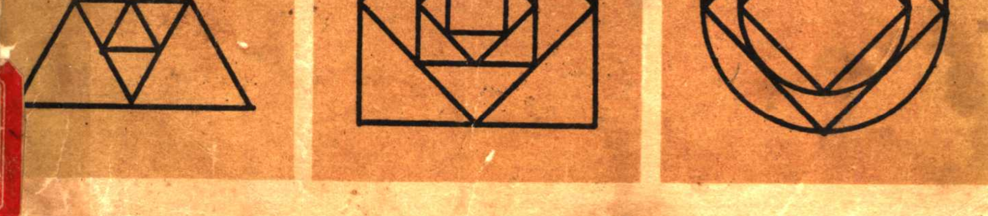
ZHONGXUESHUXUE
ZONGHELIANXITI

中学生课外读物

中学数学综合练习题



吉林人民出版社

中学生课外读物

中学数学综合练习题

朱英民　方昌武
祝忠杰　于庆轩　等编

吉林人民出版社

中学生课外读物

中学数学综合练习题

朱英民　方昌武
祝忠杰　于庆轩　等编

*

吉林人民出版社出版　吉林省新华书店发行
通化市印刷厂印刷

*

787×1092毫米32开本　18½印张 2 插页413,000字
1982年1月第1版　1982年1月第1次印刷
印数：1—107,010册
书号：7091·1327　定价：1.25元

前　　言

本书是根据《全日制十年制学校中学数学教学大纲》的要求和现行统编教材的内容编写的，共选编了代数、三角、平面几何、立体几何、解析几何等方面的综合性数学题一千余道，书后附有较详细的解答或提示，可供参考．本书配备的习题一是具有综合性，二是系统性，三是循序渐进．通过这些习题的训练，旨在加深对基础知识、基本概念的理解与运用，使之条理化、系统化、深入化，从而全面提高学生的理解能力、运算能力和逻辑思维能力．因此，本书适于毕业生及教师在复习教科书的基础上进行高考复习时使用，也可供中学其它年级学生、教师进行单元或期末复习时参考．

本书的编者有朱英民、方昌武、祝忠杰、于庆轩、王锡龙、曹秀仁、陈家常、李荫楷等，还有谷昭安、安玉坤、刘身和、王英志和王允利等同志也参加了编写工作．全书最后由方昌武、朱英民审定成稿．

编　者

一九八〇年八月

目　　录

*）括号内，前数指示题目开始的页数，后数指示解答或提示开始的页数。以下同。

第一章 代 数

§1. 实数的概念

1. 证明：奇数的平方必为奇数。

2. 证明：任意奇数的平方减去1所得的差必为8的倍数。

3. 证明：整数K的平方被4除之，所得的余数非0即1。

4. 证明：三个连续奇数的平方和加上1，必可被12整除，但不能被24整除。

5. 求用32、36、48去除某数时，都余15的最小正整数。

6. 有六位数$abcabc$，证明这个六位数必能被7、11、13整除。

7. 证明：n^4+4（n是大于1的整数）是一个合数。

8. 求满足$m^2+64=n^2$一式中的m和n的正整数解。

9. 求出一个四位数，等于它的四个数字之和的四次方，并证明它的唯一性。

10. 试问有多少个四位数，这样的四位数加上400之后，就可成为一个自然数的平方？

11. 有某数，它除以3余1，除以4余2，除以5余3，除以6余4，求此数。

12. 一篮鸡蛋，按两个两个一数，三个三个一数，四个

四个一数，五个五个一数，六个六个一数时，篮里总剩一个；七个七个一数时，篮里一个也不剩．问篮里至少有多少鸡蛋？

13．证明：真分数的分子、分母都加上同一个自然数，所得之分数必大于原分数；假分数的分子、分母都加上同一个自然数，所得之分数必小于原分数．

14．试证：（1）任意自然数若它的各位数字之和能被 3 整除，则这个自然数也能被 3 整除；（2）任意自然数它的各位数字之和能被 9 整除，则这个自然数也能被 9 整除．

15．证明：(1) $11^{10}-1$ 可被10整除；(2) 若n为自然数，$13^{2n}-1$ 可被168整除；(3)若n为正奇数，7^n+1可被 8 整除．

16．已知 $[3(230+t)]^2=492a04$，求t和a．

17．设 u、v 均为非负整数，u^2+uv+v^2 能被 9 整除，则u、v均能被 3 整除．

18．已知一个四位数N，开头两个数字相同，后面两个数字也相同，(1)试证：N一定能被11整除；(2)如果N是一个完全平方数，求$\sqrt{N}$．

19．设a是大于 2 的整数，b是一个合数($b>0$)，若有r个不同的正整数能整除b，则至少有r个正整数能整除a^b-1．

20．证明：$\lg 5$ 不是有理数．

21．若正方形的边长是有理数，则它的对角线长是无理数．

22．测定一根钢丝长l厘米，它在31.95厘米$\leqslant l \leqslant$32.05厘米之间．(1)用绝对误差界表示钢丝的近似值；(2)用相对误差界表示钢丝的近似值．

23．计算：$\sqrt{5}+\frac{1}{7}-(4.375-\frac{4}{3})$。（精确到0.01）

24．证明：（1）任意正奇数位数$a_1a_2\cdots a_{2n+1}$（$n\geqslant 2$的整数），若$(a_1+a_3+\cdots a_{2n+1})-(a_2+a_4\cdots+a_{2n})$是11的倍数或0，则$a_1a_2\cdots a_{2n+1}$是11的倍数；（2）任意正偶数位数$a_1a_2\cdots a_{2n}$，若$(a_1+a_3+\cdots a_{2n+1})-(a_2+a_4\cdots a_{2n})$是11的倍数或0，则$a_1a_2\cdots a_{2n}$是11倍数。

25．若七位数 $235xy54$ 能被99整除，求x和y。

§2． 恒等变形

26．分解因式

（1） $x^3+6x^2+11x+6$；

（2） $4(x+5)(x+6)(x+10)(x+12)-3x^2$；

（3） $bc(b+c)+ca(c-a)-ab(a+b)$；

（4） $x^4-2x^2y-3y^2+8y-4$；

（5） $3x^2-7xy-6y^2-10x+8y+8$；

（6） $x^6-7x^4-26x^2+72$。

27．m为何值时，$12x^2-10xy+2y^2+11x-5y+m$能分解成两个一次因式的乘积？

28．分解因式 $x^2-3y^2-8z^2+2xy+2xz+14yz$。

29．如果 a、b、c 为三角形三边长，且$a^3+b^3+c^3=3abc$，求证：这个三角形是等边三角形。

30．如果a、b、c、d都是实数，且满足关系式$a^4+b^4+c^4+d^4=4abcd$，求证：边长为a、b、c、d的四边形是菱形。

31．已知a，b，c三数满足关系式 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$，证明：这三个数中必有某2个数绝对值相等，符

号相反。

32．无论x为何数，$\dfrac{ax^3-5x^2+bx+c}{2x^3-10x^2+3x-4}$的值恒为一个常数。求$a$，$b$，$c$及此式的值。

33．证明：无论x为何整数，$x^4+6x^3+11x^2+6x$之值都是24的倍数。

34．化简下列各式

（1）$\sqrt{\lg^2 21-2\lg 21+1}$；

（2）$(1+\mathrm{tg}^2\theta)\sqrt{1-\sin^2\theta}$；$(\frac{\pi}{2}<\theta<\pi)$

（3）$\sqrt{1-\sin 88^\circ}$；

（4）$\sqrt{1+\sin 20^\circ}-\sqrt{1-\sin 20^\circ}$；

（5）$|x+1|-|x+4|$；

（6）$\sqrt{a^2}+\sqrt{(1-a)^2}$．（$a$为实数）

35．计算 $\dfrac{2|x|}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{2}{x-1}}}$．

36．求证：（1）$\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\cdots}}}}=2$．

（2）$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}=2\cos\frac{\pi}{32}$

37．分式$\dfrac{x^2-1}{(1+xy)^2-(x+y)^2}$

（1）在什么条件下有意义；　（2）为正值；

（3）为负值；　（4）能否等于0？

（5）当$y=\sqrt{\sqrt{2}+2}$时，求分式的值。

38．已知$a+b=1$，$ab=-1$，求$\dfrac{a^6-b^6}{a-b}$的值。

39．如果$x>0, y>0$，且$\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{y})=3\sqrt{y}(\sqrt{x}+5\sqrt{y})$，试求$\dfrac{2x+\sqrt{xy}+3y}{x+\sqrt{xy}-y}$的值。

40．证明：

$$\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}\pm\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}.$$

$(A>0, B>0, A^2>B)$

41．利用40题，计算：$\sqrt{7+\sqrt{48}}$和$\sqrt{11-6\sqrt{2}}$。

42．设$\dfrac{x-y}{x+y}=a$，$\dfrac{y-z}{y+z}=b$，$\dfrac{z-x}{z+x}=c$，

求证：$(1-a)(1-b)(1-c)=(1+a)(1+b)(1+c)$。

43．化简：

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{6}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n-2}+\sqrt{2n}}\ (n\geqslant 2).$$

44．求满足$\left(\dfrac{9}{8}\right)^x\left(\dfrac{10}{9}\right)^y\left(\dfrac{16}{15}\right)^z=2$式中的整数$x, y, z$的值。

45．证明：

$$\frac{1}{1+x^{a-b}+x^{a-c}}+\frac{1}{1+x^{b-c}+x^{b-a}}+\frac{1}{1+x^{c-a}+x^{c-b}}=1.$$

46．化简：

(1) $\dfrac{x^{\frac{3}{2}}-1}{x^{\frac{1}{2}}-1}-\dfrac{x^{\frac{3}{2}}+1}{x^{\frac{1}{2}}+1}$;

(2) $\dfrac{a^{\frac{4}{3}}-8\sqrt[3]{a}\cdot b}{a^{\frac{2}{3}}+2\sqrt[3]{a\,b}+4b^{\frac{2}{3}}}\div\left(1-2\sqrt[3]{\dfrac{b}{a}}\right)-a^{\frac{2}{3}}$;

(3) $\dfrac{a^{2}+b^{2}-a^{-2}+b^{-2}}{a^{2}b^{2}-a^{-2}b^{-2}}+\dfrac{(a-a^{-1})(b-b^{-1})}{ab+a^{-1}\cdot b^{-1}}$;

(4) $[(e^{x}+e^{-x})^{2}-4]^{\frac{1}{2}}+[(e^{x}-e^{-x})^{2}+4]^{\frac{1}{2}}$;

(5) $\dfrac{a^{2n+1}-6a^{2n}+9^{a^{2-1}}}{a^{n+1}-4a^{n}+3a^{n-1}}$;

(6) $(x+\dfrac{1}{x})(x^{2}+\dfrac{1}{x^{2}})(x^{4}+\dfrac{1}{x^{4}})\cdots(x^{2^n}+\dfrac{1}{x^{2n}})$.

47. 化简：$\dfrac{1+x^{2}+x\sqrt{1+x^{2}}}{x+\sqrt{1+x^{2}}}$.

48. 若$\dfrac{x}{a-b}=\dfrac{y}{b-c}=\dfrac{z}{c-a}$， 且$a\neq b\neq c$，求$x+y+z$的值.

49. 计算：$\dfrac{a+b}{(a-c)(b-c)}+\dfrac{b+c}{(b-a)(c-a)}+\dfrac{c+a}{(c-b)(a-b)}$.

50. 已知：$m+\dfrac{1}{m}=2$，求$m^{2}+\dfrac{1}{m^{2}}$和$m^{3}+\dfrac{1}{m^{3}}$的值.

51. 已知：$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$，$\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}+\dfrac{c}{z}=0$.

求证：$\left(\dfrac{x}{a}\right)^{2}+\left(\dfrac{y}{b}\right)^{2}+\left(\dfrac{z}{c}\right)^{2}=1$.

52. 设x，y，z为互不相等的实数，且$x+\dfrac{1}{y}=y+\dfrac{1}{z}=z+\dfrac{1}{x}$，求证：$xyz=1$。

53. 已知：$x+\dfrac{1}{y}=1$，$y+\dfrac{1}{z}=1$， 证明：$z+\dfrac{1}{x}=1$。

54. 一个数与其倒数的差为m，它们的平方差为n，求证：$m^4+4m^2=n^2$。

55. 设$\dfrac{x}{b+c-a}=\dfrac{y}{c+a-b}=\dfrac{z}{a+b-c}$，求证：$(b-c)x+(c-a)y+(a-b)z=0$。

56. 若$\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{4}$，求$\dfrac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2}$的值。

57. 若$3^x+3^{-x}=4$，求27^x+27^{-x}。

58. 计算：
$$\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}.$$

59. 求证：
$$\frac{1}{\sqrt{12-\sqrt{140}}}-\frac{1}{\sqrt{8-\sqrt{60}}}-\frac{2}{\sqrt{10+\sqrt{84}}}=0.$$

60. 比较$\sqrt[3]{41}$，$2\sqrt{3}$，$3\sqrt[6]{2}$的大小。

61. 已知m是实数，试判定m^8和m^2-m+1的大小。

62. 设a、b、c、d是互不相等的四个整数，r是方程$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)-4=0$的整根，证明$a+b+c+d=4r$.

63. x为何数时，分式$\dfrac{1+x}{2+\dfrac{6}{2x-3}}$的值：

（1）等于0；（2）等于1；（3）不存在.

64. 当$x=\sqrt{2}$时，

$$求\frac{x+1}{x+\dfrac{3x+1}{x-1}}+\frac{x-1}{x-\dfrac{3x-1}{x+1}}的值.$$

65. 若最简根式$\sqrt[n^2+3n]{2a+b}$和$\sqrt[n+15]{3a-b}$为同次根式，求n的值.

66. 若最简根式$\sqrt[3a+2]{4a+3b}$和$\sqrt[b+4]{2a-b+6}$为同类根式，求a、b的值.

67. （1）若$(x+p)(x+2q)+(x+2p)(x+q)$是x完全平方式，则$9p^2-14pq+9q^2=0$.

（2）若$(x+a)(x+b)+(x+b)(x+c)+(x+c)(x+a)$是$x$的完全平方式，则$a=b=c$.

68. 已知a,b,c为三角形的三边，求证：

（1）$a^2-b^2-c^2-2bc<0$.

（2）对于$f(x)=x^3-3b^2x+2c^3$，若有$f(a)=f(b)=0$.则该三角形为等边三角形.

69. 设$a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2}=1$，矩形的对角线长为1，证明$a$、$b$为矩形的两条边.

70. 如果$m>n>0$，那末m^2+n^2，m^2-n^2，$2mn$可以

表示一个直角三角形三边长。

71. 已知多项式$ax^3+bx-47x-15$既能被$3x+1$，也能被$2x-3$整除，求a, b并且分解这个多项式。

72. 已知多项式$f(x)$除以$x+2$所得的余数为1，除以$x+3$所得的余数为-1，求$f(x)$除以$(x+2)(x+3)$所得的余式。

73. 若ax^4+bx^3+1，能被$(x-1)^2$整除，求a、b。

74. 若$x+y+z$整除$x^3+y^3+z^3+kxyz$，求k。

75. 求多项式$p(x)$被$(x-a)(x-b)$除的余式。$(a\neq b)$。

76. 若x^3-2x^2+ax-6和x^3+5x^2+bx+8有相同的二次公因式，求a、b。

77. 若（1）$x^4+2x^2-x+2=(x^2+Ax+1)(x^2+Bx+2)$，

（2）$$\frac{x}{x^2-5x+6}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-2},$$

求A、B。

78. 当a、b为何数时，x^3+8x^2+5x+a能被x^2+3x+b整除。

79. 已知$8z-4y=7x, 12x-11y=3z$（x, y, z是实数），

求 $\dfrac{\sqrt{z}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{yz}}$的值。

80. 已知$x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=3$，求$\dfrac{x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}+2}{x^2+x^{-2}+3}$的值。

§3. 指数和对数

81. 设$\frac{x}{4}=a-1$，求$(a+x^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}}+(a-x^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}}$的值。

82. 计算：

（1）$[(-\log_{\sqrt{2}}4)^{-\frac{4}{3}}]^{-1.5}\times\frac{1}{0.0016^{0.25}}-0.2^{-2}$

$\div\left(\sqrt{\frac{1}{8}}\right)^{\frac{2}{3}}+[(27^{\frac{5}{3}})^{0}]^{4}$；

（2）$(0.5\mathrm{tg}105^{0})^{20}\cdot(2\mathrm{tg}15^{0})^{21}$；

（3）$\lg\sqrt[10]{2\sqrt[10]{2\sqrt[10]{2\cdots}}}$；

（4）$\log_{2}3\cdot\log_{3}4\cdot\log_{4}5\cdot\log_{5}6\cdot\log_{6}7\cdot\log_{7}8$。

83. 证明：

（1）$\log_{a^{n}}b^{n}=\log_{a}b$；

（2）$\log_{ap}(bp)=\frac{\log_{a}b+\log_{a}p}{1+\log_{a}p}$。

84. 计算：

（1）$x=15^{2\log_{15}5}$，求x值。

（2）$x=a^{\frac{\lg(\lg a)}{\lg a}}$，求$x$值。

85. 计算：

（1）$10\cdot100^{\frac{1}{2}\lg9-\lg2}$；

（2）$3^{-\log_{3}5}+\sqrt{25^{\log_{5}4-1}}$。

86．解下列各题：

（1）若 $\log_{14}7=a$，$\log_{14}5=b$，求$\log_{35}28$；

（2）若 $\lg 6=a$，$\lg 108=b$，求$\lg 5.4$；

（3）若 $\log_{18}9=a\ (a\neq 2)$，$18^b=5$，求$\log_{36}45$；

（4）若 $\log_{12}27=a$，求$\log_6 16$。

87．计算：

（1）$\lg\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)$；

（2）$[\log_2 3+\log_4 9+\log_8 27+\cdots$

$$+\log_{2^n}3^n]\log_9\sqrt[n]{32}$$；

（3）$\lg\operatorname{tg}1^\circ\cdot\lg\operatorname{tg}2^\circ\cdot\lg\operatorname{tg}3^\circ\cdots\lg\operatorname{tg}89^\circ$；

（4）$$\frac{1}{\log_{\cos 20^\circ}2}+\frac{1}{\log_{\cos 40^\circ}2}+\frac{1}{\log_{\cos 80^\circ}2}.$$

88．证明：

（1）若 $(2.5)^x=1000$，$(0.25)^y=1000$，

则 $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{3}$；

（2）若 $2^x=5^y=10^z$，则 $z=\dfrac{xy}{x+y}$；

（3）若 $2^{6a}=3^{3b}=6^{2c}$，则 $3ab-2ac=bc$；

（4）若 a、b为正数，且$a^b=b^a$，则$\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{a}{b}}=a^{\frac{a}{b}-1}$；

（5）若 a、b为正数，且$a^x=b^y=(ab)^z$，

则 $z=\dfrac{xy}{x+y}$；

（6）若 x,y,z为正数，且 $x=y^z$，$y=z^x$，$z=x^y$，