高等學校教學用書

微分幾何教程

П. К. 拉舍夫斯基著
吳祖基 裘光明譯

高等教育出版社

本書係根據蘇聯技術理論書籍出版社（Государственное издательство технико-теоретической литературы）出版的拉舍夫斯基（П. К. Рашевский）著"微分幾何教程"（Курс дифференциальной геометрии）1950 年增訂版譯出。原書經蘇聯高等教育部審定爲國立大學的教科書。

本書內容包含曲線論和曲面論。曲線論中包含平面曲線理論和空間曲線理論。曲面論中討論了曲面基本理論，直紋面和可展曲面及曲面底內蘊幾何學。

本書由北京大學吳祖基、裴光明翻譯。

微分几何教程

П. К. 拉舍夫斯基著

吳祖基　裴光明譯

高等教育出版社出版

北京琉璃廠一七〇号

（北京市書刊出版業營業許可証出字第〇五四号）

京華印書局印刷　新華書店總經售

書号 13010·76　開本 850×1168 1/32　印張 13 11/16　字數 366,000

一九五五年十月北京第一版

一九五六年六月北京第二次印刷

印數 2,501－4,500　定價(8)￥1.50

目　次

第三版序言

在準备第三版時对这教本作了重大的修改。主要是为了在敍述底方法、材料底安排和計劃、証明底选擇等等方面作一些改進。特別重視的是清楚地列举了本課程基本的最低限度的材料。为此把所有其餘的內容(一般說來，它們都与必要的最低限度的材料緊密地相連，而且可以在某种选擇下与那些材料統一起來)都歸入加星号的各節裏。

至於說到在本課程裏所接觸到的实际知識方面，則在这裏改变不大。有的也只是个別的不多的補充：在曲線的参數表示下的奇異點；用極限过程來得出密切圓；直紋面底分佈参數和腰曲線。

在本書最後还添加了簡短的歷史知識。

对於本書編輯A. З. 雷夫欽(Рывкин)，由於他对本書的特別誠心的工作和对它所作的有價值的批評，我必須对他表示衷心的感謝。

作　者

緒　論

虽然在数学裏对於一个領域在確实熟悉它以前很难建立一个一般的概念，我們还是要以概括的描述來給出微分幾何学对象底特徵。

如所周知，解析幾何建立在这样的对比上：空間底每个點对三个數（坐标）；每个曲面对連繫流動坐标的方程；每条曲線对兩个这样的方程。由於这个，幾何事实可以被翻譯成代數的語言，幾何問題可以用代數方法來解，然後利用相反的过程把結果重新用幾何語言來解释。在这裏基本的观點顯然在於：使有力的和有用的代數算法規律地为幾何目的而服务。这時这步驟所表示的，不僅在於舊的問題用更完善的解析方法來解，而且在於与由初等方法達到的問題比起來有可能把幾何問題的範圍無比地擴大。

微分幾何表明在幾何目的上微分計算工具底相類的利用。这時重心依然在於創立幾何研究底新的領域上，以便使新的算法得能深入地应用。要知道是什麼决定这个領域——微分幾何底領域，——应該回想一下，無窮小分析这个工具在那裏应用和一般地如何应用。为了引出初等的例子，我們來討論點底不均匀的直線运動，它是按着表達點所經歷的路程依賴於時間的規律 $s=s(t)$ 而進行的。我們在時間底無窮小的區間从 t 到 $t+\Delta t$ 裏來研究这个运動。於是，从微分計算知道，在時間 Δt 內點所經歷的路程可以表示成

$$\Delta s = s'(t)\Delta t + \varepsilon\Delta t,$$

这兒 $s'(t)$ 是微商，而 ε 与 Δt 同時趨向零。我們注意到，如果略去階數比 Δt 高的無窮小 $\varepsilon\Delta t$，則 Δs 对 Δt 的依賴是線性的，其係數为 $s'(t)$。这就是說，运動可以認为是均匀的，它有固定的速度 $s'(t)$。

微分計算底全部应用就立足於这基礎之上：在無窮小範圍內，只要略去高階的無窮小，複雜的依賴關係变成線性的，不均匀的过程变成均匀的，等等。我們就能在特別簡化了的形狀裏（自然只在無窮小範圍內）研究我們所關心的依賴關係。但是，第一，这事实本身有其重要性（在所說的例子裏我們用对時間求微分的步驟達到瞬間速度底計算）；第二，積分計算使我們在需要時能够回到这步驟在整个範圍內的估價[①]。

微分幾何是这同一个观點在幾何領域裏的具体表現。換句話說，幾何对象——曲線和曲面——我們是从它們在無窮小節段上的結構方面來進行研究的。这个"顯微鏡式的研究"为我們揭露出一系列整齐的規律性，这用簡單的眼光看不出來而且只在無窮小時才能發現。研究幾何对象的一种新的强有力的方法產生了，我們在实地研究時將会得到關於它的更清晰的观念。

我們还來作一个事先的附言。因为方法底本質与微分計算底应用有關，所以我們不应該在所討論函數底可微分性意义上加以任何限制。假如沒有相反的声明，我們永远假定，所有被討論的函數是單值的和可微分的，並且隨着我們的需要它們都有直到任意階的連續的微商。我們还要指出，在整本書裏討論的都是实变數。

① 我們在这裏所說到的已經是關於微分計算的应用。事实上，不僅这些应用，甚至無窮小分析之所以能夠創立，都由於物質的过程在小範圍有獲得均匀特質的趨勢（当然是暫且不談物質底原子結構）。微分計算就以絕对的形式反映这种趨勢。

第一章　關於平面上曲線的初步知識

这一章在本教程裏佔有非常独特的地位。在这一章裏要探討的許多問題是界於分析和幾何之間的，因而卽使沒有預先的專門幾何作圖，也是可以研究的。侭管这些問題从分析的观點和幾何的观點看來都是重要的，但是必須注意到它們对於微分幾何底主要內容而言实在並非典型的，而且在那兒也無直接的用处。

如果願意的話，讀者可以立刻从第二章開始來讀这本教程(特別当他已經从分析教程知道了第一章內容底要點時)，等以後再回过來讀第一章。

§ 1. 平面曲線底正常點和奇異點

因为我們底課題是在無窮小範圍內研究曲線，所以我們感兴趣的不是整个曲線，而是它底微小的片段。讓我們來給出基本的定义。我們叫做曲線底簡單線段[1] 的是这样的點底軌跡，它們底坐标至少在某一个笛卡兒直角坐标系裏滿足方程

$$y=f(x)\ \text{对於}\ x_1\leqslant x\leqslant x_2, \qquad (1)$$

这兒 x, x_2 是兩个固定的值。当然，像我們將要討論的所有函數一样，$f(x)$ 假定是單値的、連續的和可以微分充分多次的。

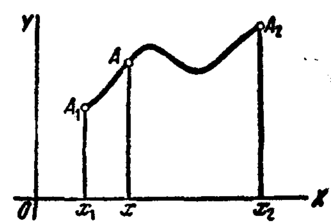

圖 1.

很容易說明这个定义底直覺意义。簡單線段 A_1A_2(圖 1)顯然与 X

[1] 这个術語不是通用的，我們是為了使術語正確而引用它的。

軸上的直線段(x_1, x_2)有一个互相單値的对应，並且線段 A_1A_2 底每个點 A 是从 X 軸上对应點 x 經过平行於 Y 軸的移動而得到的。因此，簡單線段 A_1A_2 是从直線段(x_1, x_2)經过簡單的变形而得到的；可以認为(1)式就表達这个变形的法則。这時从直覺观點看來，$f(x)$ 底連續性和可微分性对我們保証了線段 A_1A_2 底"平滑的形狀"。例如，在它上面不可以有折斷处，不可以有如同圖 2 上的尖角型的點 M_2，等等。

我們还要作下面的補充。按簡單線段的定义，它底方程至少在某一个笛卡兒直角坐标系裏可以表示成形狀(1)；但是这並不說明在任意的笛卡兒直角坐标系裏也有同样的事实。例如如果在圖 1 上交換 X 軸和 Y 軸底地位，則 $f(x)$ 就不是單値的了。

現在我們要來說明，簡單線段底概念与更複雜的概念有些什麼關係。讓我們來討論坐标滿足下列方程的點底軌跡：

$$F(x, y)=0, \tag{2}$$

这兒 $F(x, y)$ 定义在整个平面上或者定义在平面上的一个區域裏。

这个軌跡就叫做曲線。这样的名称是確当的，因为我們立刻就会看到，軌跡(2)底微小片段通常有簡單線段的形狀。

如果在一个點 M 底鄰近，曲線有簡單線段的形狀，我們就把这个點叫做曲線(2)底正常的點；更正確地說，如果 M 可以被包含在一个長方形(即使是很小的)裏，使得曲線(2)落在这長方形內部的部分是一个簡單線段。不管我們如何縮小長方形底大小，始終不能做到这一步的點，叫做奇異的(例如在圖 2 上的點 M_1 和 M_2)。

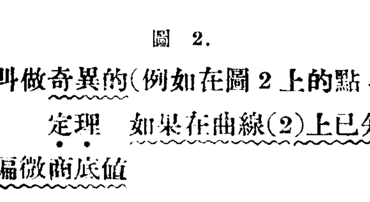

圖 2.

定理 如果在曲線(2)上已知點 $M_0(x_0, y_0)$ 处，$F(x, y)$ 对 x 和 y 的偏微商底値

$$F_x(x_0, y_0), F_y(x_0, y_0)$$

不同時成为零，則點 $M_0(x_0, y_0)$ 是正常的。

这定理底証明从隱函數底存在定理立刻可以得出。为了確定起見，設

$$F_y(x_0, y_0) \neq 0 ①.$$

此外，因为 (x_0, y_0) 处在曲線(2)上，

$$F(x_0, y_0)=0.$$

於是存在定理就断定下面的事实：可以找出包含着點 M_0 的、有充分小的边 2η 和 $2h$ 的長方形(圖 3)，在其中(也就是对於由不等式 $x_0-\eta \leqslant x \leqslant x_0+\eta$, $y_0-h \leqslant y \leqslant y_0+h$ 限定的値 x, y)方程

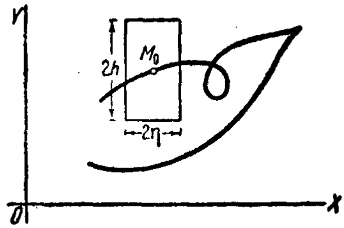

圖 3.

$$F(x, y)=0$$

对 y 唯一地可解，也就是可以找出下列与它等價的方程：

$$y=f(x)②.$$

这裏如同我們所要求的，$f(x)$ 是單値的和可微分的函數。因此，所說的長方形从我們底曲線割下一个簡單線段，所以點 M_0 按定义是正常的。

从所說的定理推出，在曲線(2)底奇異點处必須有

$$F_x(x, y)=F_y(x, y)=0, \tag{3}$$

也就是兩个偏微商同時成为零。因此，有趣的是，如果在曲線上存在着奇異點，則这些點底坐标 x, y 应該同時滿足三个方程：方程(2)和兩个方程(3)。

我們注意到，寫在上面定理中的正常點底充分条件不是必要条件。例如，我們取一条拋物線

① 如果 $F_y(x_0, y_0)=0$，則根据我們底假設，必須有不等式 $F_x(x_0, y_0)\neq 0$，我們可以交換坐标軸底地位。

② 譬如說，可以去看費赫琴哥尔茨(Г. М. Фихтенгольц)的微積分教程第一卷(1947年版)第六章 § 2。还要提醒的是，在我們底敘述裏已包含着所討論函數微商底存在和連續性。

$$y^2-x=0,$$

它顯然全部由正常的點組成($F_x=-1\neq 0$)。

讓我們來討論从已知方程左边乘上 x^2+y^2 而得到的方程:

$$(x^2+y^2)(y^2-x)=0.$$

新的方程決定同一条拋物線,因为因子 x^2+y^2 成为零只在 $x=y=0$ 時,而这个點早就屬於拋物線了①。

然而現在很容易証实的是,方程左边对 x 和 y 的偏微商在點 $x=$ $=y=0$ 处都成为零,虽然坐标原點依然是我們拋物線上的正常的點。

總之,不变動曲線,而只改变了方程底解析本質,可以使得 F_x 和 F_y 在依然是正常的點处同時成为零。

依照上面所說的,条件(3)对於奇異點是必要而不充分的。F_x 和 F_y 不同時成为零的點我們就叫做顯然正常的點。

§ 2. 曲線在正常點鄰近的結構

我們知道,在任意的正常點 $M_0(x_0, y_0)$ 鄰近,曲線是一个簡單線段,也就是可以用下列方程表示:

$$y=f(x) \text{ 对於 } x_0-\eta\leqslant x\leqslant x_0+\eta.$$

讓我們來研究曲線在固定的正常點 $M_0(x_0, y_0)$ 鄰近的性質。我們在曲線在 M_0 近傍的簡單線段上取點 $M(x, y)$。为了簡單起見,使用記号

$$x-x_0=\Delta x, \text{ 这就是說 } x=x_0+\Delta x,$$

利用帶剩餘項的泰勒展開式,可以寫出:

$$y=f(x)=y_0+y_0'\Delta x+y_0''\frac{(\Delta x)^2}{2!}+y_0'''\frac{(\Delta x)^3}{3!}+$$
$$+\cdots+y_0^{(n)}\frac{(\Delta x)^n}{n!}+R_n. \tag{4}$$

① 如同我們在引言裏所說过的,我們專門討論实变數,因此虛的分支对我們是不存在的。

这裏 $y_0, y_0', y_0'', \cdots$ 是 $f(x)$ 和它底各階微商在點 $x=x_0$ 处的值。剩餘項 R_n 有形狀

$$R_n = f^{(n+1)}(\xi)\frac{(\Delta x)^{n+1}}{(n+1)!},$$

这兒 ξ 適当地取在 x_0 和 x 中間。

(4)式底意义是在於，曲線上一个鄰近點 M 底縱坐标 y 就等於在點 M_0 处的縱坐标 y_0 加上按 Δx 底增冪排列的一些補充項。

依照微分幾何一般的目的，我們是在點 M_0 附近的無窮小區域裏，也就是当 M 沿着曲線趨向 M_0 時，因而是当 Δx 趨向零時，來研究曲線。那時在(4)式裏 y_0 以後的各項对於 Δx 說分別是一階、二階、三階等等的無窮小。如果在某个問題裏我們關心的只是到 n 階为止的無窮小，而更高階的我們就不管了，則我們就說，我們的討論正確到 n 階。这時候我們有权拋棄剩餘項 R_n，它是 $n+1$ 階無窮小(从它底表達式可以看到，階數不会低於 $n+1$)，而方程(4)就有形狀

$$y \approx y_0 + y_0'\Delta x + \cdots + y_0^{(n)}\frac{(\Delta x)^n}{n!}, \tag{5}$$

这就是說，y 表示成 Δx(因此也就是 x)底 n 次多項式。總之，在無窮小範圍裏曲線底方程有較簡短的形狀(5)；但自然不能忘記，方程(5)只在正確到 n 階時成立，也就是具有(不低於) $n+1$ 階無窮小的差誤。由於这个緣故，我們使用近似等式的記号。我們進行討論時所具有的正確階次 n 可以是不同的。

我們从曲線性質底最粗糙的估計開始。假設 $n=1$，也就是只考慮 Δx 底一階無窮小，略去高階的。

於是(4)式改寫成

$$y = y_0 + y_0'\Delta x + R_1,$$

或者

$$y = y_0 + y_0'(x-x_0) + R_1 \tag{6}$$

也一样，这兒

$$R_1 = \frac{1}{2}y''(\xi)(\Delta x)^2.$$

我們注意到，如果略去二階無窮小 R_1，(6)是通过點 $M_0(x_0, y_0)$的直線底方程，其斜率是 y_0'。因此，正確到一階時，曲線在正常點 M_0 鄰近(沿着它底兩側)与下列直線無區別：

$$y=y_0+y_0'(x-x_0). \tag{7}$$

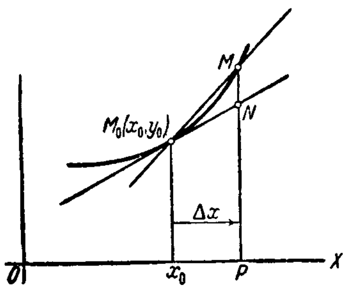

圖　4.

更正確些，这指出，直線(7)和曲線(6)縦坐标之間的离差 NM 是階數比 Δx 高的無窮小(圖 4)。实际上，因为曲線上的點 M 底縦坐标由(6)式右边表達，而直線上对应點 N 底縦坐标則由(7)式右边表達，所以它們中間的差 NM 就等於剩餘項 R_1，它是不低於二階的無窮小。

从微分法原理知道，曲線在點 M_0 处的切線是指割線 M_0M 当 M 沿着曲線趨向 M_0 時的極限位置；切線有斜率 y_0'，而且通过 M_0。因此，在點 M_0 处的切線与直線(7)重合，这說明，正確到一階時这切線在 M_0 鄰近与曲線無差別。这就是在微分幾何各种应用裏所說到的切線底基本的幾何意义。例如，如果一个質點最先受限制沿着曲線軌道运動，後來得到自由而且隨慣性而运動，則它底新的直線軌道就是原來的曲線軌道在解除束縛的點处的切線。这指出，所謂隨慣性而延續的运動，是指当解除束縛的瞬間，點不沿曲線运動，而沿其切線运動。

類似地，假如我們有一条有重量的線，使其兩端固定而且懸垂成一条曲線，則作用在固定的端點上的線底張力，方向沿着切線，这就是說，在固定的端點鄰近，線沿着切線拉緊。(我們順便指出一下，均匀的有重量的線懸垂成所謂懸鏈線 $y=a\ \mathrm{ch}\dfrac{x}{a}=\dfrac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$，我們以後將会看到，它具有許多值得注意的性質。)

現在我們來研究曲線(6)对它底切線(7)的离差。我們已經確定

过，对於已知的 x，曲線(6)和切線(7)上點底縱坐标之差有形狀

$$NM=R_1=\frac{1}{2}y''(\xi)(\Delta x)^2, \tag{8}$$

这兒 ξ 夾在 x_0 和 $x_0+\Delta x$ 中間。

我們先假定 y'' 在點 x_0 处是正的：

$$y''_0>0.$$

因为 $y''(x)$ 是連續函數，所以靠近 x_0 在充分小的鄰域 $(x_0-\eta, x_0+\eta)$ 裏，它保持正号。取 Δx 適当地小，使得 $x_0+\Delta x$，因而也使得 ξ 落在这个鄰域裏，我們在(8)式裏就有了確实正的係數 $y''(\xi)$；因此，对於任意符号的 Δx，也就是同時对於沿曲線的右側和左側，整个(8)式大於零。

因此，在 x_0 鄰近曲線与切線的离差 NM 当 $y''_0>0$ 時是正的，而曲線就位於其切線之上。

在这种情形裏我們說，在點 M_0 处曲線凸面向下。

現在我們假定 $y''_0<0$。於是在點 x_0 底充分小的鄰域裏 $y''(x)$ 保持負号；在公式(8)裏 $y''(\xi)<0$，而因为總有 $(\Delta x)^2>0$，所以

$$NM<0.$$

曲線在 M_0 鄰近位於其切線之下；我們就說，在點 M_0 处曲線凸面向上。

从(8)式看出，在这兩种情形裏曲線与切線的离差都是二階無窮小。

还要研究的是 $y''_0=0$ 的情形。假定这時 $y'''_0\neq0$。我們对於 $n=2$ 來利用公式(4)。我們得到

$$y=y_0+y'_0\Delta x+y'''(\xi)\frac{(\Delta x)^3}{6}. \tag{9}$$

(因为 $y''_0=0$，Δx 底二次項不存在。)

比較(9)式与切線方程(7)，我們看到，曲線(9)和切線(7)的縱坐标之差对於 x 底每个値都可以表示成：