93$ 。同样的流动。Heisenberg^[10] 指出，用某些典型的实验值則 (2.3) 式給出 $C_D = 1.82$ 。如此，虽然影象板所作的功实际上并不存在，但仍給出了能量轉移于尾流的較好描述，若是假定流場是位势流的話，尾流是必須要去掉的。必須注意到 (2.2) 式的結果以及所假定的流动图形，实质上对 A' 作了若干限制，即 A' 必須与 A 是相同的尺寸。現在考虑不对称的物体，例如举力面，就发生了一个問題：究竟影象体对垂直于流方向的平面是对称的呢？抑是对空泡中的一点是对称的？在前一种情形則由物理的原因，繞空泡必須有环量存在，以保証在一对物体上产生一个总的升力；在

后一种情形则速度势在流场中是处处连续的。看来需要对这个模糊之点作出澄清。

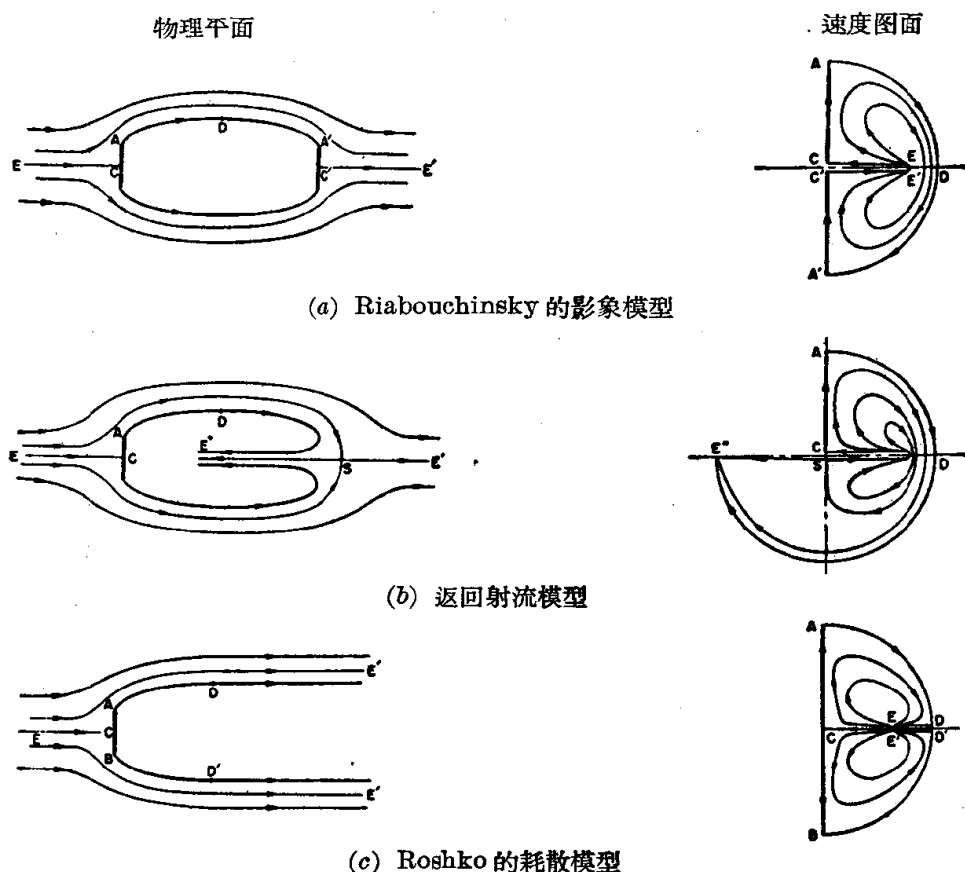


图1 不同模型中在物理平面和速度图面上的流动。注意流线在近AC处的相似性

在返回射流模型,自由流线在空泡的尾部返回,形成一个射流,此射流在空泡中向上游流动,而且假定并不撞于物体的后部,而是数学上允许它流到物理平面上的第二叶黎曼面而达无穷远。如此在原来的物理面,无穷远点的作用有如一个偶极子迭加一个源,而射流则相当于汇。物理上,从第一叶被射流带走的动量紧密的相关于尾流耗散的能量。即使对常常可以观察到的射流,它也是被紊流混合而相当的减弱了,至少其观察到的宽度比理论值要小得多。对平板流动,理论得到 $C_D(\sigma)$ 是与 (2.2) 式同样的公式,射流宽度是板宽的 $0.22(1+\sigma/4)$ 。在举力问题,由动量的考虑可见射流将改变方向并以足够小的攻角流向第二叶的下游。

在 Roshko 的耗散模型,流过钝头物体的流动分二部分来考虑。近物体处以自由流理论来描述,以允许对底压作可能的调整。更下游的流动由一个等价的位势流动所描述,以使其压力在平行于自由流动的带中连续的增加,在接近无穷远时达到自由流压力(见图1c)。这样,实际的耗散尾流是被代替了;流动耗散的具体机构是不重要的。如此可以看出,对空气流过钝头体的流动,这个模型比之其它模型,实质上更接近于物理的事实。无论如何,若尾流的耗散区前部认为是空泡的前部,则这个模型可同样好地用于空泡流动。用这个理论,平板的 $C_D(\sigma)$ 的解与前述解 (2.2) 式的不同仅仅差一项 $O(\sigma^2)$ 。进一步对举力问题,耗散尾流平行于自由流的这个假设仍然在物理上是可靠的,因而不需要进一步修正。

扼要言之,所有这些模型有一个共同的基本性质,它们借可能调整底压以给出近物体处流动的合适描述,从而去掉了经典理论的严重的局限性。由于这个理由,不必期待流场的这些解描述下游远方的尾流。底压调整的任意性获得了含有一个参数的一组解,此参数可以 σ 表之。对纯阻力问题,这些理论都一致给出 (2.2) 式的结果也可以从速度图的考虑来解释(见图1及文献12,13)。然而必须指出,举力问题正如本文的分析表明的那样,如 (2.2) 式给出 C_L 、 C_D 与 σ 的线性关系对中等及小的攻角是不符的。从而,计算 $C_L(\sigma)$ 和 $C_D(\sigma)$ 的问题,不能象在纯阻力问题中那样,对给定外形简化为 $C_L(0)$ 和 $C_D(0)$ 的计算。

对于分析中包含的具体数学运算,特别在举力问题中,在繁简上这些模型有某些程度的不同。Riabouchinsky 理论中,需要含有椭圆积分的一些数值积分。而用返回射流模型得到的结果可表为初等函数,但 Roshko 模型仍然在许多方面更简单些。

III. 問題的建立

这儿自由流綫理論用于研究在給定攻角 α 下流过帶有完全空泡尾流水翼的定常二元流动。水翼的前緣和后緣假定是尖銳的,从而涉及的流动图形使自由流綫是从这两个銳緣离开水翼的,而另一方面水翼的浸湿部分假定具有任意連續的外形。在空泡全部发展之后,水翼的厚度对流动就毫无影响,从而水翼将被假定是零厚度的。Roshko 模型(見上节)用于近似下游远方的尾流。在物理平面(或 z 平面,这儿 $z = x + iy$ 而 x 乃平行于自由流)內的流动表于图 2, 尾流外面流动假定为处处无旋。如此,从复位势

$$W(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$$

可导出复速度 w 为

$$w(z) = dW/dz = u - iv = qe^{-i\theta}$$

这儿 q, θ 是速度場的大小和方向。这儿分离点的速度正規为 $q=1$, 并沿着自由流綫一直保持到流綫 $\theta=0$ 的点 D 和 D' 。这两点的下游, 自由流綫在 DE 和 DE' 上保持平行于自由流的方向, 沿着它 q 的数值从 1 减到自由流速 U 。为使空泡数是 σ (其定义見 (2.1) 式) 而 AD 及 BD' 上 $q=1$, 可由伯努利方程

$$p + \frac{1}{2} \rho q^2 = P + \frac{1}{2} \rho U^2$$

的应用而看出 U 取值为 $(1+\sigma)^{-\frac{1}{2}}$

数学問題可归結为寻求映射 W 面到 w 面的保角变换。从这个关系物理平面可由积分推出:

$$z = \int dW/w$$

我們对 W 引入由下式給定的 ζ 变换

$$\sqrt{W} = -b \left[\cos \beta + \frac{1}{2} (\zeta + \zeta^{-1}) \right] \quad (3.1)$$

其中 $b = \frac{1}{2} (b_1 + b_2)$, $\cos \beta = (b_2 - b_1) / (b_1 + b_2)$ 而 b_1 和 b_2 为正值, 由 A 和 B 处位势所确定。 $W_A = b_1^2$ $W_B = b_2^2 e^{2\pi i}$ 。这个变换将 W 面上的全部流动映射至 ζ 面上上半单位圓的内部域。界綫 ACB 对应于半圓周 $|\zeta| = 1$, $0 \leq \arg \zeta \leq \pi$, 而自由流綫 ADE' 和 $BD'E'$ 映射至沿实軸直径的两半。流綫 EC 垂直于实軸离开 $\zeta=0$ 而沿 $\arg \zeta = \pi - \beta$ 的方向接近 C 。

由于非綫性的边值条件是确定在 z 平面上的 (即障碍物上确定了 θ , 而自由流綫上給定了 q), 我們引入变量

$$\omega = i \log w = \theta + i \log q = \theta + i\tau$$

在 ω 面上的流动画于图 2。 ω 的实部 θ 在 C 点 (此处 $\tau = -\infty$) 的跳跃归之于这样的事实即流綫在駐点 C 处的两个分支在 z 平面是正交的。 ω 面上的凹槽 DED' 是这个模型所引入假設的結果。

在 E 点 $\omega_E = -i\varepsilon$, 这儿 $\varepsilon = \frac{1}{2} \log(1+\sigma)$ 。凹槽可以由下述变换消除

$$\Omega = -\sqrt{\omega^2 + \varepsilon^2} \quad \varepsilon = \frac{1}{2} \log(1+\sigma) \quad (3.2)$$

應該注意到現述情形 ($\sigma > 0$) 仅仅在上述变换上与經典理論 ($\sigma = 0$) 有別。当 $\sigma = 0$, 則 Ω 与 $-\omega$ 成为相等, 而

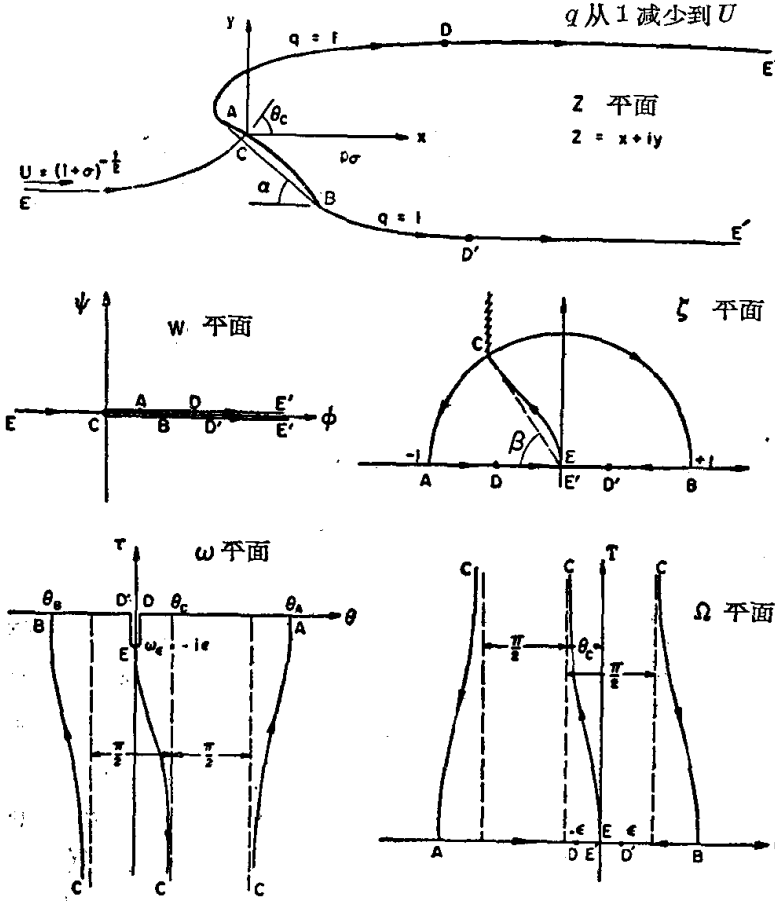


图 2

問題就化為經典的 Levi-Civita 問題。

從 $\Omega(\zeta)$ 在 $\zeta_c = e^{i(\pi-\beta)}$ 處的跳躍條件, 得出解析函數 $\Omega(\zeta)$ 在 ζ_c 處有一個對數奇點, 而在半圓內部處處正則。況且, 我們注意到 $\Omega(\zeta)$ 對實數的 ζ 是實函數, 從而函數 $\Omega(\zeta)$ 可以借 Schwarz 對稱原理解析開拓到下半單位圓。因 $\Omega(0)=0$ 我們可以更精確地將函數 $\Omega(\zeta)$ 表為

$$\Omega(\zeta) = i \log[(1+\zeta e^{-i\beta})/(1+\zeta e^{i\beta})] + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \zeta^n \quad (3.3)$$

右邊第一項表述了 $\Omega(\zeta)$ 的奇點部分, 而級數乃是一個在圓內及圓上為正則從而收斂的解析函數的展開式。系數 A_n 是實數並原則上可由障礙物 ACB 的幾何外形所確定(見第4節)。近原點處我們有

$$\Omega(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^{n+1} \frac{2}{n} \sin n\beta + A_n \right] \zeta^n \equiv \sum_{n=1}^{\infty} a_n \zeta^n, \quad (|\zeta| < 1) \quad (3.4)$$

在障礙體上 $\zeta = e^{i\eta}$, $0 \leq \eta \leq \pi$, 我們有

$$T(\eta) = \text{Im } \Omega = \frac{1}{2} \log \frac{1 + \cos(\eta - \beta)}{1 + \cos(\eta + \beta)} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\eta \quad (3.5a)$$

$$\theta(\eta) = \text{Re } \Omega = \beta_0 + \beta + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\eta; \quad (3.5b)$$

這兒 $\beta_0 = 0$, 當 $0 \leq \eta < (\pi - \beta)$, 而 $\beta_0 = -\pi$, 當 $(\pi - \beta) < \eta \leq \pi$ 。現在從 ω 的定義以及 W 表示成 ζ 的形式(3.1), 物理平面 $z(\zeta)$ 可由積分下式而得

$$dz = e^{i\omega} dW = \frac{b^2}{2} \exp \left\{ -i(\Omega^2 - \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}} \right\} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} + 2 \cos \beta \right) \left(\zeta - \frac{1}{\zeta} \right) \frac{d\zeta}{\zeta} \quad (3.6)$$

特別當在浸濕壁上時, $\zeta = e^{i\eta}$, 上式可化為

$$z = 2b^2 \int_{\eta}^{\pi-\beta} e^{-i(\Omega^2 - \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}} \eta} (\cos \eta + \cos \beta) \sin \eta d\eta \quad (3.7)$$

障礙體沿 CA 或 CB 的弧長可從下式確定

$$s = \int_{\eta}^{\pi-\beta} \frac{|dz|}{d\eta} d\eta = 2b^2 \int_{\eta}^{\pi-\beta} e^{-\tau(\eta)} (\cos \eta + \cos \beta) \sin \eta d\eta \quad (3.8)$$

浸濕面的總長乃是

$$S = 2b^2 \int_0^{\pi} e^{-\tau(\eta)} |\cos \eta + \cos \beta| \sin \eta d\eta \quad (3.9)$$

這兒 $\tau = \text{Im } \omega = -\text{Im}(\Omega^2 - \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}$ 。障礙體的曲率半徑乃是

$$R = \frac{dS}{d\theta} = 2b^2 e^{-\tau(\eta)} |\cos \eta + \cos \beta| \sin \eta \frac{d\eta}{d\theta} \quad (3.10)$$

假使 X 表示阻力, Y 表示升力, 則可以證明力由下式給出[例如見文獻 14, p. 305]

$$\begin{aligned} X + iY &= -\frac{i\rho}{2} \oint e^{i\omega} \frac{dW}{d\zeta} d\zeta \\ &= -\frac{i\rho b^2}{4} \oint \exp \left\{ -i(\Omega^2 - \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}} \right\} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} + 2 \cos \beta \right) \left(\zeta - \frac{1}{\zeta} \right) \frac{d\zeta}{\zeta} \end{aligned} \quad (3.11)$$

這兒的積分回路是 $|\zeta|=1$ 。類似地對駐點 C 的力矩 M (以頭部向下為正), 求得[見文獻 14]為

$$M = \frac{\rho}{2} \text{Re} \int_{(BCA)} [e^{-i\omega(\zeta)} - e^{-i\omega(\bar{\zeta})}] \zeta \frac{dW}{d\zeta} d\zeta \quad (3.12)$$

積分在 ζ 面沿半圓周 BCA 進行。上述積分不能化為一個封閉曲線上的積分, 從而必須單獨計算。

上述公式僅僅是各物理量的數學式描述。物理面上的放大因子 b 可從 (3.8)~(3.10) 式消去。若邊界值 $R(s)$ 使用於這二個結果式, 則可得到按參數 η 包括所有系數 A_n 的一個恒等式。從這個恒等式, 系數 A_n 至少在原則上可以被確定。放大因子 b 通過 (3.9) 式而由邊長 S 確定, 而可以由 (3.11) (3.12) 式順次算出 X 、 Y 和 M 。然而實際上從恒等式確定系數 A_n , 必須將包含於恒等式中的 η 的函數展開成若干級數。這個過程導至無窮多個包含無窮多未知數的超越方程。為了得到明顯形式的一般結果而有一定的精確度, 僅僅取展開式 (3.3) 中的前三項以進行分析, 即

$$\Omega(\zeta) = i \log[(1+\zeta e^{-i\beta})/(1+\zeta e^{i\beta})] + A_1 \zeta + A_2 \zeta^2 + A_3 \zeta^3 \quad (3.13)$$

如果在弧 ACB 上适当选定两个特定的点,在其上取边界值 R 和 θ , 我们就得到可以确定四个未知数 β 、 A_1 、 A_2 、 A_3 的四个超越方程,这些未知数以空泡数 σ 、攻角 α 和翼形表示。从而象下面表明的那样即可计算其余的物理量。

a. 升力和阻力

(3.11) 式给出的力的积分中,被积函数在周界 $|\zeta|=1$ 内部仅仅有一个 $\zeta=0$ 处的极点,但是在 $\Omega=\pm\epsilon$ 处有两个支点。此外被积函数内的函数 $\Omega(\zeta)$ 在积分回路上的 C 点及其在 ζ 面上的共轭点上存在对数奇点。而此若分别在 ζ 面及 Ω 面上引入一割线沿实轴从 D 到 D' , 而另二割线从 C 到 C 点的共轭点(见图2), 则此时被积函数在分割面的曲线上和其内部是单值的了。实际应用时,空泡数 σ 的数值通常在 $0<\sigma<1$ 的范围之内,对应于 $0<\epsilon^2<0.123$, 从而 ϵ 可被认为是微量。况且,在周界上 $|\Omega|$ 的模值一直要大于 ϵ 的值。所以(3.11)式中的指数函数可以展开成微量 ϵ^2 的项:

$$\exp\{-i(\Omega^2-\epsilon^2)^{\frac{1}{2}}\}=\exp\left\{-i\Omega+\frac{i\epsilon^2}{2\Omega}+0(\epsilon^4)\right\}=e^{-i\Omega}\left(1+\frac{i\epsilon^2}{2\Omega}+0(\epsilon^4)\right) \quad (3.14)$$

可以证明 $0(\epsilon')$ 的项具有实在是可被忽略的值,从而可以略去。以(3.13) (3.14)式代入(3.11)后,最后所得积分形式可以方便地使用留数定理。从被积函数在 $\zeta=0$ 处的留数,可以得到下述结果:

$$X=\pi\rho b^2\left(1+\frac{\epsilon^2}{b}\right)(\sin\beta+A_1/2)^2 \quad (3.15)$$

$$Y=\pi\rho b^2(1+\epsilon^2/4)\left\{(\sin\beta\cos\beta+A_1\cos\beta+A_2/2)+\frac{\epsilon^2}{4}\cos\beta\left(\sin\beta+\frac{A_1}{2}\right)^{-4}\right. \\ \left.\times\left[\left(\sin\beta+\frac{A_1}{2}\right)^3+\sin\beta\left(\sin\beta+\frac{A_1}{4}\right)\left(\frac{A_1}{2}+\frac{5}{4}A_2+A_3\right)\right]\right\} \quad (3.16)$$

(3.16)式中 A_2 、 A_3 的二次项由于它们的贡献甚微而省略了。这儿必须注意到(3.16)式,当后面一项的分母 $(\sin\beta+A_1/2)$ 大于零,即意味着阻力 X 是正的有限值时,才是真实的。而假如这个值等于零,则 $\Omega(\zeta)$ 在 ζ 近旁的展开式(见(3.4)式)第一项以 ζ^2 开始,从而映射在 $\zeta=0$ 点处不再保角,这意味着流动图形根本上不同于刚才考虑的了。若此值变负,则函数 $\Omega(\zeta)$ 交换了它的分枝,在物理上意味着空泡移到障碍物上的另一边,以致将用不同的边界条件。然而现在的公式与修正了的边界条件一起仍然有效。

上述式内的因子 b^2 可被表成障碍体的弧长 S 的项。为了计算表示 S 的积分(3.9),我们先按类似于(3.14)式的方法展开 $\exp(-\tau)$,

$$e^{-\tau(\eta)}=\exp\{\text{Im}(\Omega^2-\epsilon^2)^{\frac{1}{2}}\}=e^{T(\eta)}\left[1+\frac{\epsilon^2}{2}\frac{T}{\theta^2+T^2}+0(\epsilon^4)\right] \quad (3.17)$$

这儿 $\Omega(e^{i\eta})=\theta(\eta)+iT(\eta)$, 而 θ , T 则由方程(3.5)给出,且 $A_4=A_5=\dots=0$ 。代方程(3.17)到(3.9)式得到

$$S=2b^2\int_0^\pi\left(1+\frac{\epsilon^2}{2}\frac{T}{\theta^2+T^2}\right)\left[1+\sum_{n=1}^3A_n\sin n\eta\right][1+\cos(\eta-\beta)\sin\eta]d\eta$$

式中 A_n 的高次项已被忽略。函数 $T/(\theta^2+T^2)$ 是正的,而且可以证明其上限为与1同数量级的一个常数,此常数取决于 B 点处的 θ 值而与 ϵ 无关。从而 $0(\epsilon^2)$ 项的贡献相对于第一项是极小的。完成此积分得到

$$Sb^{-2}=J=4+\pi\sin\beta+A_1\left(\pi+\frac{8}{3}\sin\beta\right)+\frac{\pi}{2}A_2\cos\beta-\frac{8}{15}A_3\sin\beta \quad (3.18)$$

对一个攻角 α 的平板在理想的极限条件 $\sigma=0$ ($\epsilon=0$) 运动时,从映射条件则系数 A 全部消失。且 $\beta=\alpha$ (见(3.5b)式),此时(3.15) (3.16)和(3.18)式就化为倾斜薄板的经典结果[参看文献15, p. 102]

b. 力矩、驻点、压力中心

使用象处理(3.17)式的近似方法到(3.12)和(3.7)式,并进一步略去 A_3 , 我们得到

$$M=2b^2\rho\text{Re}\int_0^\pi\exp\{i(\beta+A_1\cos\eta+A_2\cos 2\eta)\} \\ \cdot[\sin\beta+(A_1+2A_2\cos\eta)(1+\cos\beta\cos\eta)](\sin^2\eta)z(\eta)d\eta$$

其中

$$z(\eta)=2b^2e^{-i\beta}\int_\eta^{\pi-\beta}[1-iA_1e^{i\eta}-iA_2e^{2i\eta}][1+\cos(\eta-\beta)]\sin\eta d\eta$$

将 $z(\eta)$ 的积分表示式代入前式, 分解其积分区间为二部分: $0 \leq \eta \leq \pi - \beta$ 和 $\pi - \beta \leq \eta \leq \pi$, 而后变换积分次序以使积分限进一步简化。在一些繁重而直接的积分运算后, 最后得

$$\begin{aligned} M/(2\pi\rho b^4) \equiv K = & C_1 \left\{ \cos \beta \left[\frac{5}{8} + \sin^2 \beta + A_1 \left(\frac{7}{b} \sin \beta + \frac{2}{3} \sin^3 \beta - \frac{32}{45\pi} \right) \right] \right. \\ & \left. + \frac{C_1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right) - A_2 \left(\frac{3}{16} \sin \beta + \frac{1}{12} \sin^3 \beta - \sin^5 \beta + \frac{64}{45\pi} \right) \right\} \\ & + C_2 \left(1 + A_1 + \frac{A_2}{4} \cos \beta \right) \left(1 + \frac{128}{45\pi} \sin \beta \right) + \frac{A_2}{16} \cos \beta \left(1 + \frac{5}{6} A_1 \right) \end{aligned}$$

这儿 b^2 由 (3.18) 式给出, 而

$$C_1 = \sin \beta + A_1 + \frac{A_2}{2} \cos \beta; \quad C_2 = \frac{1}{4} (A_1 \cos \beta + 2A_2)$$

假若将一个对其中心弦对称的翼安置得使弦垂直于自由来流, 则因为对称而 $\beta = \pi/2$ (见图 2)。进之, 因为 $\Omega(\xi)$ 必需是一个 ξ 的奇函数 (见方程 (3.13)), 则 A_2 必需消失。则由 (3.19) 式可见对驻点的力矩正如所期待的等于零。

由于驻点位置的不确定, 力矩通常是相对于一个固定点计算或测量的。因此我们在这儿推导对前缘的力矩 M_0 。而这进一步需要计算驻点的位置。以 S_0 表征沿壁从驻点到前缘的距离, 则 S_0 即可从 (3.8) 式令下限 $\eta = \pi$ 而计算得到。实行了前面 (3.18) 式类似的方法, 得到

$$S_0 \cong 2b^2 \int_0^\beta (1 + A_1 \sin \theta - A_2 \sin 2\theta + A_3 \sin 3\theta) [1 - \cos(\theta + \beta)] \sin \theta d\theta$$

此最后导至

$$\begin{aligned} S_0 b^{-2} \equiv J_0 = & 2(1 - \cos \beta) + \sin \beta (\beta - \sin 2\beta) + A_1 \left(\beta + \frac{4}{3} \sin \beta - \frac{3}{2} \sin 2\beta + \frac{1}{6} \sin 4\beta \right) \\ & + A_2 \left(\frac{1}{2} \beta \cos \beta - \frac{1}{2} \sin \beta + \frac{1}{6} \sin^3 \beta - 2 \sin^5 \beta \right) + \frac{2}{15} A_3 \sin \beta \\ & \times [\cos \beta (2 + \sin^2 \beta + 24 \sin^4 \beta) - 2] \end{aligned} \quad (3.20)$$

因子 b^2 可以用 (3.18) 式消去以得

$$\mu \equiv S_0/S = J_0/J \quad (3.21)$$

对称翼垂直于自由流, 则 $\beta = \pi/2$ 而 $A_2 = 0$, 从 (3.18) 和 (3.20) 式可以证明 $\mu = \frac{1}{2}$ 。对小的 β 值 (正如可由 (3.5b) 式看出, 这对应于小的 α), (3.21) 式化为

$$\mu = \frac{17}{18} \beta^4 + O(\beta^5) \quad (3.22)$$

这表明对小的攻角, 驻点与前缘是靠得十分近的。

知道了驻点位置, 则小拱度翼对前缘的力矩成为

$$M_0 = M + (Y \cos \alpha + X \sin \alpha) S_0 \quad (3.23)$$

得到了 M_0 , 我们可以确定压力中心 (由前缘量起) 的距离近似为

$$S_1 = M_0 / (Y \cos \alpha + X \sin \alpha) \quad (3.24)$$

或表示成弦长的百分比,

$$\nu = S_1/S = \mu + (M/S) (Y \cos \alpha + X \sin \alpha)^{-1} \quad (3.25)$$

现在, 再考虑垂直自由流的对称翼, $\alpha = \beta = \pi/2$ 。我们曾于前面指出 $\mu = \frac{1}{2}$ 和 $M = 0$, 故 $\nu = \frac{1}{2}$ 。对小的 α 值 (如前面表明, β 也是小的), (3.22) 式说明 μ 是很小的; (3.16) 式化为 $Y \cong \pi \rho b^2 (\beta + A_1 + A_2/2)$; (3.18) 式给出 $S \cong 4b^2$; 而从 (3.19) 式

$$M \cong 2\pi b^2 \rho \left[\frac{5}{8} (\beta + A_1 + A_2/2) + \frac{1}{4} (A_1 + 2A_2) \right]$$

如此对小的 α 和 σ , 我们近似地有

$$\nu \cong \frac{5}{16} + \frac{1}{8} (A_1 + 2A_2) / (\beta + A_1 + A_2/2) + O(\beta) \quad (3.26)$$

从而压力中心在 $\frac{5}{16}$ 到 $\frac{1}{2}$ 弦长的范围之内。

c. 自由流线的若干基本性质

这一节将计算自由流线 AD 、 BD' 的形状以及 D 和 D' 点的位置。首先，我们表明自由流线所假设的曲率沿空泡是凸的，规定了系数 A_1 、 A_2 和 A_3 的若干条件。沿流线 $\psi=0$ 的距离用 S 表示，离开 C 点为正。在 A 上， $\zeta=-\xi$ 并 $1 \geq \xi \geq \xi_1$ ，这儿 $-\xi_1$ 是 ζ 在 D 点处的值；而在 BD' 上， $\zeta=\xi$ 且 $1 \geq \xi \geq \xi_2$ ，这儿 $\xi_2=\xi_{D'}$ 。 AD 上曲率半径 $R=-dS/d\theta$ 和 BD' 上的曲率半径 $R=dS/d\theta$ 必须都是正的。我们首先研究 AD 上的 R ，从 $\Omega=\theta+iT$ 和 $z(\zeta)$ 的定义（见 (3.2), (3.8) 式）， ω 和 Ω 在 AD 上都是实数，而

$$R = -\frac{dS}{d\theta} = -\frac{|dz|}{d\xi} \frac{d\xi}{d\theta} \frac{d\theta}{d\theta} = -\frac{\theta}{\xi} \frac{|dz|}{d\xi} \frac{d\theta}{d\xi} \\ = -\frac{b^2}{2} \left(-\frac{\theta}{\xi} \right) \xi^{-3} \frac{(1-\xi^2)(1-2\xi \cos \beta + \xi^2)^2}{2 \sin \beta + (1-2\xi \cos \beta + \xi^2)(A_1-2A_2\xi+3A_3\xi^2)}$$

从此方程推出 $\xi \leq 1$ 时 $R(\xi) \geq 0$ 的条件要求：

$$2 \sin \beta + (1-2\xi \cos \beta + \xi^2)(A_1-2A_2\xi+3A_3\xi^2) > 0 \quad (3.27)$$

当 ξ 从 1 减少时 $R(\xi)$ 必然从 $R(1)=0$ 增加。要求 R 在 BD' 上为正的类似条件，在 $\xi_2 \leq \xi \leq 1$ ，为

$$2 \sin \beta + (1+2\xi \cos \beta + \xi^2)(A_1+2A_2\xi+3A_3\xi^2) > 0 \quad (3.28)$$

这儿只说明这两个辅助条件通常是满足的，因为方程 (3.4) 中的第一项系数是正的而其余 A_n 相对于 A_1 很快减少。虽然，这几点这儿未曾细心探究过。

自由流线 AD 的参数描述 $x(\xi)$ ， $y(\xi)$ 可以沿 $\zeta=-\xi$ 从 $\xi=1$ 到 $\xi \geq \xi_1$ 积分 (3.6) 式而得到。在 AD 上， $\tau = \text{Im} \omega = 0$ ，因而以 A 点为参考我们有

$$x-x_A = -\frac{S}{2T} \int_1^\xi \xi^{-3} (1-2\xi \cos \beta + \xi^2) (1-\xi^2) \cos \theta d\xi \quad (3.29)$$

$$y-y_A = -\frac{S}{2J} \int_1^\xi \xi^{-3} (1-2\xi \cos \beta + \xi^2) (1-\xi^2) \sin \theta d\xi \quad (3.30)$$

上述方程中的 $\cos \theta$ 和 $\sin \theta$ 是 ξ 的复合函数，

$$\theta = -(\theta^2 - \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.31)$$

$$\theta = -2 \tan^{-1} \frac{\xi \sin \beta}{1-\xi \cos \beta} - A_1 \xi + A_2 \xi^2 - A_3 \xi^3 \quad (3.32)$$

我们在 AD 上以 $\theta = -(\theta + \varepsilon)$ 来近似 (3.31) 式以简化计算，这在 θ 小或大的时候都将是好的。然后我们得到下述渐近式

$$\cos \theta = (1-2\xi \cos \beta + \xi^2 \cos 2\beta) / (1-2\xi \cos \beta + \xi^2) \\ \sin \theta = \frac{2\xi(1-\xi \cos \beta) \sin \beta + (A_1 \xi - A_2 \xi^2 - \varepsilon)(1-2\xi \cos \beta + \xi^2 \cos 2\beta)}{1-2\xi \cos \beta + \xi^2}$$

将这些值代入 (3.29)、(3.30) 式并完成积分运算后，我们最后得

$$2J(x-x_A)/S \cong \frac{1}{2} (1-\xi^2) (\xi^{-2} - \cos 2\beta) - 2 \cos \beta (1-\xi)^2 \xi^{-1} + 2 \sin^2 \beta \log \xi \quad (3.33)$$

$$2J(y-y_A)/S \cong (2 \sin \beta + A_1 + 2\varepsilon \cos \beta) (1-\xi)^2 / \xi - \varepsilon \left(\frac{1-\xi^2}{2\xi^2} + \log \xi \right) \\ + (\sin 2\beta + 2A_1 \cos \beta + A_2 + \varepsilon \cos 2\beta) \left[\log \xi + \frac{1}{2} (1-\xi^2) \right] \\ + \frac{1}{3} (A_1 \cos 2\beta + 2A_2 \cos \beta) (1-\xi)^2 (2+\xi) - \frac{1}{4} A_2 (1-\xi^2)^2 \cos 2\beta \quad (3.34)$$

为了寻求 D 点的位置 (x_D, y_D) ，首先确定对应于 $\Omega = -\varepsilon$ 的 ξ_1 值。以 $\Omega = -\varepsilon$ 和 $\zeta = -\xi_1$ 代入 (3.4) 式，得

$$\xi_1 = \frac{\varepsilon}{a_1} \left[1 + \frac{a_2}{a_1^2} \varepsilon + O(\varepsilon^2) \right]$$

用这 ξ_1 的值，很容易就从 (3.33)、(3.34) 式得出

$$x_D \cong \frac{S}{J} \left\{ \frac{a_1^2}{4\varepsilon^2} + O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \right\} = \frac{S}{J} \left(\frac{2 \sin \beta + A_1}{\sigma} \right)^2 [1 + O(\sigma)] \quad (3.35)$$

$$y_D \cong \frac{S}{J} \left\{ \frac{a_1^2}{2\varepsilon} + 0(\log \varepsilon) \right\} = \frac{S}{J} \frac{(2 \sin \beta + A_1)^2}{\sigma} [1 + 0(\sigma \log \sigma)] \quad (3.36)$$

上面的 x_D 和 y_D 的值可分别的认作是空泡的半长和半宽。如此我们看到在小空泡数 σ 时空泡长度正比于 σ^{-2} , 而空泡宽度正比于 σ^{-1} 。也可以看到近 D 点处的自由流綫与抛物綫很符合。

$$y^2/x \cong a_1^2 S/J = b^2 (2 \sin \beta + A_1)^2 \equiv C$$

而后与(3.15)式比較, 看出阻力 X 可表示成

$$X \cong \pi \rho b^2 (\sin \beta + A_1/2)^2 = \pi \rho C/4$$

这就是 Levi-Civita^[16] 的一般公式。現在, 为了确定 A_1 、 A_2 、 A_3 和 β 这些未知系数, 并以此显示空泡数 σ 、攻角 α 和翼的几何形状的影响, 将于下面处理圆弧和平板两个特例。

IV. 圆弧与平板翼型的空泡水翼

我們首先考虑具有半径 R 和圆弧角 2γ 圆弧翼型的水翼(见图3)。平板則是 $\gamma \rightarrow 0 (R \rightarrow \infty)$ 的特殊情况。这儿我們局限于小的 γ 值, 如 $\gamma < \pi/4$ 的情形。 AB 的弧长和弦长 S 及 l 为

$$S = 2\gamma R; \quad l = 2R \sin \gamma = 2\gamma R(1 - \gamma^2/6) \quad (4.1)$$

現在选定端点 A 和 B 并加以下述边界条件:

$$\left. \begin{array}{l} \text{(i)} \quad \theta_A = \pi - \alpha + \gamma, \quad \text{(ii)} \quad \theta_B = -\alpha - \gamma, \\ \text{(iii), (iv)} \quad A \text{ 和 } B \text{ 点的曲率半径 } R = S/2\gamma \end{array} \right\} \quad (4.2)$$

这四个条件使我們能够去确定 A_1 、 A_2 、 A_3 和 β , 而这些系数可以回过来用以校核边界上其它点的曲率半径。用条件(i)和(ii)于 θ 的定义(見(3.2), (3.5)式), 我們得到

$$\begin{aligned} \theta_B &= (\theta_B^2 + \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}} = [(\alpha + \gamma)^2 + \varepsilon^2]^{\frac{1}{2}} = \beta + A_1 + A_2 + A_3, \\ \theta_A &= -(\theta_A^2 + \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}} = -\pi + \alpha - \gamma - \frac{1}{2} \varepsilon^2 / \theta_A \\ &= -\pi + \beta - A_1 + A_2 - A_3 \end{aligned}$$

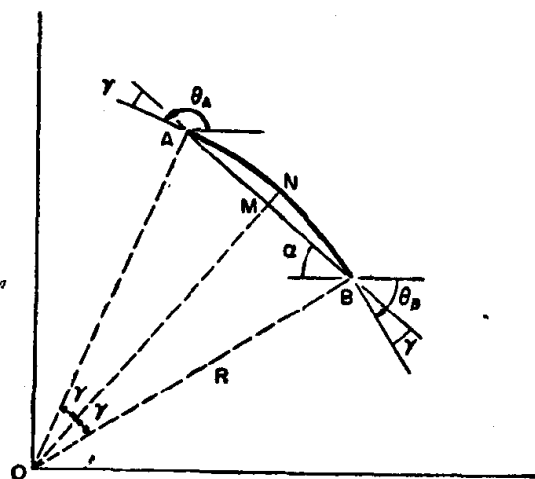


图3 圆弧型翼

第二式中 $\frac{1}{2}$ 次方幂是已經展开了, 因为 θ_A 常常远大于 ε ; 但是由于 ε/θ_B 的比值不一定很小故第一式未曾展开。将两式相加和相减得到

$$A_1 + A_3 = \gamma + \frac{1}{2} \{ [(\alpha + \gamma)^2 + \varepsilon^2]^{\frac{1}{2}} - (\alpha + \gamma) \} + \frac{\varepsilon^2}{4} (\pi - \alpha + \gamma)^{-1} \quad (4.3)$$

$$\beta + A_2 = \alpha + \frac{1}{2} \{ [(\alpha + \gamma)^2 + \varepsilon^2]^{\frac{1}{2}} - (\alpha + \gamma) \} - \frac{\varepsilon^2}{4} (\pi - \alpha + \gamma)^{-1} \quad (4.4)$$

在应用条件(iii)、(iv)时, 我們首先注意到在 B 点 $\tau = 0$ 而

$$\frac{d\theta}{d\eta} = \frac{(\theta_B^2 + \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}}{\theta_B} \frac{d\theta}{d\eta} \rightarrow -\frac{(\theta_B^2 + \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}}{\theta_B} (A_1 + 4A_2 + 9A_3) \sin \eta \quad \text{当 } \eta \rightarrow 0$$

从而由(3.10)式

$$-\frac{\theta_B(1 + \cos \beta)}{(\theta_B^2 + \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}} (A_1 + 4A_2 + 9A_3)^{-1} = \frac{R}{2b^2} = \frac{RJ}{2S} = \frac{J}{4\gamma}$$

或

$$A_1 + 4A_2 + 9A_3 = (4\gamma/J) (\alpha + \gamma) [(\alpha + \gamma)^2 + \varepsilon^2]^{-\frac{1}{2}} (1 + \cos \beta) \quad (4.5)$$

类似地, 应用在点 A 处的条件(iv)得到

$$A_1 - 4A_2 + 9A_3 = (4\gamma/J) (1 - \cos \beta) [1 + 0(\varepsilon^2)] \quad (4.6)$$

(4.5)、(4.6)式中, 由(3.18)式所定义的 J 也包含 A_1 、 A_2 、 A_3 和 β 。如此, (4.3)~(4.6)式及(3.18)一起成为5个未知数 A_1 、 A_2 、 A_3 、 β 和 J 的五个超越方程。其解可借迭代法的使用, 按一定精确度近似解出。对現

在的目的,下面的近似就已足够

$$\beta = \alpha + \frac{1}{2} \delta - \varepsilon^2 / 4 (\pi - \alpha + \gamma) - \frac{\gamma}{4 + \pi \sin \alpha} \left\{ \frac{\alpha + \gamma}{[(\alpha + \gamma)^2 + \varepsilon^2]^{\frac{1}{2}}} \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right\} \quad (4.7a)$$

$$\delta = [(\alpha + \gamma)^2 + \varepsilon^2]^{\frac{1}{2}} - (\alpha + \gamma) \quad (4.7b)$$

$$A_1 = \gamma \left\{ 1 + \frac{\pi \sin \alpha}{8(4 + \pi \sin \alpha)} \right\} + \frac{9}{16} \delta \left\{ 1 + \frac{\gamma(1 + \cos \alpha)}{9[(\alpha + \gamma)^2 + \varepsilon^2]^{\frac{1}{2}}} \right\} + \frac{9\varepsilon^2}{32(\pi - \alpha + \gamma)} \quad (4.8)$$

$$A_2 = \frac{\gamma}{4 + \pi(A + \sin \beta)} \left\{ \frac{\alpha + \gamma}{[(\alpha + \gamma)^2 + \varepsilon^2]^{\frac{1}{2}}} \cos^2 \frac{\beta}{2} - \sin^2 \frac{\beta}{2} \right\} \quad (4.9)$$

$$A_3 = \frac{1}{9}(\gamma - A_1) - \frac{\gamma}{9(4 + \pi \sin \alpha)} \left\{ \pi \sin \beta + \frac{2\delta(1 + \cos \alpha)}{[(\alpha + \gamma)^2 + \varepsilon^2]^{\frac{1}{2}}} \right\} \quad (4.10)$$

这儿 J 仍由 (3.18) 式给出。上述结果表明 $(\beta - \alpha)$ 、 A_1 、 A_2 和 A_3 对一切 α 全部是 $O(\gamma, \varepsilon^2)$; 特别当 α 靠近 $\pi/2$ 时 $(\beta - \alpha)$ 、 A_2 和 A_3 减为 $O(\gamma\varepsilon^2, \varepsilon^4)$ 。还有, A_3 甚小于 A_1 的事实指出了由 (3.13) 式所给出展开式的精确性。若上面的各量用于校核固体边界上其他点, 例如 $\zeta = e^{i\pi/2}$ 的曲率与斜率, 可以看出符合程度在最多相差 $O(\gamma, \varepsilon^2)$ 因子之内。这儿还需指出, 若在展开式 (3.13) 中取较多的项, 则前三个系数 A_1 、 A_2 、 A_3 将与上面 (4.8)~(4.10) 式的值有小小的不同。无论如何, 可以证明, 取多于三项以“改进”解实际上是不显著的。

现在我们来确定通常的阻力系数、升力系数和力矩系数(对前缘)如下:

$$X = \frac{1}{2} \rho U^2 l C_D; \quad Y = \frac{1}{2} \rho U^2 l C_L; \quad M_0 = \frac{1}{2} \rho U^2 l^2 C_M. \quad (4.11)$$

然后, 对并不太大的 $\gamma (< \pi/4)$, 我们组合若干上面的结果, 并注意到 $U = (1 + \sigma)^{-\frac{1}{2}}$, 最后得:

$$C_D = \frac{2\pi}{J} \left(1 + \sigma + \frac{\varepsilon^2}{6} + \frac{\gamma^2}{6} \right) \left[\sin \beta + \frac{A_1}{2} \right]^2 \quad (4.12)$$

$$C_L = \frac{2\pi}{J} \left(1 + \sigma + \frac{\varepsilon^2}{4} + \frac{\gamma^2}{6} \right) \left\{ \left[\sin \beta \cos \beta + A_1 \cos \beta + \frac{A_2}{2} \right] + \frac{\varepsilon^2}{4} \frac{\cos \beta}{(\sin \beta + A_1/2)^4} \left[\left(\sin \beta + \frac{A_1}{2} \right)^3 + \sin \beta \left(\sin \beta + \frac{A_1}{4} \right) \left(\frac{A_1}{2} + \frac{5}{4} A_2 + A_3 \right) \right] \right\} \quad (4.13)$$

$$C_M = \frac{4\pi}{J^2} \left(1 + \sigma + \frac{\gamma^2}{3} \right) K + \mu (C_L \cos \alpha + C_D \sin \alpha) \quad (4.14)$$

这儿 β 、 A_1 、 A_2 、 A_3 仍由 (4.7)~(4.10) 式给出; J 由 (3.18) 式; K 由 (3.19); μ 由 (3.20)、(3.21) 而 $\varepsilon = \frac{1}{2} \log(1 + \sigma)$ 。平板水翼的结果可在上面表示式中令 $\gamma = 0$ 而导出。对圆弧翼以正的攻角 α 而凸边对着来流时(见图 4a), 若 γ 设为负值, 上面的公式仍属有效。对 γ 为正、 α 为负的流动图形(见图 4b), 则 C_D 的结果

仍然相同, 而 C_L 和 C_M 与图(4a)的流动情况有相反的符号。

然而, 存在着几个混杂的地方, 此时上面结果将为无效, 从而使用时必须十分注意。首先, 通常有一个一定的小 α , 如 α_p , 或正或负, 由 (3.33)、(3.34) 式给出的自由流线于该攻角时将切割到固体边界之内。可以推想到,

空泡尾部接于固体边界的局部空泡流动可能已在 α 等于 α_p 的附近建立了。然而本文理论肯定是不包括局部空泡流的, 其次, 这儿有另一个 α 的临界值即 $\beta = 0$ 时的 $\alpha_c(\gamma, \sigma)$, 此时驻点落在前缘。从而对 $\alpha < \alpha_c$ 时空泡将移至边界的另一边。 α_c 的值通常小于 α_p 。再次, 如图 4 所示的流动图形, 流线在 B 处较 A 更处于临界状态。换句话说, 对足够小的攻角 α , 流动在 B 的前面更可能分离; 如此, 边界的后部将在全空泡之内。这个临界条件将发生于下述情形, 即当流线 BD' 在 B 点处的斜率或者曲率半径数值上大于 B 处固体边界相应值的时候。

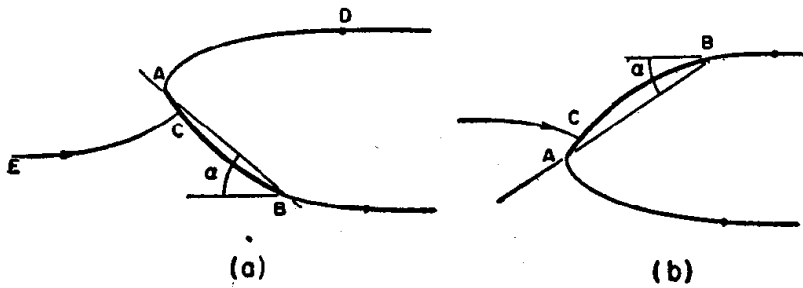


图 4

a. 傾斜平板 对傾斜平板 $\gamma=0$, 因而(4.7)~(4.10)式簡化为

$$\beta = \alpha + \frac{1}{2} [(\alpha^2 + \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}} - \alpha] - \frac{1}{4} \varepsilon^2 / (\pi - \alpha) \quad (4.15)$$

$$A_1 = \frac{9}{16} [(\alpha^2 + \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}} - \alpha] + \frac{9}{32} \varepsilon^2 / (\pi - \alpha) \quad (4.16)$$

$$A_2 = 0, \quad A_3 = -\frac{1}{9} A_1$$

$$J = 4 + \pi \sin \beta + A_1 (\pi + 2.72 \sin \beta) \quad (4.17)$$

C_L 和 C_D 的表示式可簡化为:

$$C_D \cong \frac{2\pi}{J} \left(1 + \sigma + \frac{\varepsilon^2}{6} \right) \left[\sin \beta + \frac{A_1}{2} \right]^2 \quad (4.18)$$

$$C_L \cong \frac{2\pi}{J} \left(1 + \sigma + \frac{\varepsilon^2}{4} \right) \cos \beta \left[(\sin \beta + A_1) + \frac{\varepsilon^2}{32} \frac{8 \sin \beta (\sin \beta + A_1)^2 + A_1^2 (A_1 - \sin \beta)}{(\sin \beta + A_1/2)^4} \right] \quad (4.19)$$

在 $\sigma=0$ (因而 $\varepsilon=0$) 的理想情况, $\beta=\alpha$ 而 A_1, A_2, A_3 全部为零, 上述結果簡化为傾斜薄片的 Rayleigh 理論[例如参考文献 15, 102 頁]:

$$C_D = \frac{2\pi \sin^2 \alpha}{4 + \pi \sin \alpha}; \quad C_L = C_D \cot \alpha \quad (4.20)$$

当 $\alpha=\pi/\alpha$ 但 $\sigma>0$, (4.17)~(4.19)式将成为

$$C_D \cong \frac{2\pi}{4 + \pi} \left(1 + \sigma + \frac{1}{6(4 + \pi)} \sigma^2 \right), \quad C_L = 0 \quad (4.21)$$

此式与已知的結果(也可参看(2.2)式)直到 σ 的項都是符合的。

对 α 和 σ 的一般数值, 必須指出一个物理条件。全部空泡流流过斜平板时, 局部压力处处是垂直于板面的, 此外这时在前緣不存在非空泡情形的奇点力。从而 C_L 和 C_D 必須滿足条件

$$C_D/C_L = \tan \alpha \quad \text{对全部 } \alpha \text{ 和 } \sigma \quad (4.22)$$

在(i) $\sigma=0$, (ii) α 等于 $\pi/2$ 而 $\sigma>0$ 这两个特殊情况, 上面的条件显然是滿足的(見(4.20)(4.21)式)。然而在一般的情形, 很难从(4.18)和(4.19)式导出这个关系, 由于其对 α 和 σ 的关系的复杂形式。这种場合, 条件(4.22)仅可在数值計算时用作校核以証实这理論的正确性。

当 α 是小值而 σ 是任意值时, Betz 曾給出过 C_L 的另一个近似表达式。主要的思想是首先綫性化 Rayleigh 公式(4.20)得到 $\pi\alpha/2$, 而后迭加上吸力面的压力系数, 就是 σ , 以得

$$C_L = \frac{1}{2} \pi \alpha + \sigma \quad (4.23)$$

这个近似式一般是太粗糙了。

另一方面, 当 σ 增加时空泡的尺度减小(見(3.37)、(3.38)式); 从实验观察到的若干情形, σ 大概大于 1.5 时, 空泡就完全消失了。在上述条件下 C_L 和 C_D 恢复到它們无空泡时的数值(空气动力学值)

$$C_L \cong 2\pi \sin \alpha, \quad C_D \cong (2 \cos \alpha) C_f \quad (4.24)$$

这儿 C_f 是板的一边的平均摩擦阻力系数。

图 5 和图 6 中由(4.19)式給出的 C_L 值按不同 σ 值画成对 α 的曲线。(4.24)式給出的 C_L 的空气动力学值也示于图以資比較。对給定的空泡数 σ , 存在着一个确定的小 α , 如 α_p , 該时 C_L 的空泡值就等于空气动力学值, 假如全空泡的模型假定仍然是可能的話(例如 $\sigma=0.4$ 时 $\alpha_p=4.5^\circ$)。不加验证而进一步将(4.19)式外推到小的 α 值(虚线)将产生不合理的結果, 即 C_L 的空泡时的值将会大于对应的空气动力学值。由物理上判断这个結果是不能接受的。换言之, 我們在 α 接近 α_p 时应该认为会发生一个全空泡和全浸湿条件之間过渡阶段的局部空泡流动, 这个推断由如图 5 和图 6 上的点划线所示的实验事实所支持。如此, 对全浸湿水翼而言, C_L 的空气动力学值实际上是空泡翼 C_L 的漸近值, 空泡翼的 C_L 对每一 σ , 当 α 从 α_p 减少时, 从下面接近于此值。

由(4.18)式給出的 C_D 值类似地画于图 7 和图 8。在有实际意义的空泡范围, 流动的雷诺数通常是很大的, 如 5×10^5 或更大的量级。則摩擦阻力系数 C_f 可以用 Prandtl-Schlichting 公式[例如見文献 17, 33 頁]

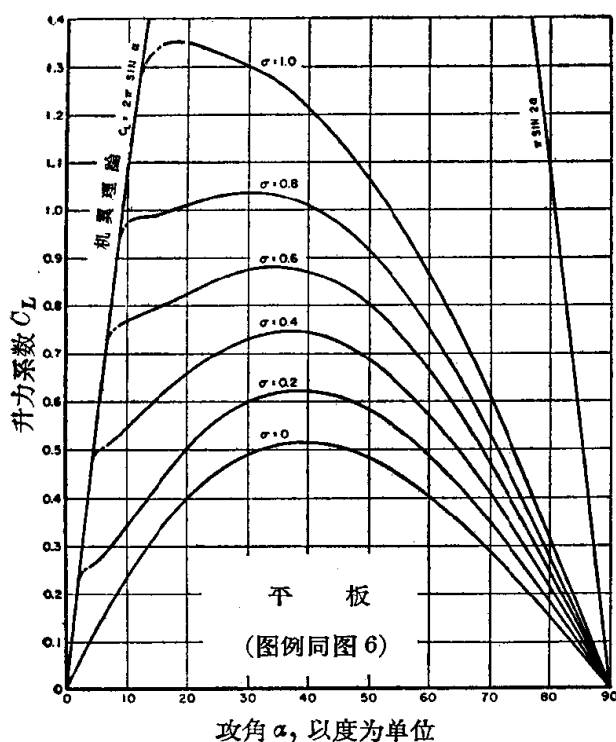


图5 C_L 对 α 的关系

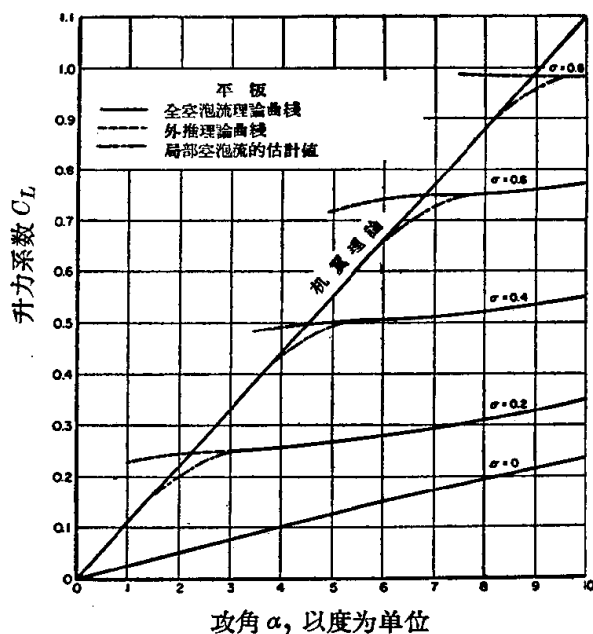


图6 小攻角时的 C_L 值

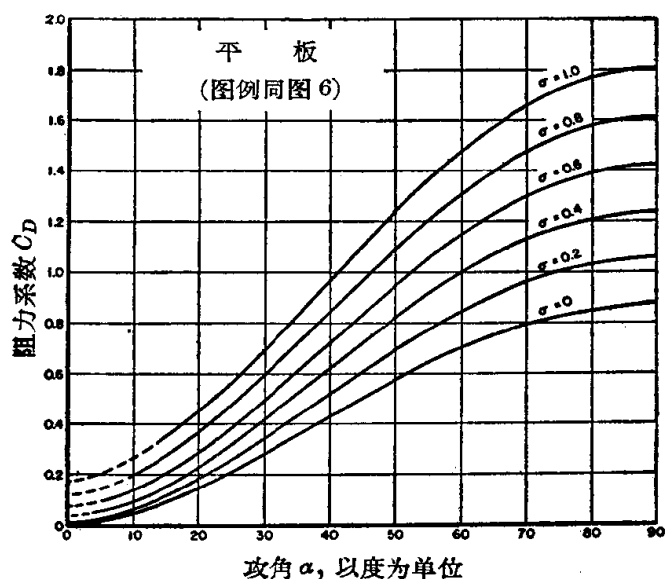


图7 C_D 对 α 的关系

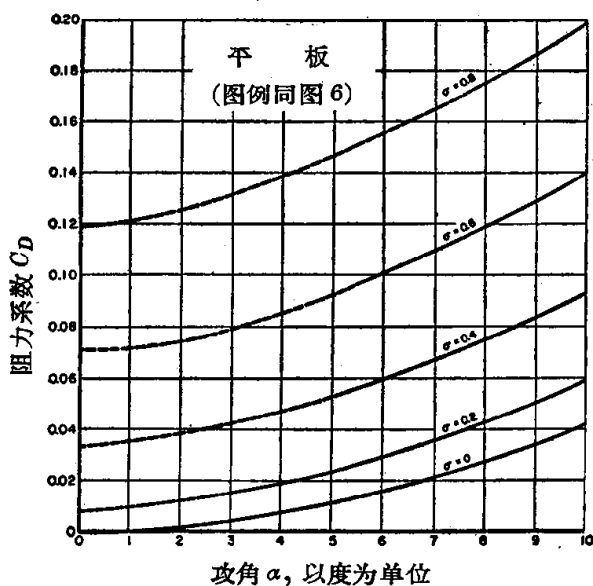


图8 小攻角时的 C_D 值

估计约为 0.005 数量级,此值和所有 α 和 σ 时空泡翼的 C_D 值相比要小得多,从而可以忽略。

在加省理工学院 (California Institute of Technology) 流体力学实验室曾完成了一系列实验^[18], 本文理论结果也在差不多同时获得。为了以理论与实验比较, C_L 和 C_D 进一步按 σ 画于图 9 和图 10, 图上也表示了实验数据^①。符合程度是很好的。作为一种进一步的校核, C_L/C_D 的值对若干 σ 按 α 画出并与 $\cot \alpha$ 比较于图 11。偏差说明本理论的精确性。

这儿汇总一下前述结果的若干要点

(i) 图 9 和图 10 所画结果表明, 对大的 α , 例如大于 45° , C_L 和 C_D 值分别的接近用虚线表示图上的渐近表达式。

$$C_L(\sigma, \alpha) = (1 + \sigma)C_L(0, \alpha), \quad C_D(\sigma, \alpha) = (1 + \sigma)C_D(0, \alpha) \quad (4.25)$$

① 这些实验数据已计入了洞壁效应引起的修正。然而, 空泡数 σ 是基于测量出的空泡压力算出的, 此压力大致地吸收了一部分洞壁效应修正。详细的描述可参看文献[18]。

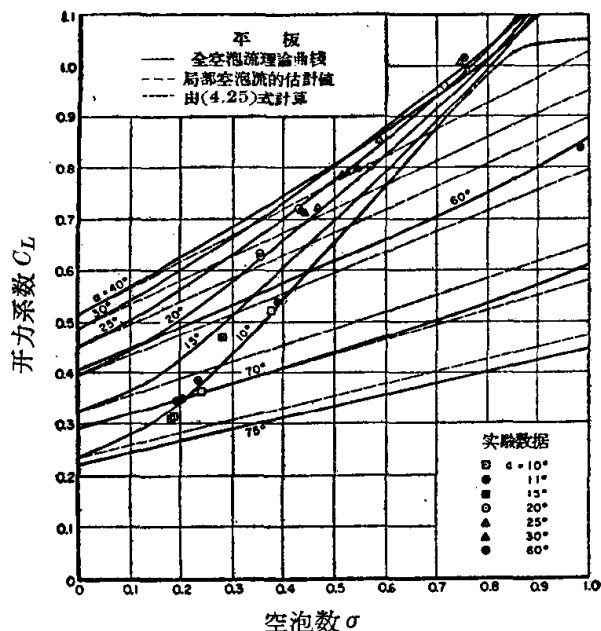


图9 C_L 对 σ 的关系

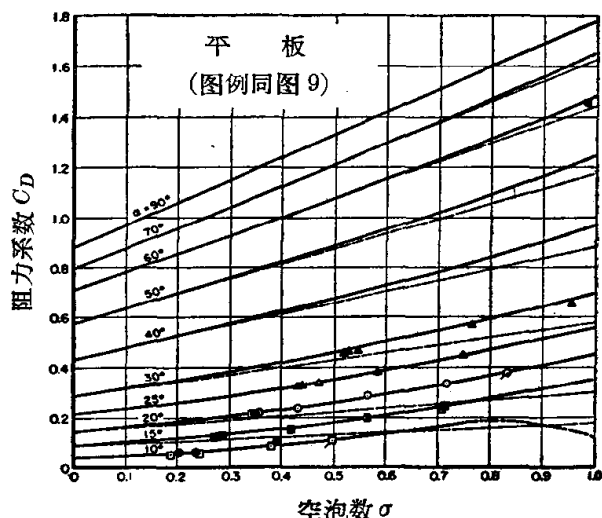


图10 C_D 对 σ 的关系

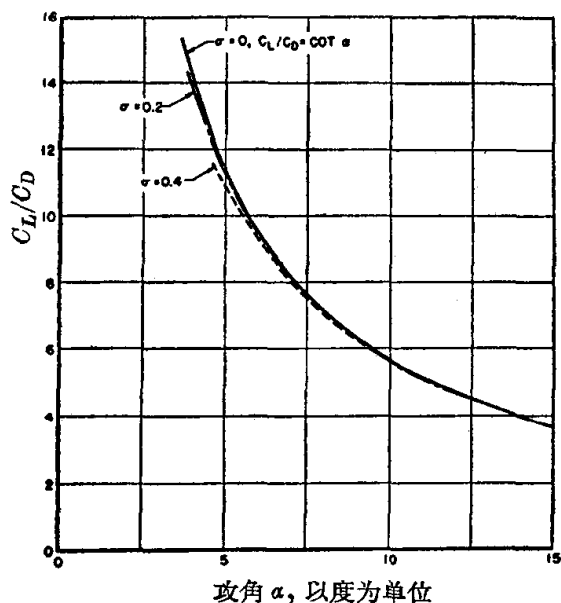


图11 平板的 C_L/C_D 值

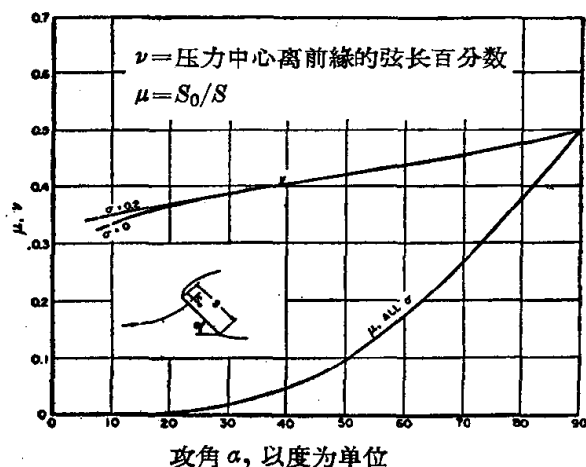


图12 驻点和压力中心的位置(平板)

对 α 小的值, 它们明显地偏离这些渐近线; 对 C_L 偏差更为显著, 因为这儿 C_D 的偏差又经过了 $\cot \alpha$ 因子的放大。例如, 斜率 $dC_L/d\sigma$ 当 $\alpha < 15^\circ$ 并 $\sigma > 0.2$ 时比单位值要大得多。

(ii) 从图5和图6注意到, 水翼在小的 α 而达到全空泡时, $dC_L/d\alpha$ 减少到比全浸湿情形(近似等于 2π) 小得多的值。这意味着全空泡水翼对攻角 α 的变化很不敏感。而由于关系式(4.22), 阻力系数相对说来较为敏感些。把(4.22)式对 α 求导, 我们得到

$$\frac{1}{C_D} \frac{dC_D}{d\alpha} = \frac{1}{C_L} \frac{dC_L}{d\alpha} + \csc 2\alpha \quad (4.26)$$

如此, C_D 的百分数变化也要大于 C_L 的百分数变化。

驻点位置, 由(3.18)和(3.20)式给出的 $\mu = S_0/S$, 对斜平板, 用(4.15)~(4.17)式给出的值, 绘于图12。 σ 对 μ 仅有实际可忽略的影响是饶有兴趣的。由图9, 图10和图12之助, 进一步计算了对平板前缘的力矩系数 C_{M_0} (见(4.14)式, 取 $\gamma=0$) 并对 σ 绘于图13。 C_{M_0} 的理论值也与实验值^[18] 符合很好。从这些结果, 压力中心的位置

$$\nu = C_{M_0} / (C_L \cos \alpha + C_D \sin \alpha) \quad (4.27)$$

可容易地导出。結果表明, ν 象 μ 一样在全部实际 σ 的范围是和 σ 无关的 (见图 12)。它几乎是线性地从在小的 α 时的三分之一弦长变化到 $\alpha = \pi/2$ 时的半弦长。

(3.33), (3.34) 式給出的自由流綫的位置, 对 $\alpha = 10^\circ$ 作了計算, 并繪于图 14。

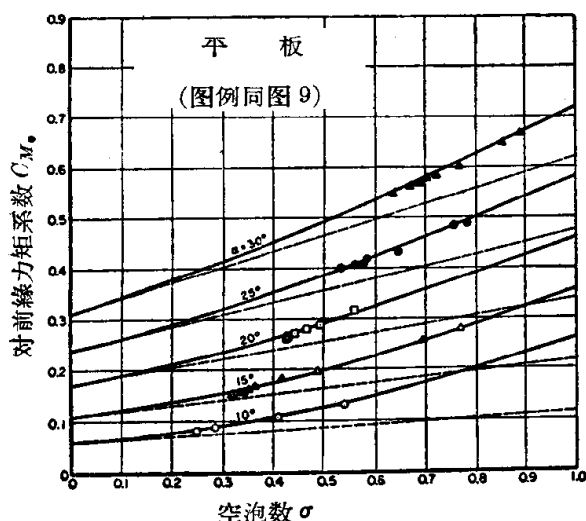


图 13

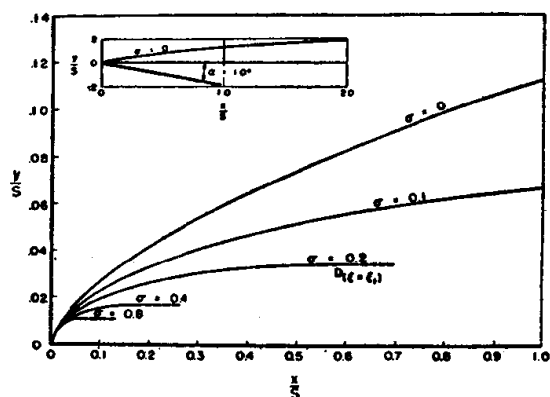


图 14 自由流綫的一些計算位置

b. 圓弧水翼的例子; 进一步討論

有了平板水翼的一些基本水动力学性质的知識, 我們可以由圓弧水翼的研究指出在空泡流中拱度效应的一些基本性质。

首先, 当 γ 和 ε 均假定为微量, 則在 $\alpha = \pi/2$ 时, 可得

$$A_1 \cong \gamma + \frac{9}{8\pi} \varepsilon^2, \quad A_3 \cong -\frac{\varepsilon^2}{8\pi} - 0.05\gamma$$

$$A_2 \text{ 和 } (\beta - \alpha) = 0 (\gamma \varepsilon^2)$$

从而

$$C_D \cong \frac{2\pi}{4+\pi} (1+\sigma) \left[1 + \frac{4\gamma}{3(4+\pi)} \right], \quad C_L = 0 \quad (4.28a)$$

是故

$$\left(\frac{dC_D}{d\gamma} \right)_{\alpha=\pi/2} \cong \frac{8\pi}{3(4+\pi)^2} (1+\sigma) \cong \frac{1}{6} (1+\sigma) \quad (4.28b)$$

这些式子描述了純阻力問題的拱度效应。

其次, 为了在所有 α 值时显示对 C_L 和 C_D 的拱度效应, 我們考虑极限情形 $\varepsilon \rightarrow 0$ 和 $\gamma \rightarrow 0$, 在此情形

$$\frac{dA_1}{d\gamma} \rightarrow 1, \quad \frac{dA_2}{d\gamma} = -\frac{d\beta}{d\gamma} \rightarrow \frac{\cos \alpha}{4+\pi \sin \alpha}$$

从而由 (4.12)、(4.13) 式可得, 当 $\varepsilon \rightarrow 0$, $\gamma \rightarrow 0$,

$$\frac{dC_L}{d\gamma} \cong \frac{7\pi \cos \alpha}{(4+\pi \sin \alpha)^2} \left\{ 1 + \frac{16}{21} \sin \alpha + \frac{4}{7} \sin^2 \alpha \right\} \quad (4.29)$$

$$\frac{dC_D}{d\gamma} \cong \frac{4\pi \sin \alpha}{(4+\pi \sin \alpha)^2} \left\{ 1 - \frac{1}{3} \sin^2 \alpha + \frac{\pi \sin \alpha \cos^2 \alpha}{4(4+\pi \sin \alpha)} \right\} \quad (4.30)$$

是故

$$\frac{dC_L}{d\gamma} \rightarrow \frac{7\pi}{16}, \quad \frac{dC_D}{d\gamma} \rightarrow 0 \quad \text{当 } \alpha \rightarrow 0, \gamma \rightarrow 0 \text{ 和 } \varepsilon \rightarrow 0 \quad (4.31)$$

$$\frac{dC_D}{d\gamma} \rightarrow \frac{8\pi}{3(4+\pi)^2}, \quad \frac{dC_L}{d\gamma} \rightarrow 0 \quad \text{当 } \alpha \rightarrow 0, \gamma \rightarrow 0 \text{ 和 } \varepsilon \rightarrow 0 \quad (4.32)$$

此結果表明, 即当小攻角 α 时正的拱度是十分有利的, 因增加了 C_L , 而对 C_D 的效应可忽略。从另一方面, 当 σ 为很大, 以致水翼全浸湿时, 則我們获得熟知的 C_L 的空气动力值

$$C_L = 2\pi \sin \left(\alpha + \frac{\gamma}{2} \right) \quad (4.33)$$

对它我們求得

$$\left(\frac{dC_L}{d\gamma}\right)_{\alpha \rightarrow 0, \gamma \rightarrow 0} = \pi \tag{4.34}$$

虽然完全空泡水翼的 $dC_L/d\gamma$ 值小于完全浸湿流值,然而可以在不同的基准上进行比较。若我們比較这些数值按同样的有效攻角(空气动力学的)

$$\alpha_e = \alpha + \frac{1}{2} \gamma$$

則 C_L 的空气动力学值对同样的 α_e 是几乎全同的,但是 C_L 的空泡流动值当 γ 增加而保持 α_e 不变时 仍然增加。在此情况的增加率在相等的 α_e 可以估計为 $dC_L/d\gamma = \frac{1}{2}$ 。 $\sigma = 0$ 时 γ 对 C_L 和 C_D 的影响按两个 γ 的特殊值 4° 和 8° , 表示于图 15 和图 16。

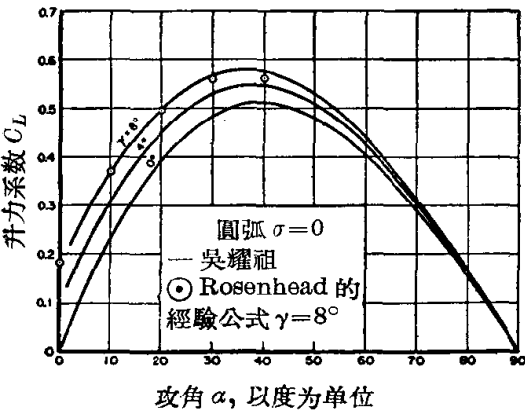


图 15 $\sigma = 0$ 时 C_L 的拱度效应

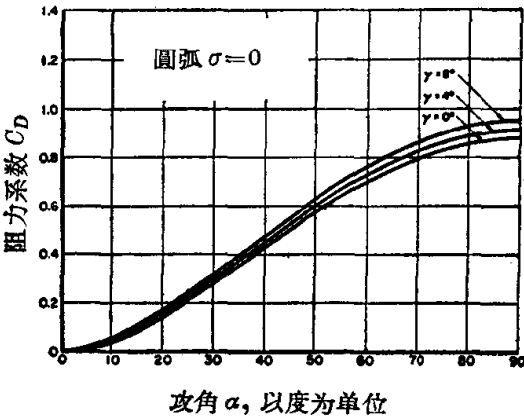


图 16 $\sigma = 0$ 时 C_D 的拱度效应

Rosenhead 提出了在 $\sigma = 0$ 对小拱度的一个經驗公式如下^[2]:

$$C_P = \frac{2\pi \sin \alpha}{4 + \pi \sin \alpha} + \frac{20\pi}{9} \frac{2 + \cos \alpha + 3 \cos^2 \alpha}{(4 + \pi \sin \alpha)^2} \tan \frac{\gamma}{2} \tag{4.35a}$$

和

$$C_L = C_P \cos \delta, \quad C_D = C_P \sin \delta \tag{4.35b}$$

这儿 δ 角可按 Rosenhead 的經驗公式計算。 δ 的值通常十分接近 α 。(4.35) 式按 $\gamma = 8^\circ$ 时的几个点子繪于图 15。結果表明这个公式与本文理論在小 α 时符合得很好。

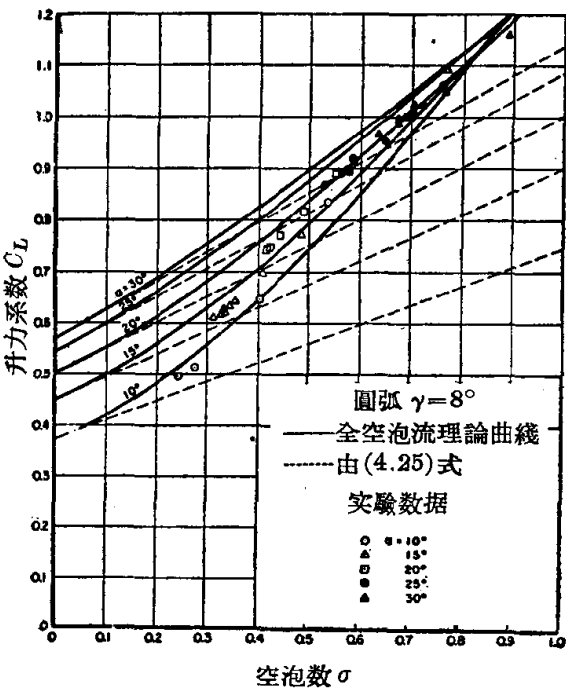


图 17

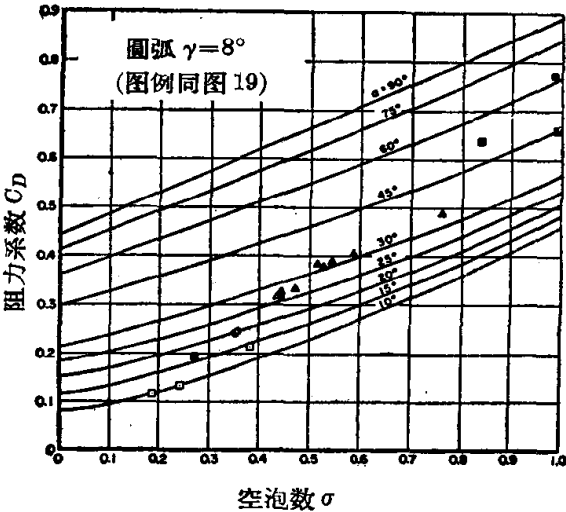


图 18