

高等學校教學用書



微分幾何教程

И. К. 拉舍夫斯基著

吳祖基 裘光明譯

高等教育出版社

本書係根據蘇聯技術理論書籍出版社(Государственное издательство технико-теоретической литературы)出版的拉舍夫斯基(П. К. Рашевский)著“微分幾何教程”(Курс дифференциальной геометрии) 1950年增訂版譯出。原書經蘇聯高等教育部審定為國立大學的教科書。

本書內容包含曲線論和曲面論。曲線論中包含平面曲線理論和空間曲線理論。曲面論中討論了曲面基本理論,直紋面和可展曲面及曲面底內蘊幾何學。

本書由北京大學吳祖基、裴光明翻譯。

微 分 几 何 教 程

П. К. 拉舍夫斯基著

吳祖基 裴光明譯

高等教育出版社出版

北京琉璃廠一七〇號

(北京市書刊出版業營業許可證出字第〇五四號)

京華印書局印刷 新華書店總經售

書号 13010·70 開本 850×1186 1/32 印張 13 1/16 字數 366,000

一九五五年十月北京第一版

一九五六年六月北京第二次印刷

印數(2,501—1,500) 定價(元) ¥1.50

目 次

第三版序言	7
緒論	9
第一章 關於平面上曲線的初步知識	11
§ 1. 平面曲線底正常點和奇異點	11
§ 2. 曲線在正常點鄰近的結構	14
§ 3. 在正常點處的切線和法線(笛卡兒坐標)	20
§ 4. 在正常點處的切線和法線(參數表示)	25
§ 5. 在正常點處的切線和法線(極坐標)	28
§ 6. 曲線在奇異點鄰近的結構·主要的事實	32
§ 7*. 曲線在奇異點鄰近的結構·嚴密的理論	39
§ 8. 曲線族底包絡	53
§ 9*. 在已知點鄰近的曲線族	60
§ 10. 漸近線	66
§ 11*. 漸近線作為切線底極限位置	70
§ 12. 代數曲線底漸近線	71
第二章 向量函數底微分法和它對曲線理論的最簡單應用	75
§ 13. 微商底定義和微分底技術	75
§ 14. 向量函數解釋作為參數表示的曲線底向徑	82
§ 15. 正常點底充分條件	83
§ 16. 向量函數微分法底幾何意義	85
§ 17. 向量函數底微分	88
§ 18. 兩個引理	90
§ 19. 關於向量函數的泰勒級數	92
§ 20. 參數給定的曲線在任意點底鄰域裏的構造	95
§ 21. 弧長作為參數	100

§ 22. 曲線底接觸.....	106
§ 23*. 關於曲線接觸理論的補充知識	110
第三章 平面曲線底曲率理論	118
§ 24. 密切圓.....	118
§ 25. 运用極限过程求作密切圓.....	125
§ 26. 曲率.....	127
§ 27. 向量 t, n	131
§ 28. 佛銳爾公式.....	133
§ 29. 收縮線.....	135
§ 30. 展伸線.....	140
§ 31. 曲線底自然方程.....	143
第四章 空間曲線底曲率理論	152
§ 32. 切線, 法線	152
§ 33*. 曲線與曲面的接觸	159
§ 34. 直化點.....	162
§ 35. 密切平面.....	164
§ 36. 伴隨三面形.....	168
§ 37. 關於圓周的兩個引理.....	172
§ 38. 密切圓.....	174
§ 39. 空間曲線底曲率.....	177
§ 40. 佛銳爾公式 • 撓率.....	178
§ 41. 曲率和撓率底計算公式.....	186
§ 42. 曲線在正常點近傍的構造.....	194
§ 43*. 密切球面.....	200
§ 44. 自然方程.....	206
第五章 關於曲面論的初步知識	219
§ 45. 曲面上的曲紋坐標.....	219
§ 46. 曲面上的曲線.....	223
§ 47. 第一基本二次形式.....	227
§ 48. 曲面上的第二基本形式.....	233
§ 49. 關於曲面上曲線底曲率的基本公式.....	241

§ 50. 麥尼埃定理	242
§ 51. 平面上的線性向量函數	246
§ 52. 定態方向與定態值	249
§ 53. 基本向量函數和主方向	253
§ 54. 法截線曲率底研究	255
§ 55. 歐拉公式・主曲率	258
§ 56. 主曲率和主方向底計算	261
§ 57. 曲面上點底三種類型	265
§ 58. 計算公式	270
§ 59. 曲率線	273
§ 60. 漸近曲線	279
§ 61. 第三基本二次形式・共軛方向	285
§ 62*. 三個基本二次形式間的相關性	290
§ 63. 曲面底球面表示	291
第六章 直紋面和可展曲面	297
§ 64. 關於直紋面和可展曲面的概念	297
§ 65. 腰點	301
§ 66. 腰曲線・可展曲面底構造	304
§ 67*. 分佈參數	310
§ 68. 單參數曲面族底包絡	313
§ 69. 可展曲面視為平面族底包絡	317
§ 70*. 平面族包絡底脊線	318
§ 71*. 直紋面底漸近曲線和總曲率	323
§ 72. 可展曲面作為零總曲率的曲面	326
§ 73*. 可展曲面底正交軌線	328
§ 74. 曲率線底幾何特徵	334
§ 75. 曲面上的共軛網	337
第七章 曲面底內蘊幾何學	343
§ 76. 關於彎曲變形的概念	343
§ 77. 曲面底內蘊幾何學和彎曲變形	343
§ 78. 數標記號	345

§ 79. 第一組導式.....	347
§ 80*. 第二組導式	351
§ 81*. 第二基本形式底作用	353
§ 82. 高斯定理.....	358
§ 83*. 彼得松-柯達齊公式.....	361
§ 84*. 曲面上的向量	363
§ 85*. 曲面上數量場底梯度	366
§ 86*. 曲面上向量底平行移動	369
§ 87*. 平行移動底性質	372
§ 88. 曲面上曲線底法曲率和測地曲率.....	376
§ 89. 測地曲率底計算.....	378
§ 90. 曲面上的測地線.....	381
§ 91*. 从曲面上平行移動的觀點看測地線	385
§ 92*. 曲面上的半測地線坐標	386
§ 93*. 測地線底極值性質	390
§ 94*. 關於非定曲率曲面的彎曲變形	394
§ 95*. 可彎曲變形成旋轉曲面的曲面情況	400
§ 96*. 關於定總曲率曲面的彎曲變形	406
§ 97*. 定總曲率的旋轉曲面	410
§ 98*. 向量場閉行程底平行移動	417
簡單歷史知識	425
中俄文索引.....	(1-8)

第三版序言

在準備第三版時對這教本作了重大的修改。主要是為了在敘述底方法、材料底安排和計劃、證明底選擇等等方面作一些改進。特別重視的是清楚地列舉了本課程基本的最低限度的材料。為此把所有其餘的內容（一般說來，它們都與必要的最低限度的材料緊密地相連，而且可以在某種選擇下與那些材料統一起來）都歸入加星號的各節裏。

至於說到在本課程裏所接觸到的實際知識方面，則在這裏改變不大。有的也只是個別的不多的補充：在曲線的參數表示下的奇異點；用極限過程來得出密切圓；直紋面底分佈參數和腰曲線。

在本書最後還添加了簡短的歷史知識。

對於本書編輯 А. З. 雷夫欽 (Рывкин)，由於他對本書的特別誠心的工作和對它所作的有價值的批評，我必須對他表示衷心的感謝。

作者

緒 論

虽然在数学裏對於一个領域在确实熟悉它以前很难建立一个一般的概念，我們还是要以概括的描述來給出微分幾何学对象底特徵。

如所周知，解析幾何建立在这样的对比上：空間底每个點对三个数（坐标）；每个曲面对連繫流動坐标的方程；每条曲線对兩個这样的方程。由於这个，幾何事实可以被翻譯成代數的語言，幾何問題可以用代數方法來解，然後利用相反的过程把結果重新用幾何語言來解釋。在這裏基本的觀點顯然在於：使有力的和有用的代數算法規律地为幾何目的而服务。這時这步驟所表示的，不僅在於舊的問題用更完善的解析方法來解，而且在於与由初等方法達到的問題比起來有可能把幾何問題的範圍無比地擴大。

微分幾何表明在幾何目的上微分計算工具底相類的利用。這時重心依然在於創立幾何研究底新的領域上，以便使新的算法得能深入地应用。要知道是什麼決定这个領域——微分幾何底領域，——應該回想一下，無窮小分析这个工具在那裏应用和一般地如何应用。为了引出初等的例子，我們來討論點底不均勻的直線運動，它是按着表達點所經歷的路程依賴於時間的規律 $s=s(t)$ 而進行的。我們在時間底無窮小的區間从 t 到 $t+\Delta t$ 裏來研究这个運動。於是，从微分計算知道，在時間 Δt 內點所經歷的路程可以表示成

$$\Delta s = s'(t)\Delta t + \varepsilon\Delta t,$$

這兒 $s'(t)$ 是微商，而 ε 與 Δt 同時趨向零。我們注意到，如果略去階數比 Δt 高的無窮小 $\varepsilon \Delta t$ ，則 Δs 對 Δt 的依賴是線性的，其係數為 $s'(t)$ 。這就是說，運動可以認為是均勻的，它有固定的速度 $s'(t)$ 。

微分計算底全部應用就立足於這基礎之上：在無窮小範圍內，只要略去高階的無窮小，複雜的依賴關係變成線性的，不均勻的過程變成均勻的，等等。我們就能在特別簡化了的形狀裏（自然只在無窮小範圍內）研究我們所關心的依賴關係。但是，第一，這事實本身有其重要性（在所說的例子裏我們用對時間求微分的步驟達到瞬間速度底計算）；第二，積分計算使我們在需要時能夠回到這步驟在整個範圍內的估價^①。

微分幾何是這同一個觀點在幾何領域裏的具體表現。換句話說，幾何對象——曲線和曲面——我們是從它們在無窮小節段上的結構方面來進行研究的。這個“顯微鏡式的研究”為我們揭露出一系列整齊的規律性，這用簡單的眼光看不出來而且只在無窮小時才能發現。研究幾何對象的一種新的強有力的方法產生了，我們在實地研究時將會得到關於它的更清晰的觀念。

我們還來作一個事先的附言。因為方法底本質與微分計算底應用有關，所以我們不應該在所討論函數底可微分性意義上加以任何限制。假如沒有相反的聲明，我們永遠假定，所有被討論的函數是單值的和可微分的，並且隨着我們的需要它們都有直到任意階的連續的微商。我們還要指出，在整本書裏討論的都是實變數。

① 我們在這裏所說到的已經是關於微分計算的應用。事實上，不僅這些應用，甚至無窮小分析之所以能夠創立，都由於物質的過程在小範圍有獲得均勻特質的趨勢（當然是暫且不談物質底原子結構）。微分計算就以絕對的形式反映這種趨勢。

第一章 關於平面上曲線的初步知識

这一章在本教程裏佔有非常独特的地位。在这一章裏要探討的許多問題是界於分析和幾何之間的，因而即使沒有預先的專門幾何作圖，也是可以研究的。尽管這些問題从分析的觀點和幾何的觀點看來都是重要的，但是必須注意到它們對於微分幾何底主要内容而言實在並非典型的，而且在那兒也無直接的用处。

如果願意的話，讀者可以立刻从第二章開始來讀这本教程（特別当他已經从分析教程知道了第一章内容底要點時），等以後再回過來讀第一章。

§ 1. 平面曲線底正常點和奇異點

因為我們底課題是在無窮小範圍內研究曲線，所以我們感興趣的不是整個曲線，而是它底微小的片段。讓我們來給出基本的定义。我們叫做曲線底簡單線段^①的是這樣的點底軌跡，它們底坐标至少在某一个笛卡兒直角坐标系裏滿足方程

$$y = f(x) \text{ 對於 } x_1 \leq x \leq x_2, \quad (1)$$

這兒 x_1, x_2 是兩個固定的值。當然，像我們將要討論的所有函數一樣， $f(x)$ 假定是單值的、連續的和可以微分充分多次的。

很容易說明这个定义底直覺意义。簡單線段 A_1A_2 （圖 1）顯然与 x

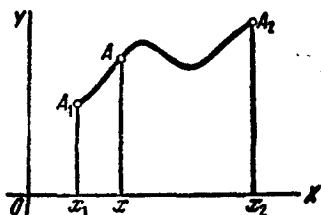


圖 1.

^① 这个術語不是通用的，我們是爲了使術語正確而引用它的。

軸上的直線段 (x_1, x_2) 有一个互相單值的对应,並且線段 A_1A_2 底每个點 A 是从 X 軸上对应點 x 經過平行於 Y 軸的移動而得到的。因此,簡單線段 A_1A_2 是从直線段 (x_1, x_2) 經過簡單的變形而得到的;可以認為(1)式就表達这个變形的法則。這時从直覺觀點看來, $f(x)$ 底連續性和可微分性對我們保證了線段 A_1A_2 底“平滑的形狀”。例如,在它上面不可以有折斷處,不可以有如同圖2上的尖角型的點 M_2 ,等等。

我們還要作下面的補充。按簡單線段的定義,它底方程至少在某个笛卡兒直角坐标系裏可以表示成形狀(1);但是这並不說明在任意的笛卡兒直角坐标系裏也有同样的事实。例如如果在圖1上交換 X 軸和 Y 軸底地位,則 $f(x)$ 就不是單值的了。

現在我們要來說明,簡單線段底概念与更複雜的概念有些什麼關係。讓我們來討論坐标滿足下列方程的點底軌跡:

$$F(x, y) = 0, \quad (2)$$

這兒 $F(x, y)$ 定义在整个平面上或者定义在平面上的一个區域裏。

这个軌跡就叫做曲線。这样的名称是確當的,因為我們立刻就会看到,軌跡(2)底微小片段通常有簡單線段的形狀。

如果在一個點 M 底鄰近,曲線有簡單線段的形狀,我們就把這個點

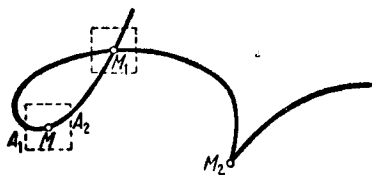


圖 2.

叫做曲線(2)底正常的點;更正確地說,如果 M 可以被包含在一個長方形(即使是很小的)裏,使得曲線(2)落在这長方形內部的部分是一個簡單線段。不管我們如何縮小長方形底大小,始終不能做到这一步的點,

叫做奇異的(例如在圖2上的點 M_1 和 M_2)。

定理 如果在曲線(2)上已知點 $M_0(x_0, y_0)$ 處, $F(x, y)$ 對 x 和 y 的偏微商底值

$$F_x(x_0, y_0), F_y(x_0, y_0)$$

不同時成為零，則點 $M_0(x_0, y_0)$ 是正常的。

這定理底證明從隱函數底存在定理立刻可以得出。為了確定起見，設

$$F_y(x_0, y_0) \neq 0 \textcircled{1}.$$

此外，因為 (x_0, y_0) 处在曲線(2)上，

$$F(x_0, y_0) = 0.$$

於是存在定理就斷定下面的事實：

可以找出包含着點 M_0 的、有充分小的邊 2η 和 $2h$ 的長方形(圖3)，在其中(也就是對於由不等式 $x_0 - \eta \leq x \leq x_0 + \eta$, $y_0 - h \leq y \leq y_0 + h$ 限定的值 x, y) 方程

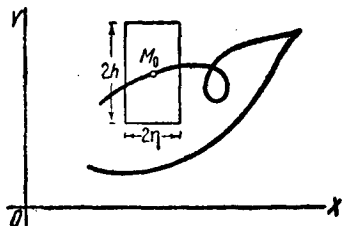


圖 3.

$$F(x, y) = 0$$

對 y 唯一地可解，也就是可以找出下列與它等價的方程：

$$y = f(x) \textcircled{2}.$$

這裏如同我們所要求的， $f(x)$ 是單值的和可微分的函數。因此，所說的長方形從我們底曲線割下一個簡單線段，所以點 M_0 按定義是正常的。

從所說的定理推出，在曲線(2)底奇異點處必須有

$$F_x(x, y) = F_y(x, y) = 0, \quad (3)$$

也就是兩個偏微商同時成為零。因此，有趣的是，如果在曲線上存在着奇異點，則這些點底坐標 x, y 應該同時滿足三個方程：方程(2)和兩個方程(3)。

我們注意到，寫在上面定理中的正常點底充分條件不是必要條件。例如，我們取一條拋物線

① 如果 $F_y(x_0, y_0) = 0$ ，則根據我們底假設，必須有不等式 $F_x(x_0, y_0) \neq 0$ ，我們可以交換坐標軸底地位。

② 譬如說，可以去看費赫琴哥爾次(Г. М. Фихтенгольц)的微積分教程第一卷(1947年版)第六章 §2。還要提醒的是，在我們底敘述裏已包含着所討論函數微商底存在和連續性。

$$y^2 - x = 0,$$

它顯然全部由正常的點組成($F_x = -1 \neq 0$)。

讓我們來討論從已知方程左邊乘上 $x^2 + y^2$ 而得到的方程：

$$(x^2 + y^2)(y^2 - x) = 0.$$

新的方程決定同一條拋物線，因為因子 $x^2 + y^2$ 成為零只在 $x = y = 0$ 時，而這個點早就屬於拋物線了^①。

然而現在很容易証實的是，方程左邊對 x 和 y 的偏微商在點 $x = y = 0$ 處都成為零，雖然坐標原點依然是我們拋物線上的正常的點。

總之，不變動曲線，而只改變了方程底解析本質，可以使得 F_x 和 F_y 在依然是正常的點處同時成為零。

依照上面所說的，條件(3)對於奇異點是必要而不充分的。 F_x 和 F_y 不同時成為零的點我們就叫做顯然正常的點。

§ 2. 曲線在正常點鄰近的結構

我們知道，在任意的正常點 $M_0(x_0, y_0)$ 鄰近，曲線是一個簡單線段，也就是可以用下列方程表示：

$$y = f(x) \text{ 對於 } x_0 - \eta \leq x \leq x_0 + \eta.$$

讓我們來研究曲線在固定的正常點 $M_0(x_0, y_0)$ 鄰近的性質。我們在曲線在 M_0 近傍的簡單線段上取點 $M(x, y)$ 。為了簡單起見，使用記号

$$x - x_0 = \Delta x, \text{ 這就是說 } x = x_0 + \Delta x,$$

利用帶剩餘項的泰勒展開式，可以寫出：

$$\begin{aligned} y = f(x) = & y_0 + y'_0 \Delta x + y''_0 \frac{(\Delta x)^2}{2!} + y'''_0 \frac{(\Delta x)^3}{3!} + \\ & + \dots + y^{(n)}_0 \frac{(\Delta x)^n}{n!} + R_n. \end{aligned} \quad (4)$$

① 如同我們在引言裏所說過的，我們專門討論實變數，因此虛的分支對我們是不存在的。

這裏 $y_0, y'_0, y''_0, \dots$ 是 $f(x)$ 和它底各階微商在點 $x=x_0$ 处的值。剩餘項 R_n 有形狀

$$R_n = f^{(n+1)}(\xi) \frac{(\Delta x)^{n+1}}{(n+1)!},$$

這兒 ξ 適當地取在 x_0 和 x 中間。

(4)式底意義是在於，曲線上一個鄰近點 M 底縱坐標 y 就等於在點 M_0 處的縱坐標 y_0 加上按 Δx 底增幂排列的一些補充項。

依照微分幾何一般的目的，我們是在點 M_0 附近的無窮小區域裏，也就是當 M 沿着曲線趨向 M_0 時，因而是當 Δx 趨向零時，來研究曲線。那時在(4)式裏 y_0 以後的各項對於 Δx 說分別是一階、二階、三階等等的無窮小。如果在某個問題裏我們關心的只是到 n 階為止的無窮小，而更高階的我們就不管了，則我們就說，我們的討論正確到 n 階。這時候我們有權拋棄剩餘項 R_n ，它是 $n+1$ 階無窮小(從它底表達式可以看到，階數不會低於 $n+1$)，而方程(4)就有形狀

$$y \approx y_0 + y'_0 \Delta x + \dots + y^{(n)}_0 \frac{(\Delta x)^n}{n!}, \quad (5)$$

這就是說， y 表示成 Δx (因此也就是 x)底 n 次多項式。總之，在無窮小範圍裏曲線底方程有較簡短的形狀(5)；但自然不能忘記，方程(5)只在正確到 n 階時成立，也就是具有(不低於) $n+1$ 階無窮小的差誤。由於這個緣故，我們使用近似等式的記號。我們進行討論時所具有的正確階次 n 可以是不同的。

我們從曲線性質底最粗糙的估計開始。假設 $n=1$ ，也就是只考慮 Δx 底一階無窮小，略去高階的。

於是(4)式改寫成

$$y = y_0 + y'_0 \Delta x + R_1,$$

或者

$$y = y_0 + y'_0 (x - x_0) + R_1 \quad (6)$$

也一樣，這兒

$$R_1 = \frac{1}{2} y''(\xi) (\Delta x)^2.$$

我們注意到，如果略去二階無窮小 R_1 ，(6) 是通過點 $M_0(x_0, y_0)$ 的直線底方程，其斜率是 y'_0 。因此，正確到一階時，曲線在正常點 M_0 鄰近（沿着它底兩側）與下列直線無區別：

$$y = y_0 + y'_0(x - x_0). \quad (7)$$

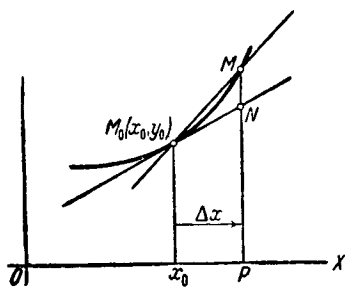


圖 4.

更正確些，這指出，直線(7)和曲線(6)縱坐標之間的高差 NM 是階數比 Δx 高的無窮小(圖4)。實際上，因為曲線上的點 M 底縱坐標由(6)式右边表達，而直線上對應點 N 底縱坐標則由(7)式右边表達，所以它們中間的差 NM 就等於剩餘項 R_1 ，它是不低於二階的無窮小。

從微分法原理知道，曲線在點 M_0 處的切線是指割線 M_0M 當 M 沿着曲線趨向 M_0 時的極限位置；切線有斜率 y'_0 ，而且通過 M_0 。因此，在點 M_0 處的切線與直線(7)重合，這說明，正確到一階時這切線在 M_0 鄰近與曲線無差別。這就是在微分幾何各種應用裏所說到的切線底基本的幾何意義。例如，如果一個質點最先受限制沿着曲線軌道運動，後來得到自由而且隨慣性而運動，則它底新的直線軌道就是原來的曲線軌道在解除束縛的點處的切線。這指出，所謂隨慣性而延續的運動，是指當解除束縛的瞬間，點不沿曲線運動，而沿其切線運動。

類似地，假如我們有一條有重量的線，使其兩端固定而且懸垂成一條曲線，則作用在固定的端點上的線底張力，方向沿着切線，這就是說，在固定的端點鄰近，線沿着切線拉緊。（我們順便指出一下，均勻的有重量的線懸垂成所謂懸鏈線 $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a} = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)$ ，我們以後將會看到，它具有許多值得注意的性質。）

現在我們來研究曲線(6)對它底切線(7)的高差。我們已經確定

过, 對於已知的 x , 曲線(6)和切線(7)上點底縱坐标之差有形狀

$$NM = R_1 = \frac{1}{2}y''(\xi)(\Delta x)^2, \quad (8)$$

這兒 ξ 夾在 x_0 和 $x_0 + \Delta x$ 中間。

我們先假定 y'' 在點 x_0 處是正的:

$$y''_0 > 0.$$

因為 $y''(x)$ 是連續函數, 所以靠近 x_0 在充分小的鄰域 $(x_0 - \eta, x_0 + \eta)$ 裏, 它保持正號。取 Δx 適當地小, 使得 $x_0 + \Delta x$ 因而也使得 ξ 落在這個鄰域裏, 我們在(8)式裏就有了確實正的係數 $y''(\xi)$; 因此, 對於任意符號的 Δx , 也就是同時對於沿曲線的右側和左側, 整個(8)式大於零。

因此, 在 x_0 鄰近曲線與切線的離差 NM 當 $y''_0 > 0$ 時是正的, 而曲線就位於其切線之上。

在這種情形裏我們說, 在點 M_0 處曲線凸面向下。

現在我們假定 $y''_0 < 0$ 。於是在點 x_0 底充分小的鄰域裏 $y''(x)$ 保持負號; 在公式(8)裏 $y''(\xi) < 0$, 而因為總有 $(\Delta x)^2 > 0$, 所以

$$NM < 0.$$

曲線在 M_0 鄰近位於其切線之下; 我們就說, 在點 M_0 處曲線凸面向上。

從(8)式看出, 在這兩種情形裏曲線與切線的離差都是二階無窮小。

還要研究的是 $y''_0 = 0$ 的情形。假定這時 $y'''_0 \neq 0$ 。我們對於 $n=2$ 來利用公式(4)。我們得到

$$y = y_0 + y'_0 \Delta x + y'''_0(\xi) \frac{(\Delta x)^3}{6}. \quad (9)$$

(因為 $y''_0 = 0$, Δx 底二次項不存在。)

比較(9)式與切線方程(7), 我們看到, 曲線(9)和切線(7)的縱坐标之差對於 x 底每個值都可以表示成: