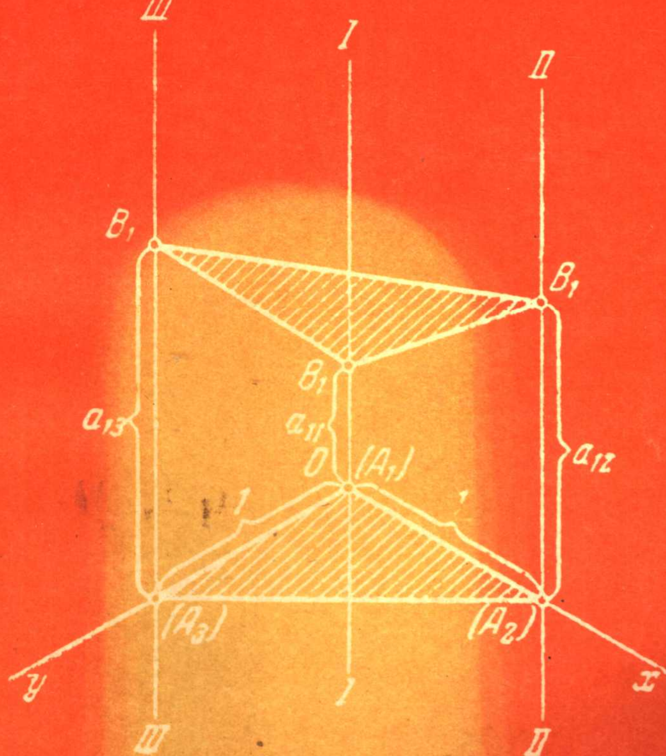
中華科學叢書第十五種

博戲的理論與應用

著者：E. S. Ventzel
譯者：趙 愼 餘



臺灣中華書局印行

博戲的理論與應用

著　者：E. S. Ventzel
譯　者：趙　慎　餘

臺灣中華書局印行

中華民國六十五年九月二版

中華科學叢書第十五種

博戲的理論與應用（全一册）

基本定價壹元壹角正

著者 E. S. Ventzel

譯者 趙 愼 餘

中華科學叢書編輯委員（以姓氏筆劃爲序）

伍法岳 沈君山 沈慶春 李天培
林多樑 吳京生 吳家瑋 吳錦鉉
夏道師 浦大邦 許翼雲 趙曾珏
劉 鎏 劉全生 鄭伯昆 錢致榕
瞿樹元

中華書局股份有限公司代表
發行人 熊 鈍 生
臺北市重慶南路一段九十四號

印刷者 臺灣中華書局印刷廠

發行處 臺 灣 中 華 書 局
臺北市重慶南路一段九十四號

本書局登記證字號：
行政院新聞局局版
臺業字第捌叁伍號

中華科學叢書序

近代物理學，可溯源於十九世紀末年之氣體導電，X光，放射性等之研究。六十餘年來，基本物理中劃時代之發展，如一九〇〇年之量子論，一九〇五年之相對論，一九一三年之原子結構理論，一九二四——一九二八年間之量子力學，一九三幾年之原子核物理，一九三九年之原子核分裂。一九四六年介子之發現，及近十餘年來之基本粒子物理及物理學中之對稱定律等。常言「一日千里」，實不足以形容物理學發展之迅速。即從事一部門物理研究工作之學者，對其他部門之新發展亦時感脫節。故各國各部門科學皆有專書及期刊，由各門專家著述，對各部門工作之結果及發展之情形，作綜合性之報告、檢討及分析。此類著作，不僅便利同儕而已。

年來國人對科學及技術於建國之重要，了解漸深，一般青年，對科學、工程技術之興趣亦日趨濃厚。然限於環境，時或有望洋興嘆之感。增強在臺學校中科學教程，固爲一基本工作，但以中文著述，介紹科學之新發展，爲學校課外之補充讀物實爲一極重要、極有意義之事。

我國留美學者：伍法岳、沈君山、沈慶春、李天培、林多樑、吳京生、吳家瑋、吳錦鋐、夏道師、浦大邦、劉鎣、劉全生、錢致榕、瞿樹元諸先生有鑑於此，曾決定從事科學叢書之編譯，各就其專長，選定寫作部門，目前除計劃於近期內陸續出版關於基本粒子、相對論、天文物理、量子電子學、低溫物理等近代物理各部門書籍外，並擬擴大科學部門及於數學、化學、生物及工程技術等，廣邀各方面學者專家從事著作或譯述。

叢書編輯委員會諸君，皆年青學者，學有專長，兹能熱心從事著述，爲我國科學教育及青年效勞；而中華書局亦以服務精神發行科學叢書。筆者年來對我國科學教育，未嘗忘懷，祇以力不從心，無善可述，玆聞此叢書行將陸續出版，謹向國人介紹，並致個人欽佩喜慰之感。

吳　大　猷

一九六六年十月

原　書　序

這本書是一本對於博戲理論（Game Theory）以及一些距陣博戲（Matrix Game）的通俗介紹。我在全書中不證明一切定理，僅舉出一些實用的例子來說明這些基本的定理。想要讀完這本書的人，只要具備一些或然率以及數學的分析上一些基本知識即可。

這本書的目的主要是建立大家對博戲理論的基本認識，因爲時至今日，博戲理論在經濟學與軍事作業方面具有極高的實用價值。

梵　徹　爾

一九六一年

譯者序

這本書的翻譯取材自俄國進階數學與物理叢書第四冊 (Russian Tracts on Advanced Mathematics and Physics)，原書名爲 Lectures on Game Theory。

我敢斷言的是：讀者能够從這本書獲得的，不僅僅是對博戲理論的輪廓的瞭解，並能漸漸用來思索並解決一些自己面臨的問題，例如建築上的、軍事上的及經濟上的，甚至如下圍棋、打橋牌、擲骰子等問題上面。譯者尤其希望讀者能够從這本書中，訓練自己「將實際問題抽象化，數學化」的能力，這也是本書的精神所在。

在此我要特別感謝清華大學數學系的黃光明教授，他是這方面的專家，對我作了許多有價值的批評與指導。同時也感謝一切幫助並關心本書出版的師長及朋友，如沈君山教授、李怡嚴教授等等。書中若有遺誤之處，希望能得到讀者們的指正。

趙愼餘於

新竹清華大學

博戲的理論與應用目錄

第一章　博戲理論的內容與基本概念

在解決一些實際的問題（如經濟上的、軍事作業上的等等……），常常需要分析一種情況。這種情況在開始時有兩個以上的敵體，他們的利害相衝突，並且一方的行動必需取決於對方所採取的行動。這種情況，我們稱之爲「不相容情況」(Conflicting Situation)。

在很多應用上，我們都可以舉出許多「不相容情況」的例子。軍事作業上發生的任何情況都是不相容情況，因爲任何一方都想盡一切辦法去阻止敵方的成功。軍事裝備的選擇及其在戰爭上的應用、軍事行動的計劃——每一個行動都須計算出怎樣使敵方最不利——這些都屬於不相容情況。此外在經濟界、商業公司、企業單位等，均可視爲不相容情況。

要分析這些情況需要一些特殊的數學技巧。整個博戲理論，事實上也不過是「不相容情況」的數學理論罷了。這些理論的作用是要分析研討：在整個「不相容情況」過程中，什麼是每一個敵體的合理行爲。

事實上，從實際應用上所擷取的不相容情況都是很複雜的。由於「人」這種因素的加入，使我們很困難去分析清楚怎樣才是合理的行爲。爲了要使我們能够用數學來分析它，我們必須把一些次要的、人爲的因素除掉，

建立一個簡單且公式化的模式，我們稱這種模式爲博戲。

一個博戲和眞實的不相容情況之不同，在於前者完全規範於一組確定的規則。人類很早就用這一類的模式來模擬不相容情況，(字義上博戲二字也確是這個意思)，如西洋象棋，撲克牌等皆是。所有這種博戲均有競爭的性質，且按照一定的規則進行，直到有一方得到勝利爲止。

以這些有既定規則且由人制定的博戲做爲我們討論博戲理論的基本概念，是極爲適當的題材。並且，在實例中採用的名詞也和一些其他的不相容情況脗合：加入博戲的人稱爲「參加者」，並且衝突的結果只有一方得到勝利。

在博戲中常有二人或更多人利益相抵觸，前者稱之爲二人賽，後者則稱之爲 n 人賽（n 是參加人數）。若在比賽過程中，n 人可能結合成二個集團（暫時性或永久性的），這時候 n 人賽就變成二人賽了。二人賽在實際應用上是比較重要的，所以我們將討論的重心放在這種博戲上。

討論博戲理論之初，我們先列出一些基本概念：設一個二人賽的博戲參加者爲 A 和 B，他們的目標相衝突，博戲二字意味着一種法則，包含一組 A 和 B 所採取的行動。爲了要使博戲能用數學分析起見，博戲的規則必須制定的很正確。所謂「博戲的規則」，我們是指：一系列規定「A 和 B 所可能採取的變化、所能知道對方行動的消息、博戲中一組的行動，和這一組行動所導致的結果」。所謂結果（贏或輸）並不一定有數字的表示，但

是我們可以規定輸贏的尺度，例如在西洋象棋中：+1表示贏了，－1 表示輸了，0則表示和局。

在一種博戲中，一方的勝分是另一方的負分，二方得分的代數和爲零，這種博戲我們稱之爲「零和博戲」(Zero-sum Games)。在一個零積分賽中，參加者的目標是完全衝突的，因此，我們再縮小範圍，僅討論這種零積分賽的博戲。

由於在零積分賽中，一方的勝分恒等於另一方的負分，顯然地，我們在分析這種博戲時，只須考慮一方的得分卽可。爲方便起見，從現在起我們稱 *A* 爲我方，稱 *B* 爲對方，*A* 永遠當得勝者而 *B* 永遠當失敗者，這些假定，並沒有歪曲整個問題，因爲我們可將 *A*、*B* 兩方顚倒，只須將所有得分加一負號卽可(此時，*A* 變失敗者，*B* 變得勝者)。

我們可再將整個博戲的發展用一系列的「行動」(Moves) 來表示。在博戲理論中，按照規則使整個博戲發生一次變化，我們就稱之爲一個「行動」。行動可分爲「個人行動」(Personal moves)與「機會行動」(Chance moves)兩種：

參加者在所有可能的行動中，能够細心地選擇一個行動，這種行動，我們稱爲個人行動。在西洋象棋中每一次行動均是個人行動，因爲每一個參加者在輪到他的時候，都做了細心的選擇然後才移動棋子在棋盤上的位置。

每一步行動可能引起的變化，都是被規則以及雙方以前所有的行動所局限了。

當參加者所做的選擇不是由於自己的意願，而是被一些機率所決定（如丟擲一個銅板、骰子、抽出一張卡片等等），這種行動稱之為「機會行動」。例如，玩撲克時，抽出第一張卡片給某一個參加者是一種機會行動（含有52種不同的變化）。

為了使博戲能夠用數學來描述，對於每一個機會行動，博戲規則要能顯示出各種不同結果的或然率。

有一些博戲中只含有機會行動（稱之為純機會博戲 (Pure Chance Game)），或是只含有私人行動（如西洋象棋、圍棋）。 大多數的撲克牌博戲是屬於混合型的，包含機會行動與個人行動兩種。

除了用行動來劃分博戲之外，我們也可以用「知道對方情報的性質和多少」來劃分：一種博戲，若是每一個參加者能知道每一個行動（機會行動及個人行動）的結果，稱之為「完全情報的博戲」（Game with full information)，西洋象棋、圍棋等，均屬於完全情報的博戲。

有許多博戲具有很高實用價值，但不屬於完全情報的博戲，因為「敵方的行動的不確定」在整個不相容情況中是一個很重要的因素。

博戲理論中還有一個很重要的基本概念——戰略 (Strategy)。

在一個個人行動中，根據以前所有的過程，我們要採取的行動，往往有些規則可循，這些規則，就稱之為參加者的戰略。

現在再將戰略二字更仔細地解釋一下：

通常在博戲進行中，對於每一個個人行動的選擇都須依賴實際的情況而定。但是理論上，若我們假設所有的選擇都由參予者事先決定，這與博戲本身也沒有什麼本質上的差異。因爲，我們可以事先將所有可能情況編成一表格，然後爲每一個可能性都做一個選擇。理論上，任何博戲都可以做到這一步。如果某一系列的選擇已經決定了，我們稱這參予者選擇了一定的「戰略」。

若參予者已完成他的戰略，事實上他已不需親自參加這個博戲，只需將所列成的戰略表 (List of strategy) 交給不相關的人去執行卽可。

要注意的是：唯有在個人行動存在的情況下，「戰略」一詞才有意義，若是在純機會行動的博戲根本就沒有戰略可言。

博戲又可分成有限博戲 (Finite Game) 與無限博戲 (Infinite Game)二種：

若在一博戲中參予者戰略的數目和是有限的，我們稱之爲有限博戲。

在有限博戲中，若 A 有 m 個戰略（卽有 m 系列的選擇），B 有 n 個戰略，我們稱之爲 $m\times n$ 博戲。

現在，讓我們考慮 $m\times n$ 博戲，參予者是 A 和 B (我方和敵方)。

將我方的戰略記爲 A_1，A_2……，A_m；敵方的戰略記爲 B_1，B_2，……，B_n。

若博戲結束，我方選擇的戰略是 A_i，敵方選擇的是 B_j。

若此博戲僅包含個人行動，A_i 和 B_j 就決定了此博

戲的結果，我們記此結果爲 a_{ij}。

如果除了個人行動外，也包含了機會行動。那麼一對戰略 A_i、B_j 的結果是一個與機會有關的數（Chance Number）——依所有機會行動的結果而定。在這種淸況，我們所能得到的結果只是平均值（Average value）（亦卽數學期望值）。

無論有無機會行動，我們都將A_i 和 B_j 所產生的結果(Yield)或平均值(Average value)記爲 a_{ij}。

假設所有成對戰略的 a_{ij} 値都知道了，所有的a_{ij}可以列成一個長方矩陣（Rectangular matrix），矩陣的行(Column)與A_i 相對，矩陣的列(Row)與B_j 相對，這樣的一個矩陣我們稱之爲「報酬矩陣」(Pay-off matrix)，或直接稱爲此博戲的矩陣(Matrix of the game)。

$m \times n$ 博戲矩陣形式如下：

A \ B	B_1	B_2	……	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}	……	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	……	a_{2n}
⋮	⋮	⋮	……	⋮
A_m	a_{m1}	a_{m2}	……	a_{mn}

我們亦可簡寫爲$||a_{ij}||$。

讓我們考慮一些基本博戲的例子。

例 1. A 與 B 兩人在不讓對方探知的情況下，二人同時在桌上放置一枚銅板，若二銅板同面（同爲正面或反面），則 A 贏得這二個銅板，否則 B 得到這二銅板，現在我們將這個博戲列成矩陣。

解答：這個博戲只有二個行動（一人一個），且都是個人行動。這個博戲也不屬完全情報博戲，因爲任一方決定自己的行動時，並不知道對方所採取的行動是什麼。

因爲每一個參予者都只有一個個人行動，所以每個人選擇的戰略中都只包含一個個人行動。

我方可有二戰略：A_1—— 選擇正面，A_2—— 選擇反面；對方也有二戰略：B_1——正面，B_2——反面。所以這是一個 2×2 博戲。若每一銅板値爲＋1，則此博戲矩陣如下：

A \ B	B_1 (r)	B_2 (u)
A_1 (r)	1	−1
A_2 (u)	−1	1

擷取上面的例子，我們順便解釋一些博戲理論的概念。

首先假設上述的博戲只玩一次。那麼，要說那一個戰略優於另一個戰略顯然是無意義的。任一參予者可選擇任一決定。但是，如果這博戲玩了許多次，情形就不同了。

假設我方(A)老是堅持使用同一戰略（正面），那麽，由前幾次的結果，對方(B)就可以猜出我方戰略，並且選擇了最不利於我方的戰略——選擇反面。隨卽，我方不得不放棄老戰略，而時時出之以反面。但是，若我方時正時反之中有一定的規則以後，又漸漸會被對方熟知而打擊我方。所以，一個能保證對方不知道我方戰略的方法是：使我方自己也不知道自己的戰略。例如：我方可以擲銅板，若出現正面則出正面，若出現反面則出反面。照上述方法，我們瞭解了二個名詞——混合戰略(Mixed strategies)和單一戰略（Pure strategies)。由於對稱性的存在，我們可預先知道例1中A_1和A_2都會隨一樣的頻率而變化。但在更複雜的博戲中，情形不會如此簡單了。

例 2. A和B兩人，同時在紙上寫下1,2,3中任一數字。若二數字之和爲偶數，B給A相同數字的盧布，若此數爲奇數，A給B此數目之盧布。現在我們同樣分析這個博戲，列出矩陣來。

解答：這個博戲包含了二個行動——皆屬個人行動。我方(A)有三戰略：A_1——寫1，A_2——寫2，A_3——寫3。對方(B)可有同樣三戰略。這是一個3×3博戲，其矩陣如下：

A \ B	B_1	B_2	B_3
A_1	2	−3	4
A_2	−3	4	−5
A_3	4	−5	6

顯然，與例 1 相同，對方可因我方選擇單一戰略而抗之以對我方不利的戰略。例如，我方用 A_1，對方則永遠用B_2；我方用A_3，對方亦永遠用B_2，總而言之，選用單一戰略的一方是永遠失敗的。至於上例中雙方最有利的戰略是什麼？我們將在第五章中討論。

例 3. 我方佈置有三種不同的防空高射炮 ——A_1，A_2、A_3。對方有三種不同的飛機 B_1，B_2，B_3。若用A_1高射炮射中敵機 B_1，B_2，B_3 的或然率分別爲0.9，0.4，0.2；A_2高射炮則0.3，0.6，0.8；A_3則0.5，0.7，0.2。我們將此問題用博戲理論分析。

解答：這是一個3×3博戲，我們的結果若擊中敵機則爲1，若誤失則爲0。對於某一對戰略（A_i, B_j），結果之平均值表示用一高射炮射中一飛機的或然率。矩陣如下：

A \ B	B_1	B_2	B_3
A_1	0.9	0.4	0.2
A_2	0.3	0.6	0.8
A_3	0.5	0.7	0.2

博戲理論的主要目的是建議參予者在不相容情況中最適當的行爲是怎樣的。亦卽：參予者的「最宜戰略」(Optimal strategy)。一個戰略若能使參予者在一連串博戲中平均結果(Average yield)最大，我們稱之爲最宜戰