高等数学题解词典

问题与解答

陕西科学技术出版社

高等数学题解词典

问题与解答

陕西科学技术出版社

（陕）新登字 002 号

高等数学题解辞典
——问题与解答
陕西科学技术出版社出版发行
（西安北大街 131 号）
开源新技术研究所排版
新华书店经销　　西北大学印刷厂印刷
787×1092 毫米　32 开本　67 印张　4 插页　211.5 万字
1993 年 10 月第 1 版　1993 年 10 月第 1 次印刷
印数 1—4000
ISBN 7—5369—1169—6/O·37
定价：40 元

前　言

近年来，随着科学、文化教育事业的发展，许多院校的数学教师热切希望有一本以题解为中心的、比较系统、实用的高等数学工具书。鉴于建国40年来全国各大专院校数学教学已经积累了丰富的实践经验，各种文献资料也提供了众多的题材，这就有可能在总结我国数学教学实践经验的基础上，广泛吸收各方面的精华，编写一部适合我国情况又能体现当代这门课程发展特点，查阅比较方便的高等数学题解辞典。为此，我们邀请部分富有教学经验的数学教师编写了这部大型工具书。

本辞典是以题解为中心的工具书，内容包括函数、极限、连续、导数、积分、空间解析几何、多元函数微分学、重积分、线积分和面积分、级数、微分方程等11章，主要供大专院校数学教师教学、进修时使用，也可供广大数学爱好者及大专院校学生参考。

编写本辞典时，力求贯彻以下要求：

1. 重视提高解题的分析能力，由于高等数学本身的特点及能参阅本辞典的读者水平都较高，所以对每题不专作分析解说，而只作简捷的数学运算，只在适当的地方作些说明，使读者不仅得到简明而准确的解答，而且也能培养分析问题和

AB/64 / 0

解决问题的能力。

2. 在各段题目的编写时注重题材的广泛性、典型性、技巧性与综合性。

3. 注意题材的归类，以典型带一般，题目编排分类清楚，条理分明，各类题目选好典型，使读者举一反三，触类旁通。

4. 十多年来我国为了招考研究生，广大数学工作者自编了很多综合性强、技巧性高的好试题，我们精选了很多这方面的题目，编入本书。

本辞典的编写工作始筹于 1985 年，第一稿在郑州地区完成，第二稿在西安等地区完成（是以西安地区为中心，包括北京、郑州、武汉、海口等地区的 30 多位教授学者参加）。其间曾在郑州航空工业管理学院、西北建筑工程学院、海南大学召开三次编审会议，先后历时 7 年。我们希望这部辞典能反映出我国数学工作者 40 年来在高等数学教学方面的成就，这是我们编者们的共同心愿。

本书在编写过程中承蒙许多数学界老前辈和同仁们鼓励、支持和帮助，尤其是西安冶金建筑学院潘鼎坤教授，对全部内容提要作了逐字逐句的仔细审查，参加部分工作的还有夏旭芳、康晓雯、刘彦波、黄文阁、郑旭东、毛毅杰、张立红和李芳，在此一并致谢。

由于我们水平有限，参加编写的人员较多，而且很分散，上述编写要求未必都能达到，选材也可能有疏漏和不当之处，望读者批评指正。

编　者

1992 年 4 月

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

编写说明

1. 收录范围　本书是以工科高等数学内容为中心，兼顾理科数学分析的内容。本书辑录了目前我国工科院校高等数学课程新涉及到的主要题型，还选进了一部分数学分析的题目，吸收了国外有影响资料的部分题目，也辑录了我国高等院校、科研单位的硕士研究生入学试题、本科生试题和数学竞赛试题的部分内容，还辑录了国内数学杂志的部分典型题目，共收录题目 3800 余道。附录介绍高等数学发展简史，简介高等数学中有关的数学家。

2. 目录与问题的编排　为了使读者容易找到所查问题或者类似问题的解法，本辞典仍按我国目前高等数学的体系，按章、节、段来编排，这完全体现在目录中，从而使目录能起到索引的作用。在问题的编排上采取尽量收罗的办法，每段内题目安排的原则是由浅入深，由易到难，以典型带一般，使读者能举一反三，触类旁通，使本书起到辞典的作用。

题号是按节来编的，比如，10.1.81 表示第 10 章第 1 节第 81 题。插图是随题号编序的。

3. 内容提要　每节开头的内容提要，为解题或证题提供了必要的依据(包括定义、定理、法则、公式等内容)。

4. 概念题与综合题的处理　在每章或每节中均安排有概念题(是非题),其意义在于从正、反两个方面来理解概念,这是近年来在本科生考试中试题标准化时,经常出现的形式。

在每章最后安排有一节综合题目。它的内容系指在本节以前各章、节出现的,但不涉及以后的内容。在考研究生的试题中这类问题很多。

5. 一题多解　题目一般是一题一解,部分题目有其它较好解法的,则安排一题多解,以启迪解题的思维能力和熟悉各公式的应用。在本书中已收录题目的结论,在其他题目中应用时一般不再重复,只注明"参阅第×××题"。

编　者

1992 年 4 月

顾　　问：刘书琴　赵根榕　孙家永　潘鼎坤
游兆永　费定晖　石殿章
主　　编：蒋传章　陈俊杰　黄璞生　赵汝怀
参加编写人员：（以姓氏笔划为序）
孔　黎　方金华　田　平　孙明芳　刘应平
李　华　李锦江　李志毅　李心灿　吴宗海
吴之成　吴文海　陈俊杰　沈元林　杨文光
杨熙鹏　周德晖　郑兴国　张自立　张福祥
张韵琴　郭越昆　侯双根　侯双印　赵汝怀
骆古道　徐仲元　高西尧　聂乃明　梁振辉
梁国鼎　黄璞生　彭建华　蒋传章　雷同慎
蔡　亮　潘正君　薛　维

责任编辑：赵生久
责任校对：黄璞生　赵生久
封面设计：史文博
内文设计：惠红彦

目　　录

第一章　分析引论

§1 实数 …… 【1】

内容提要

问题与解答(1.1.1—1.1.20) …… 【4】

§2 不等式 …… 【11】

内容提要

问题与解答(1.2.1—1.2.15) …… 【11】

§3 数列极限 …… 【20】

内容提要

问题与解答(1.3.1—1.3.123) …… 【22】

1. 数列极限的定义(1.3.1—1.3.25) …… 【22】
2. 柯西准则(1.3.26—1.3.33) …… 【34】
3. 夹逼定理(1.3.34—1.3.48) …… 【38】
4. 单调有界数列的极限(1.3.49—1.3.75) …… 【45】
5. 施笃兹定理和托普利兹定理(1.3.76—1.3.85) …… 【60】
6. 综合问题(1.3.86—1.3.123) …… 【66】

第二章　函数与极限

§1 函数及其图象 …… 【91】

内容提要

问题与解答(2.1.1—2.1.109) …… 【93】

1. 求函数的定义域、值域(2.1.1—2.1.19) …… 【93】
2. 求函数值、建立函数关系式(2.1.20—2.1.32) …… 【97】
3. 函数的运算(四则运算、复合、求反函数)

(2.1.33—2.1.48) …… 【101】
4. 判断单调性(2.1.49—2.1.52) …… 【108】
5. 判断有界性(2.1.53—2.1.56) …… 【110】
6. 判断周期性(2.1.57—2.1.67) …… 【111】
7. 判断奇偶性(2.1.68—2.1.73) …… 【115】
8. 函数作图(2.1.74—2.1.92) …… 【117】
9. 有界变差函数、凸函数(2.1.93—2.1.98) …… 【130】
10. 综合问题(2.1.99—2.1.109) …… 【133】
§2 函数的极限 …… 【137】
内容提要
问题与解答(2.2.1—2.2.139) …… 【139】
1. 用定义证极限(2.2.1—2.2.6) …… 【139】
2. 极限的计算(2.2.7—2.2.113) …… 【143】
(1) 求左、右、上、下极限(2.2.7—2.2.10) …… 【143】
(2) 有理式的极限(2.2.11—2.2.18) …… 【144】
(3) 无理式的极限(2.2.19—2.2.38) …… 【147】
(4) 幂指函数的极限(2.2.39—2.2.59) …… 【155】
(5) 三角函数有理式或无理式的极限
(2.2.60—2.2.91) …… 【163】
(6) 含有指数函数、对指函数的极限
(2.2.92—2.2.110) …… 【178】
(7) 极限方程(2.2.111—2.2.113) …… 【183】
3. 综合问题(2.2.114—2.2.139) …… 【185】
§3 函数的连续性 …… 【199】
内容提要
问题与解答(2.3.1—2.3.106) …… 【201】
1. 证明连续(2.3.1—2.3.6) …… 【201】
2. 求间断点(2.3.7—2.3.18) …… 【204】
3. 讨论连续性(2.3.19—2.3.49) …… 【210】
4. 连续函数的性质(2.3.50—2.3.64) …… 【224】
5. 判断方程的根(2.3.65—2.3.68) …… 【230】
6. 利用连续性求极限(2.3.69—2.3.74) …… 【231】
7. 一致连续(2.3.75—2.3.95) …… 【234】

8. 综合问题(2.3.96—2.3.106) ……【243】
第三章　一元函数微分学
§1 导数与微分 ……【249】
内容提要
问题与解答(3.1.1—3.1.237) ……【253】
1. 基本概念(3.1.1—3.1.25) ……【253】
2. 显函数的导数(3.1.26—3.1.137) ……【259】
(1) 定义求导法(3.1.26—3.1.48) ……【259】
(2) 函数和、差、积、商的导数(3.1.49—3.1.52) ……【269】
(3) 复合函数的导数(3.1.53—3.1.66) ……【270】
(4) 反函数的导数(3.1.67—3.1.73) ……【275】
(5) 对数求导法(3.1.74—3.1.80) ……【278】
(6) 幂指函数的导数(3.1.81—3.1.89) ……【280】
(7) 分段函数的导数(3.1.90—3.1.108) ……【283】
(8) 含绝对值符号的函数的导数
(3.1.109—3.1.120) ……【296】
(9) 极限函数的导数(3.1.121—3.1.127) ……【300】
(10) 抽象函数的导数(3.1.128—3.1.137) ……【304】
3. 隐函数的导数(3.1.138—3.1.150) ……【306】
4. 用参数方程所确定的函数的导数
(3.1.151—3.1.162) ……【311】
5. 高阶导数(3.1.163—3.1.219) ……【316】
6. 一阶和高阶微分(3.1.220—3.1.237) ……【343】
§2 中值定理 ……【348】
内容提要
问题与解答(3.2.1—3.2.72) ……【350】
1. 基本概念(3.2.1—3.2.10) ……【350】
2. 罗尔、拉格朗日、柯西定理(3.2.11—3.2.59) ……【353】
3. 函数的泰勒展开(3.2.60—3.2.72) ……【379】
§3 洛比达法则 ……【386】
内容提要
问题与解答(3.3.1—3.3.40) ……【387】

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

1. $\frac{0}{0}$ 型不定式求值(3.3.1—3.3.11) ……【387】
2. $\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式求值(3.3.12—3.3.17) ……【391】
3. 其它类型的不定式求值(3.3.18—3.3.40) ……【393】
§4 函数研究 ……【402】
内容提要
问题与解答(3.4.1—3.4.149) ……【405】
1. 基本概念(3.4.1—3.4.17) ……【405】
2. 函数的单调性(3.4.18—3.4.36) ……【411】
3. 函数的极值和最值(3.4.37—3.4.104) ……【418】
(1) 极值的求法(3.4.37—3.4.59) ……【418】
(2) 最大值与最小值的求法(3.4.60—3.4.71) ……【427】
(3) 几何方面的极值问题(3.4.72—3.4.88) ……【433】
(4) 物理方面的极值问题(3.4.89—3.4.104) ……【451】
4. 曲线的凹凸性与拐点(3.4.105—3.4.127) ……【465】
5. 渐近线(3.4.128—3.4.132) ……【475】
6. 曲率(3.4.133—3.4.139) ……【477】
7. 函数的作图(3.4.140—3.4.149) ……【481】
§5 导数的应用 ……【493】
问题与解答(3.5.1—3.5.200) ……【493】
1. 曲线的切线和法线(3.5.1—3.5.34) ……【493】
2. 物理应用(3.5.35—3.5.50) ……【508】
3. 函数的零点及方程的根(3.5.51—3.5.88) ……【517】
4. 有关函数及导数的等式(3.5.89—3.5.109) ……【535】
5. 不等式的证明(3.5.110—3.5.157) ……【548】
(1) 用中值定理证明不等式(3.5.110—3.5.136) ……【548】
(2) 用单调性证明不等式(3.5.137—3.5.157) ……【565】
6. 近似计算及误差估计(3.5.158—3.5.178) ……【574】
7. 综合问题(3.5.179—3.5.200) ……【583】
第四章 不定积分
§1 不定积分的概念、基本公式及换元积分法 ……【594】
内容提要

问题与解答(4.1.1—4.1.145) ……【596】
1. 基本概念(4.1.1—4.1.16) ……【596】
2. 用基本公式求积分(4.1.17—4.1.34) ……【603】
3. 第一类换元法(4.1.35—4.1.111) ……【606】
4. 第二类换元法(4.1.112—4.1.129) ……【626】
5. 用倒代换 $x=\frac{1}{t}$ 求积分(4.1.130—4.1.140) ……【636】
6. 不定积分的应用(4.1.141—4.1.145) ……【640】
§2 分部积分法 ……【642】
内容提要
问题与解答(4.2.1—4.2.87) ……【642】
§3 有理函数的积分 ……【672】
内容提要
问题与解答(4.3.1—4.3.75) ……【673】
1. 观察法(4.3.1—4.3.7) ……【673】
2. 配项法(4.3.8—4.3.47) ……【676】
3. 待定系数法(4.3.48—4.3.68) ……【692】
4. 奥斯特洛格拉特斯基方法(4.3.69—4.3.71) ……【705】
5. 综合问题(4.3.72—4.3.76) ……【710】
§4 简单无理函数的积分法 ……【715】
内容提要
问题与解答(4.4.1—4.4.63) ……【716】
1. 形如 $\int R[x,(ax+b)^{m_1/n_1},(ax+b)^{m_2/n_2},\cdots]dx$
的积分(4.4.1—4.4.14) ……【716】
2. 形如 $\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$、$\int\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$
$\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{ax^2+bx+c}}$、$\int\frac{p_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$
的积分(4.4.15—4.4.47) ……【724】
3. 微分二项式 $\int x^m(a+bx^n)^p dx$ 的积分
(4.4.48—4.4.57) ……【741】
4. 其它形式的无理函数的积分(4.4.58—4.4.63) ……【745】

§5 三角函数有理式的积分 …… 【752】
内容提要
问题与解答(4.5.1—4.5.72) …… 【753】
1. 形如 $\int R(\sin x,\cos x)dx$ 的积分(4.5.1—4.5.9) …… 【753】
2. 形如 $\int \sin^m x\cos^n x dx$ 的积分(4.5.10—4.5.25) …… 【758】
3. 形如 $\int \mathrm{tg}^m x dx$ 和 $\int \mathrm{ctg}^m x dx$ 的积分
(4.5.26—4.5.29) …… 【763】
4. 形如 $\int \mathrm{tg}^m x\sec^n x dx$ 和 $\int \mathrm{ctg}^m x\csc^n x dx$ 的积分
(4.5.30—4.5.52) …… 【764】
5. 形如 $\int \sec^{2n+1} x dx$ 和 $\int \csc^{2n+1} x dx$ 的积分
(4.5.53—4.5.58) …… 【773】
6. 形如 $\int \sin mx\cos nx dx$, $\int \sin mx\sin nx dx$
的积分(4.5.59—4.5.72) …… 【775】
§6 综合问题 …… 【780】
问题与解答(4.6.1—4.6.29) …… 【780】
第五章 定积分
§1 定积分的概念 …… 【791】
内容提要
问题与解答(5.1.1—5.1.26) …… 【793】
1. 定积分的基本概念(5.1.1.—5.1.9) …… 【793】
2. 用定义求积分(5.1.10—5.1.21) …… 【796】
3. 用定积分求极限(5.1.22—5.1.26) …… 【805】
§2 定积分的性质 …… 【809】
内容提要
问题与解答(5.2.1—5.2.48) …… 【810】
§3 定积分的计算 …… 【835】
内容提要
问题与解答(5.3.1—5.3.91) …… 【836】
1. 基本概念(5.3.1—5.3.10) …… 【836】

2. 变上限的定积分(5.3.11—5.3.19) …… 【839】
3. 牛顿—莱布尼兹公式(5.3.20—5.3.43) …… 【843】
4. 定积分的换元法(5.3.44—5.3.75) …… 【852】
5. 定积分的分部积分法(5.3.76—5.3.91) …… 【871】
§4 广义积分 …… 【880】
内容提要
问题与解答(5.4.1—5.4.46) …… 【882】
1. 积分区间为无穷区间(5.4.1—5.4.15) …… 【882】
2. 被积函数有无穷间断点(5.4.16—5.4.28) …… 【887】
3. 综合问题(5.4.29—5.4.46) …… 【893】
§5 定积分的近似计算 …… 【902】
内容提要
问题与解答(5.5.1—5.5.12) …… 【903】
1. 矩形公式(5.5.1—5.5.2) …… 【903】
2. 梯形公式(5.5.3—5.5.4) …… 【904】
3. 辛卜生公式(5.5.5—5.5.12) …… 【906】
§6 定积分的应用 …… 【913】
内容提要
问题与解答(5.6.1—5.6.45) …… 【915】
1. 求平面图形的面积(5.6.1—5.6.9) …… 【915】
2. 求曲线的弧长(5.6.10—5.6.17) …… 【922】
3. 求立体的体积与表面积(5.6.18—5.6.33) …… 【927】
4. 定积分在物理学中的应用(5.6.34—5.6.45) …… 【936】
§7 综合问题 …… 【943】
问题与解答(5.7.1—5.7.51) …… 【943】
第六章　空间解析几何
§1 空间直角坐标系 …… 【972】
内容提要
问题与解答(6.1.1—6.1.10) …… 【972】
§2 矢量代数 …… 【976】
内容提要
问题与解答(6.2.1—6.2.71) …… 【977】
1. 矢量的加减法(6.2.1—6.2.29) …… 【977】

2. 数量积(6.2.30—6.2.47) ……【989】
3. 矢量积(6.2.48—6.2.59) ……【996】
4. 混合积(6.2.60—6.2.71) ……【1000】
§3 平面……【1006】
内容提要
问题与解答(6.3.1—6.3.39) ……【1007】
§4 空间直线……【1026】
内容提要
问题与解答(6.4.1—6.4.45) ……【1027】
1. 空间直线的基本概念(6.4.1—6.4.13) ……【1027】
2. 直线、平面及两直线间的关系
(6.4.14—6.4.39) ……【1033】
3. 综合问题(6.4.40—6.4.45) ……【1051】
§5 曲面与空间曲线……【1055】
内容提要
问题与解答(6.5.1—6.5.40) ……【1056】
1. 曲面(6.5.1—6.5.38) ……【1056】
(1) 球面(6.5.1—6.5.13) ……【1056】
(2) 柱面(6.5.14—6.5.24) ……【1061】
(3) 锥面(6.5.25—6.5.31) ……【1067】
(4) 旋转曲面(6.5.32—6.5.38) ……【1071】
2. 空间曲线(6.5.39—6.5.40) ……【1077】
第七章　多元函数微分学
§1 多元函数的基本概念……【1079】
内容提要
问题与解答(7.1.1—7.1.32) ……【1080】
1. 多元函数的定义域(7.1.1—7.1.14) ……【1080】
2. 求函数的值(7.1.15—7.1.18) ……【1085】
3. 多元函数的极限(7.1.19—7.1.26) ……【1087】
4. 多元函数的连续性(7.1.27—7.1.32) ……【1091】
§2 多元函数的微分法……【1096】
内容提要
问题与解答(7.2.1—7.2.211) ……【1101】

1. 一阶偏导数(7.2.1.—7.2.21) ……【1101】
2. 高阶偏导数(7.2.22—7.2.29) ……【1113】
3. 全微分(7.2.30—7.2.38) ……【1116】
4. 复合函数微公法(7.2.39—7.2.71) ……【1122】
5. 隐函数及其微分法(7.2.72—7.2.137) ……【1139】
(1) 一个方程的情形(7.2.72—7.2.117) ……【1139】
(2) 方程组的情形(7.2.118—7.2.137) ……【1166】
6. 变量代换(7.2.138—7.2.172) ……【1180】
7. 方向导数与梯度(7.2.173—7.2.194) ……【1199】
8. 综合问题(7.2.195—7.2.211) ……【1210】
§3 多元函数微分学的几何应用……【1221】
内容提要
问题与解答(7.3.1—7.3.39) ……【1223】
1. 空间曲线的切线与法平面(7.3.1—7.3.15) ……【1223】
2. 空间曲面的切平面与法线(7.3.16—7.3.39) ……【1231】
§4 二元函数的泰勒公式……【1245】
内容提要
问题与解答(7.4.1—7.4.11) ……【1246】
§5 多元函数的极值……【1253】
内容提要
问题与解答(7.5.1—7.5.60) ……【1254】
1. 多元函数的极值(7.5.1—7.5.14) ……【1254】
2. 多元函数的条件极值(7.5.15—7.5.25) ……【1265】
3. 最大值和最小值(7.5.26—7.5.60) ……【1273】
第八章　重积分
§1 二重积分……【1302】
内容提要
问题与解答(8.1.1—8.1.62) ……【1305】
1. 二重积分的概念与性质(8.1.1—8.1.11) ……【1305】
2. 在直角坐标系中的二重积分的计算法
(8.1.12—8.1.39) ……【1311】
3. 在极坐标系中二重积分的计算法
(8.1.40—8.1.54) ……【1328】

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com